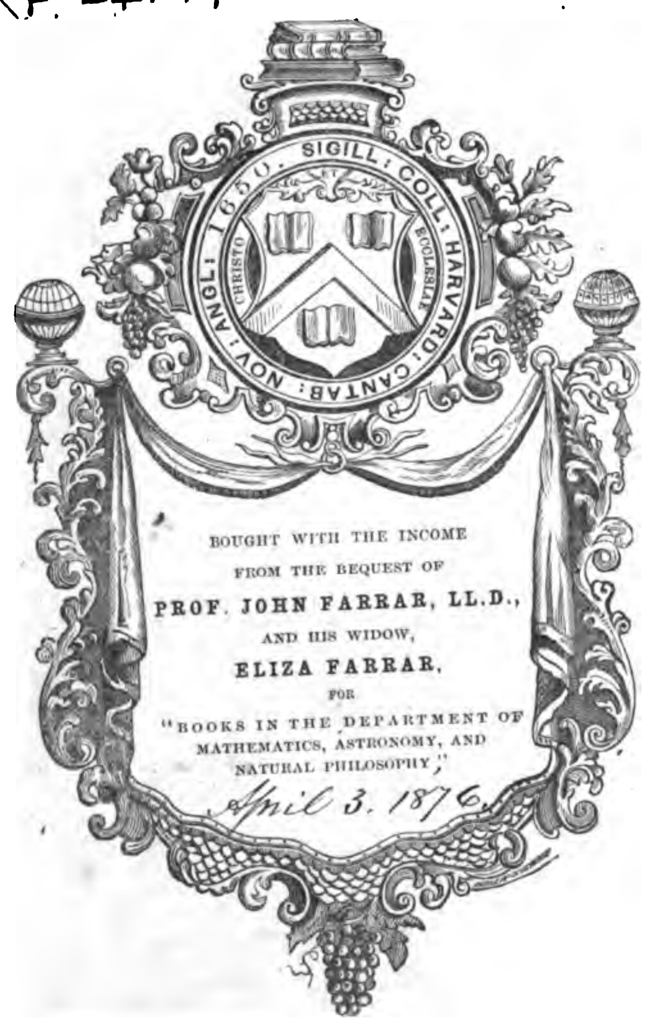
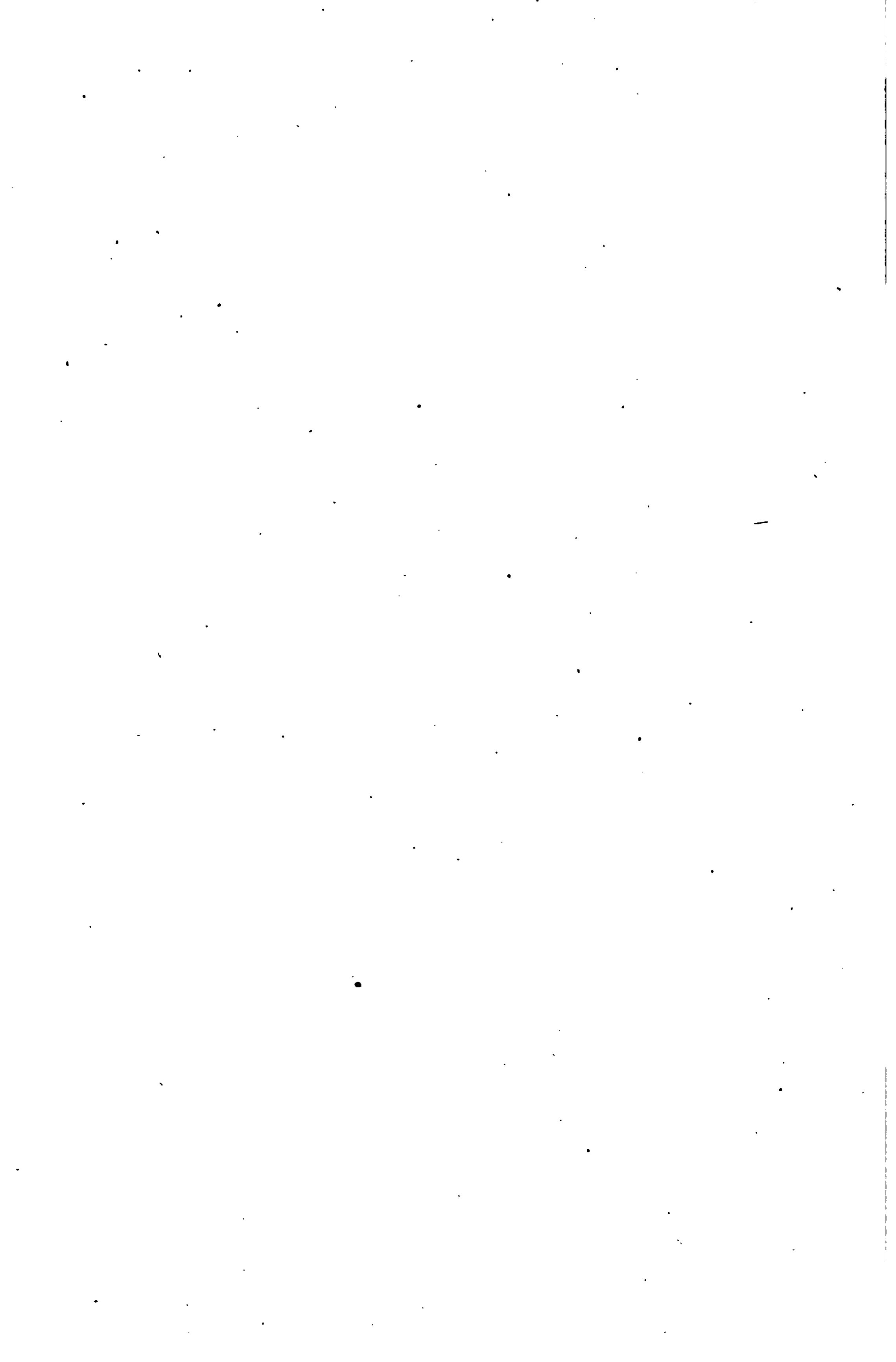




SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650
CHRISTO ET ECCLESIAE

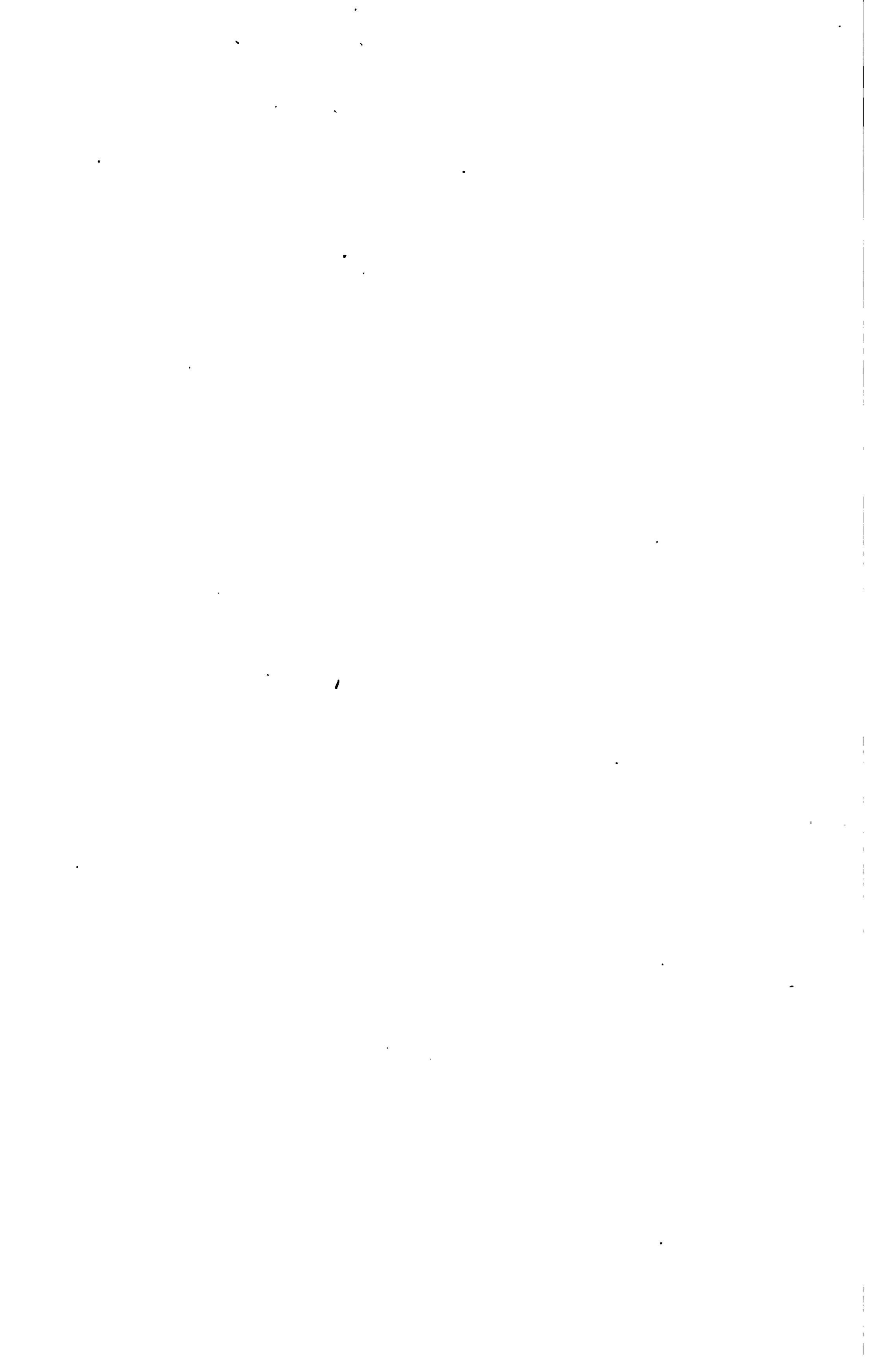






PHYSIKALISCHE

KRYSTALLOGRAPHIE.



PHYSIKALISCHE

KRYSTALLOGRAPHIE

20.

UND EINLEITUNG

IN DIE

KRYSTALLOGRAPHISCHE KENNTNISS

DER

WICHTIGEREN SUBSTANZEN

VON

P. GROTH.

MIT 557 HOLZSCHNITTEN IM TEXT, EINER BUNTDRUCK- UND 2 LITHOGRAPHIRTEN TAFELN.

LEIPZIG,

VERLAG VON WILHELM ENGELMANN.

1876.

Vorwort.

Es ist durch die Forschungen der letzten Jahrzehnte auf dem Gebiete der Krystallographie gelehrt worden, dass das Studium der physikalischen, namentlich der optischen Eigenschaften der Krystalle für die Beschäftigung mit jener Wissenschaft völlig unentbehrlich sei, dass die rein geometrische Untersuchung der Formen eines Krystalls zu falschen Schlüssen über dieselben führen kann, vor welchen selbst der sorgfältigste Beobachter sich zu bewahren nicht im Stande ist. Trotz der Wichtigkeit, welche desshalb die Kenntniss der physikalischen Verhältnisse der Krystalle, der Gesetze ihres Zusammenhanges mit der Krystallform, für Alle besitzt, welche sich mit Krystallographie beschäftigen, also für Chemiker, Mineralogen und Physiker, — existirt doch bisher kein Lehrbuch, welches diesen Gegenstand, unter Abstreifung alles unnöthigen Formelapparates, so behandelte, dass mit dessen Hülfe der Anfänger durch Selbststudium eingehend mit den bezüglichen Thatsachen und deren Zusammenhang bekannt gemacht und in den Stand gesetzt würde, diese Kenntniss bei Bestimmung der Krystallformen praktisch zu verwerthen.

Das vorliegende Werk ist einerseits ein Versuch, diesem Mangel abzuhelfen, soll aber andererseits auch ein Lehrbuch der eigentlichen Krystallographie sein, in welchem diese Wissenschaft nach einer von der bisher üblichen einigermassen abweichenden Methode behandelt wird. Wenn wir von der grossen Zahl von Lehrbüchern der Krystallographie absehen, deren Verfasser keine Rücksicht auf die physikalischen Verhältnisse nehmen, und welche daher, gleichviel, in welchem Jahre sie erschienen sind, als veraltet bezeichnet werden dürfen, so besitzen wir allerdings zwei ausgezeichnete, dem jetzigen Standpunkt der Wissenschaft

entsprechende Lehrbücher: die »Krystallographie« von W. H. Miller, übersetzt von Grailich, Wien 1856, und das »Lehrbuch der Krystallographie« von V. v. Lang, Wien 1866. Diese beiden Werke setzen indess die Kenntniss der Krystallphysik grossentheils voraus, und behandeln daher die in Rede stehende Wissenschaft in rein geometrischem Sinne.

Der Verfasser hat sich nun durch seine Vorlesungen über Krystallographie allmälich immer mehr überzeugt, dass das Verständniss derselben ein weit vollkommeneres, in vielen Beziehungen sogar leichteres wird, wenn man die geometrischen Eigenschaften in ihrem Zusammenhange mit den physikalischen behandelt, jene gleichsam aus diesen entwickelt. Eine grosse Zahl der krystallographischen Gesetze, welche in den Lehrbüchern einfach als Erfahrungssätze hingestellt werden, ergeben sich alsdann als nothwendige Consequenzen der physikalischen Eigenschaften, und manche Fragen, welche aus Missverständniss anderer Gesetze noch in neuester Zeit die Objecte gegenstandslosen wissenschaftlichen Streites gewesen sind, lösen sich in einfachster und befriedigendster Weise. Als ein Beispiel dafür mag nur angeführt werden, dass es heutigen Tages noch Schriftsteller in diesem Fache giebt, welche behaupten, dass »die Krystallsysteme nur künstliche Fächer sind, welche die Natur in der Vielseitigkeit der Erscheinungen überspringt«, eine Behauptung, deren Unrichtigkeit Jeder erkennt, der sich nur einigermassen mit der Physik der Krystalle beschäftigt hat.

Die Klärung der Ansichten, welche die Einwirkung der Physik auf die Krystallographie in letzterer hervorgebracht hat, muss ihren Ausdruck auch finden in der Methode, nach welcher diese Wissenschaft gelehrt wird, und darum ist der Verf. der Ueberzeugung, dass nach und nach diejenigen Fachgenossen, welche an höheren Unterrichtsanstalten über Krystallographie besondere Vorlesungen halten, dazu übergehen werden, in diesen den physikalischen Eigenschaften der Krystalle die ihnen gebührende Behandlung zu Theil werden zu lassen. Dass dies gerade in der, von dem Verf. hier ausgeführten, Art und Weise geschehen wird, ist natürlich nicht anzunehmen; in Bezug auf die Methode wird Jeder seinen eigenen Weg gehen; aber durch seine Behandlung des Gegenstandes hofft der Verf. den Beweis zu liefern, dass die Darstellung der Krystallographie im Zusammenhange mit der Krystallphysik ausserordentliche Vortheile vor der rein geometrischen besitze.

Um diesen Zusammenhang nun bei den einzelnen Klassen von Krystallen auseinandersetzen zu können, bedarf es gewisser Vorkenntnisse

über die physikalischen Eigenschaften der Krystalle im Allgemeinen, und da der Verfasser für die Benutzung seines Werkes zum Selbststudium keine anderen Voraussetzungen zu stellen die Absicht hatte, als sie jeder Abiturient eines Gymnasiums oder einer Realschule zu erfüllen im Stande sein soll, so war die Nothwendigkeit gegeben, mit einem allgemeinen physikalischen Abschnitt zu beginnen.

Die I. Abtheilung, die physikalischen Eigenschaften der Krystalle im Allgemeinen, ohne Rücksicht auf die Form, behandelnd, beginnt mit den mechanischen Eigenschaften derselben, unter denen die Kenntniss der wichtigsten, der Elasticität, gerade in allerneuester Zeit durch Untersuchungen von Neumann, Voigt, Baumgarten (denen sich eine soeben erschienene Arbeit des Verfassers in den Monatsber. d. Berliner Akad. d. Wiss., Augustheft 1875 anreiht) einen gewissen Abschluss erfahren hat. Den grösseren Theil dieser Abtheilung nimmt die Besprechung der optischen Eigenschaften ein, bei der an vielen Stellen der Verfasser den physikalischen Lehrbüchern von Jamin und Wüllner gefolgt ist, während natürlich manche andere, für die krystallographische Praxis wichtige, Verhältnisse eine weit eingehendere Behandlung erforderten, als sie in jenen Werken enthalten ist. Dass nicht für alle optischen Erscheinungen vollständige theoretische Herleitungen gegeben werden konnten, dass z. B. die elliptische Polarisation gar nicht erwähnt wurde, u. s. f., wird nicht auffallen, wenn man sich erinnert, mit welchen Voraussetzungen der Verfasser sich begnügen zu müssen glaubte. Trotzdem ist derselbe der Meinung, dass auch bei einer solchen, nicht ganz strengen Behandlung ein sorgfältiges Studium des hier Gebotenen Jeden in den Stand setzen wird, die optischen Eigenschaften für krystallographische Zwecke in ihrer ganzen Ausdehnung und in richtiger Weise anzuwenden, dass dasselbe also z. B. für Mineralogie und Chemie Studirende vollkommen ausreichen dürfte. Die Auseinandersetzung der thermischen Eigenschaften, namentlich der Ausdehnung durch die Wärme, musste eine ausführliche sein, weil ohne sie gewisse krystallographische Verhältnisse (die Irrationalität ungleichwerthiger Axen) völlig unverständlich ist.

Die II. Abtheilung umfasst nun die eigentliche Krystallographie, beginnend mit deren allgemeinem Grundgesetz, dem der Rationalität der Indices, und der Zonenlehre, Beides in ähnlicher Weise behandelt, wie es V. von Lang a. a. O. gethan hat; diesem Grundgesetz schliesst nun der Verfasser ein zweites an, durch welches er versucht hat, die Gesammt-

heit unserer Kenntniss des Zusammenhanges zwischen der Krystallform und den physikalischen Eigenschaften in einen kurzen Ausdruck zusammenzufassen, und leitet weiterhin von diesem Gesetz alle Einzelheiten jenes Zusammenhanges ab.

Diese Behandlung des Gegenstandes lässt nun auch in voller Klarheit erkennen, dass die Symmetrie es ist, welche an den Krystallen das Wesentliche darstellt, welche ihre Unterschiede bedingt, und durch deren Studium allein wir den Zusammenhang der Formen einzusehen vermögen. Lange hat es gedauert, bis diese Thatsache klar erkannt worden ist, weil es ziemlich frühe gelungen war, in den sogenannten Axen ein Mittel zu finden, die geometrischen Verhältnisse der Krystalle zu entwickeln, und man fälschlicherweise glaubte, in diesen, lediglich als Mittel zum Zweck dienenden, mathematischen Abstractionen nun das Wesen der Sache erkannt zu haben; der Allherrschaft der Axen mussten sich nun die Krystalle bedingungslos unterwerfen, und diesem Umstande verdanken wir Schöpfungen, wie die Speculationen über rechtwinkelige Axen in den beiden letzten Krystallsystemen, über die tetragonale Aufstellung der Feldspathkrystalle, das diklinische System u. a., welche der frische Wind klarer Erkenntniss der physikalischen Verhältnisse wie Wolken davon geweht hat. Dass diese Irrthümer noch immer nicht gänzlich aus der Wissenschaft verbannt sind, hat wohl seinen Grund darin, dass eben gründliche Kenntnisse der Krystallphysik noch nicht die ihnen gebührende Verbreitung besitzen, was vielleicht zum grossen Theil auf den Mangel an Lehrbüchern über diesen Gegenstand als Ursache zurückzuführen sein dürfte.

Sehen wir von jenem Umstande ab, welcher allerdings gerade die fundamentalsten Fragen, den Begriff der Krystallsysteme u. s. f., betrifft, so haben wir in dem Lehrgebäude der Krystallographie, wie es K. F. Naumann mit wahrhaft divinatorischem Geiste aufgestellt hat, ein System, welches, nach Einführung jener jetzt nothwendigen Aenderungen*) der Grundbegriffe, klar und consequent den inneren Zusammenhang der Gesetzmässigkeiten der Krystallformen erkennen lässt, in welchem namentlich die Hemiëdrie eine Behandlung erfährt, die durch alle einschlagenden physikalisch-krystallographischen Untersuchungen als der wahre Ausdruck

---

*) Hierzu gehören auch einige Aenderungen der auf jene irrthümliche Auffassung der Axen gegründeten Nomenclatur, zu welchen der Verf., jedoch nur in den allerdringlichsten Fällen, Vorschläge gemacht hat.

der Thatsachen erkannt und bestätigt worden ist. Zu der inneren Nothwendigkeit, die daher vorlag, das Naumann'sche System beizubehalten, tritt nun noch der äussere Umstand hinzu, dass die auf dasselbe gegründeten Bezeichnungen der Krystallformen in Deutschland die verbreitetsten sind. Sie verdienen diese Verbreitung durch ihre leichte Verständlichkeit und ihre Anschaulichkeit, indem sie nicht einzelne Flächen betreffen, sondern die ganze Form, den Complex zusammengehöriger Flächen, in einem Zeichen zusammenfassen. Das sind die Gründe, aus denen diese Bezeichnungsweise wohl die einzige sein wird, welche neben der ihr in vielen Beziehungen überlegenen Whewell'schen oder Miller'schen noch längere Zeit Bestand haben wird. Letztere, die Bezeichnung durch die Indices, hat für jede einzelne Fläche ein besonderes Zeichen, ein Umstand, der die Anschauung einer aus mehreren Flächen bestehenden Form für den Anfänger nicht erleichtert, der aber ganz unentbehrlich ist für die Berechnung. Dazu kommt, dass gerade W. H. Miller es ist, welcher vorzüglich zu jener Richtigstellung der Grundbegriffe der Wissenschaft beigetragen hat, und dass daher fast alle Krystallographen, welche sich eingehend mit Krystallphysik beschäftigen, die Miller'sche Bezeichnung benutzen. Es schien daher dem Verfasser geboten, den Anfänger mit beiden genannten Bezeichnungsmethoden gleichzeitig bekannt und vertraut zu machen.

Den erörterten Grundsätzen entsprechend sind nun die einzelnen Krystallsysteme nach der Reihenfolge ihrer Symmetrie, und bei jedem der Zusammenhang mit den physikalischen Verhältnissen eingehend behandelt worden. Als eine Zugabe, welche wohl namentlich studirenden Chemikern nicht unwillkommen sein dürfte, sind bei jeder Abtheilung eines Systems die wichtigsten, unorganischen und organischen Körper, welche derselben angehören, als Beispiele kurz besprochen, durch Abbildung der häufigsten Krystallform erläutert, und ihre hervorragendsten physikalischen Eigenschaften angegeben. Wir besitzen allerdings in Rammelsberg's »Handbuch der krystallographischen Chemie, Berlin 1855 und Suppl. 1857« eine Zusammenstellung der vorhandenen Messungen künstlich dargestellter Körper; aber 1) fehlt uns eine solche für die seither veröffentlichten sehr zahlreichen Untersuchungen, 2) enthält jenes Buch Nichts über die nach dem jetzigen Standpunkt der Wissenschaft doch unentbehrlichen, physikalischen Eigenschaften. Der Verfasser ist daher schon seit Jahren mit den Vorarbeiten zu einer »chemischen Krystallographie«, der

kritischen Zusammenstellung des massenhaften, auf diesem Gebiete gesammelten Materials beschäftigt, aber der Umstand, dass zahlreiche krystallographische Untersuchungen so lange als fast werthlos betrachtet werden müssen, bis sie durch optische Bestimmungen controlirt worden sind, wird die Vollendung dieses Werkes wohl noch auf eine Reihe von Jahren verzögern. Mögen die hier als Beispiele gegebenen kurzen Beschreibungen der Krystalle der wichtigsten Stoffe als ein Vorläufer jener grösseren Arbeit angesehen werden. Bei diesen Beschreibungen ist, wenn es sich nicht um Mineralien handelte, die Stellung, welche sie in Rammelsberg's krystallographischer Chemie haben, bei Mineralien die vom Verfasser in seiner »tabellarischen Zusammenstellung der Mineralien nach ihren chemisch-krystallographischen Beziehungen, Braunschweig 1874« gewählte Aufstellung beibehalten worden. Ferner wurden meist literarische Nachweisungen hinzugefügt, welche den Anfänger in die Kenntniss der wichtigeren Specialarbeiten einführen sollen; es ist dabei besonders Rücksicht genommen auf diejenigen Abhandlungen und Werke, welche Zusammenstellungen physikalischer Untersuchungen einer grösseren Zahl krystallisirter Körper oder allgemeinere Darstellungen liefern, unter denen namentlich zu nennen sind:

Des Cloizeaux, 2 Aufsätze: Mém. sur les propriétés biréfring. in den Annales des mines, 5. série, t. XI, 1857 und t. XIV, 1858;

Ders., Mém. s. l'emploi du microsc. polaris. et s. l'étude des propr. opt. pp. Paris 1864 (auch in Poggendorff's Annal. d. Phys., Bd. 126);

Ders., Nouvelles Recherches s. l. propriétés optiques des cristaux, Paris 1867;

Grailich und von Lang, Untersuchungen über die physik. Verh. krystallis. Körper, Sitzgsber. d. Wien. Akad. d. Wiss., math. naturw. Kl., Bd. 27, 32 und 33, denen sich dann eine Reihe Detailarbeiten von v. Lang, Grailich, Schrauf u. A. in ders. Zeitschr. anschliessen.

Dagegen ist bei den allgemeinen krystallographischen Erläuterungen gewöhnlich nicht hinzugefügt, welcher Forscher zuerst diese oder jene Auffassung gelehrt, diese Definition gegeben u. s. w.; es geht aus Obigem hervor, dass es sich hierbei wesentlich nur um die Namen: Naumann, Miller und von Lang handeln konnte. Wo der Verfasser eine Definition anders gefasst, eine Darstellung anders entwickelt hat, als es bisher geschehen, wird dies der Fachmann leicht erkennen, und für den Anfänger dürfte die Autorschaft dieser Aenderungen kaum ein Interesse haben.

Was die Methoden zur Berechnung der Krystalle betrifft, so sind diejenigen, von Miller entwickelten, mittelst sphärischer Trigonometrie gegeben. Obgleich also zu ihrem Verständniss weiter Nichts nöthig ist, als die Kenntniss der Formeln, durch welche man aus drei Stücken eines sphärischen Dreiecks die anderen zu berechnen im Stande ist, hat sie doch der Verfasser so eingerichtet, dass diejenigen, welche sich nicht damit beschäftigen wollen, sie überschlagen können, ohne den Zusammenhang zu stören (ausserdem sind diese Abschnitte durch kleineren Druck unterschieden). Das hier für die Rechnungen Gegebene (incl. der Beispiele in der III. Abth.) dürfte genügen, einen Anfänger, welchem mathematische Behandlung überhaupt keine grosse Schwierigkeit macht, in den Stand zu setzen, sich in jedem einzelnen Falle selbst zu helfen; wer jedoch eine ausführlichere Anleitung zu haben wünscht, dem ist namentlich zu empfehlen das soeben in 1. Hälfte erschienene Werk von C. Klein, Einleit. in die Krystallberechnung, Stuttgart 1875.

Da es bisher noch kein Werk giebt, welches eine Anleitung zur selbstständigen Anstellung krystallographischer Bestimmungen liefert, während es doch für die Fortschritte der chemischen Krystallographie in hohem Grade wünschenswerth ist, dass möglichst viele Chemiker solche auszuführen im Stande sind, so glaubte der Verfasser einem Wunsche Mancher entgegenzukommen, wenn er die von ihm benutzten und bewährt gefundenen Methoden, die Apparate und ihre Anwendung, in einer besonderen III. Abtheilung behandelte und durch einige Beispiele erläuterte. Dieser Theil enthält ferner noch die Besprechung der Projectionsmethoden, ganz kurz die der sogen. Quenstedt'schen (weil wohl Jeder, der die so viel elegantere Miller'sche näher kennen gelernt hat, diese vorziehen wird), ausführlich die der sphärischen Projection, ferner einen Abschnitt über Zeichnung der Krystalle und einen Anhang über die von Des Cloizeaux benutzte Levy'sche Bezeichnungsweise.

Einen grossen Werth hat der Verfasser auf die Illustrationen gelegt, und hierbei ist er von der verehrlichen Verlagsbuchhandlung des Herrn Dr. Wilh. Engelmann in einer Weise unterstützt worden, welche ihn verpflichtet, Demselben seinen aufrichtigsten Dank für die wahrhaft glänzende Ausstattung des Werkes hier auszusprechen. Die zahlreichen Holzschnitte, zu welchen die Zeichnungen vom Verfasser zum kleineren Theil nach den besten vorhandenen copirt, zum grösseren Theil neu construirt wurden, sind in dem bekannten Atelier des Herrn Flegel, die beiden

lithographirten Tafeln in dem des Herrn J. G. **Bach** in Leipzig in einer in Bezug auf künstlerische Darstellung, wie auf gewissenhafte Genauigkeit vollendeten Weise ausgeführt worden. Die Buntdrucktafel ist unter den Augen des Verfassers in dem Atelier des Herrn G. **Fischbach** in Strassburg gefertigt worden, und dürfte an Schönheit der Ausführung, wie an treuer Wiedergabe der Natur, wohl von keiner bisher erschienenen ähnlichen Arbeit übertroffen werden. Schliesslich hat der Verfasser auch an dieser Stelle seinen Dank auszusprechen Herrn Dr. A. **Arzruni**, welcher ihn bei der Ausführung einer Anzahl Zeichnungen, wie bei den Correcturen, in freundlichster Weise unterstützt hat.

Möge das vorliegende Werk die darauf verwendete Mühe dadurch lohnen, dass es der Krystallographie neue Jünger zuführt, Interesse für dieselbe in weiteren Kreisen erwecke und vielleicht auch Einiges zur Klärung der Ansichten innerhalb dieser Wissenschaft beitrage.

Strassburg i. Els., Nov. 1875.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichniss.

I. Abtheilung.

Die physikalischen Eigenschaften der Krystalle.

Die Einwirkung mechanischer Kräfte auf die Krystalle. Die Gesetze der Schwingungsbewegungen.

Die optischen Eigenschaften der Krystalle.

Die thermischen Eigenschaften der Krystalle.

Die magnetischen und electrischen Eigenschaften der Krystalle.

II. Abtheilung.

Die geometrischen Eigenschaften der Krystalle.

A. Krystalle mit drei Hauptaxen.

(Physikalisch-isotrope Krystalle.)

I. Das reguläre Krystallsystem.

B. Krystalle mit einer Hauptaxe.

(Physikalisch einaxige Krystalle.)

II. Das hexagonale Krystallsystem.

III. Das tetragonale Krystallsystem.

Die physikalischen Eigenschaften der hexagonalen und tetragonalen Krystalle.

C. Krystalle ohne Hauptaxe.

(Physikalisch zweiaxige Krystalle.)

IV. Das rhombische Krystallsystem.

Hemiëdrische Formen des rhombischen Systems.

V. Das monosymmetrische Krystallsystem.

VI. Das asymmetrische Krystallsystem.

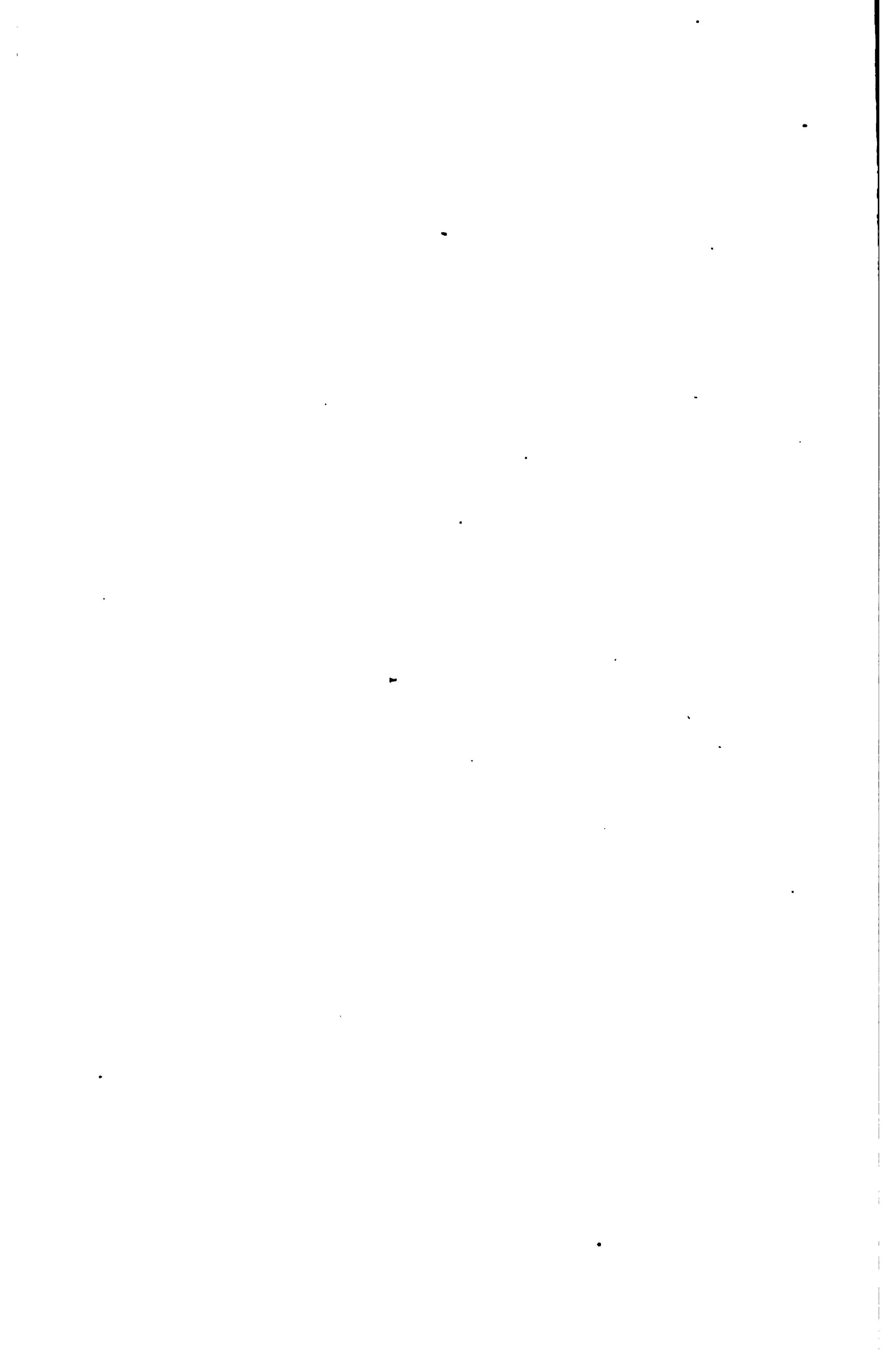
Ueber die Ausbildung und die Verwachsungen der Krystalle.

III. Abtheilung.

Die Apparate und Methoden zu krystallographisch-physikalischen Untersuchungen.

I. ABTHEILUNG.

DIE PHYSIKALISCHEN EIGENSCHAFTEN DER KRYSTALLE.



§. 1. **Definition der physikalischen Krystallographie.** Die Mineralogie ist die Kenntniss der physikalischen Eigenschaften der in der Natur vorkommenden festen Substanzen; sie ist ein Theil der descriptiven Chemie, d. h. der Kenntniss der physikalischen Eigenschaften aller Körper, auch der künstlich dargestellten. Die Methoden, welche dieselbe zur Erforschung jener Eigenschaften benutzt, sind selbstverständlich physikalische; demnach ist die Physik eine ihrer wichtigsten Hülfswissenschaften. Da allen festen Körpern von bestimmter chemischer Zusammensetzung die Fähigkeit zukommt, in bestimmten, ebenflächig begrenzten Formen (krystallisirt) aufzutreten, — da ferner die Krystallform eines Stoffes diejenige seiner Eigenschaften ist, durch welche er im Allgemeinen am sichersten wieder erkannt werden kann, — so ist diejenige geometrische Disciplin, welche sich mit den regelmässigen Formen der festen Körper beschäftigt, die Krystallographie, eine nicht minder unentbehrliche Hülfswissenschaft der Mineralogie, als die Physik.

Physik und Krystallographie treten nun in eine weitere Beziehung zu einander dadurch, dass die äusseren Formen der Krystalle in einem streng gesetzmässigen Zusammenhang stehen mit den physikalischen Eigenschaften ihrer Masse, so zwar, dass diejenigen Richtungen eines Krystalls, nach welchen seine geometrische Form eine verschiedene ist, auch solche sind, in denen seine physikalischen Eigenschaften (z. B. die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes) sich unterscheiden. Durch diesen letzteren Umstand bieten die Krystalle besonders complicirte physikalische Probleme dar, deren Lösung der Gegenstand zahlloser theoretischer und experimenteller Untersuchungen von Seiten vieler der bedeutendsten Physiker gewesen ist. In Folge dessen sind die physikalischen, ganz besonders aber die optischen Eigenschaften der Krystalle, sowie auch die Gesetze des Zusammenhanges, in welchem jene Eigenschaften mit den Krystallformen stehen, bereits so weit bekannt, dass sie dazu benutzt werden können, die Krystallform in solchen Fällen zu bestimmen, in denen die rein geometrische Bestimmung besonders erschwert oder ganz unmöglich gemacht ist. So kann man z. B. sehr häufig mit Hülfe der optischen Eigenschaften an einem höchstens 1 Quadratmillimeter grossen durchsichtigen Splitter eines Krystalles, an welchem keine Spur der äusseren Form mehr erhalten ist, mit Sicherheit bestimmen, welcher Abtheilung von Krystallformen der ganze Krystall angehörte. Es leuchtet hiernach ein, wie grosse praktische Wichtigkeit für die Krystallo-

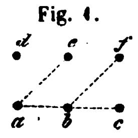
graphie die genaue Kenntniss des gesetzmässigen Zusammenhanges zwischen Krystallform und physikalischen Eigenschaften besitzt. Nicht minder wichtig ist aber diese Kenntniss in theoretischer Beziehung für die Krystallographie, indem nämlich deren Gesetze sich meist als natürliche Consequenzen der physikalischen Eigenschaften der Krystalle ergeben. Es ist demnach die Behandlung der geometrischen Eigenschaften der Krystalle nicht mehr zu trennen von der ihrer physikalischen, und beide in ihrem gesetzmässigen Zusammenhange darzustellen, ist der Gegenstand der physikalischen Krystallographie.

Die Einwirkung mechanischer Kräfte auf die Krystalle. Gesetze der Schwingungsbewegungen.

§. 2. **Dichte, Elasticität, Cohäsion, Härte.** Die allgemeine Eigenschaft der Zusammendrückbarkeit der festen Körper zeigt, dass dieselben gedacht werden müssen als zusammengesetzt aus von einander abstehenden, kleinsten Theilchen, Molekülen, deren Abstand der Gleichgewichtslage der zwischen ihnen existirenden anziehenden und abstossenden Kräfte entspricht. Dieser Abstand ist bei einem und demselben Körper veränderlich mit der Temperatur desselben; diese Aenderung des Abstandes seiner kleinsten Theilchen, bewirkt durch veränderte Temperatur, Druck o. a., nennt man Aenderung der Dichte desselben. Die physikalischen Eigenschaften der Krystalle führen auf die Annahme, dass die Moleküle derselben in regelmässiger Weise netzförmig angeordnet sind; alsdann muss natürlich der Abstand zweier benachbarter Theilchen nach verschiedenen Richtungen ein verschiedener sein*).

Derjenige Abstand der Moleküle von einander, in welchem ihre gegenseitige Anziehung und Abstossung sich das Gleichgewicht halten, ist unter bestimmten Verhältnissen nur ein ganz bestimmter. Versucht man, diesen Abstand zu erweitern (den Körper auszudehnen), so tritt ein Widerstand desselben auf, demzufolge die Theilchen ihre frühere Lage, der ganze Körper seine frühere Gestalt, wieder anzunehmen bestrebt sind. Bei grösserem Abstand der Theilchen, als sie dem Gleichgewicht von Anziehung und Abstossung entspricht, ist also die erstere Kraft die überwiegende. Ein gleicher Widerstand zeigt sich, wenn man versucht, die Moleküle einander zu nähern; in diesem Falle müssen also die abstossenden Kräfte die anziehenden überwiegen. Beide Arten der zwischen den kleinsten Theilchen wirkenden Kräfte müssen sich also mit dem Abstand jener nach verschiedenen Gesetzen ändern.

Fig. 1.



*) Betrachten wir z. B. mehrere benachbarte Massentheilchen in einer Ebene, welche so geordnet sind, wie in Fig. 1, so ist der Abstand der beiden benachbarten Theilchen *a* und *e* ein anderer, als der von *a* und *b*.

Die allgemeine Eigenschaft der Körper, einer Aenderung ihrer Dichte, d. h. des Abstandes ihrer Moleküle, einen Widerstand entgegenzusetzen, nennt man ihre Elasticität. Die Erfahrung lehrt, dass, wenn ein Körper durch ein Gewicht dilatirt oder comprimirt wird, die eingetretene Verlängerung oder Verkürzung proportional ist dem die Veränderung bewirkenden Gewichte und der Länge des Körpers, umgekehrt proportional seinem Querschnitt, und ausserdem abhängt von der Beschaffenheit der Substanz selbst. Diese letztere Abhängigkeit wird ausgedrückt durch das Verhältniss eines Gewichtes P zu der Verlängerung δ, welche ein Stab der betreffenden Substanz von der Einheit der Länge und der Einheit des Querschnittes durch Anhängen desselben Gewichtes erfährt. Diese Verlängerung ändert sich mit dem wirkenden Gewichte diesem proportional, also bleibt das Verhältniss beider

$$e = \frac{P}{\delta}$$

constant (das Gewicht $2P$ giebt die Verlängerung 2δ, das Verhältniss $\frac{2P}{2\delta}$ ist aber gleich $\frac{P}{\delta}$ u. s. f.) für eine und dieselbe Substanz, und heisst deren Elasticitätscoëfficient*). Dieser ist also das Maass des Widerstandes, welchen diese Substanz einer Aenderung des Abstandes ihrer kleinsten Theilchen entgegensetzt.

Die Verlängerung eines Körpers nimmt aber nur bis zu einer gewissen Grenze (Elasticitätsgrenze), dem Gewichte proportional, zu; werden seine Theilchen noch weiter von einander entfernt, so kehren sie nicht mehr in ihre frühere Gleichgewichtslage zurück, sondern nehmen eine neue an; es entstehen dauernde Formänderungen des Körpers. Die Weite der Elasticitätsgrenze ist eine sehr verschiedene für verschiedene Stoffe (z. B. Kautschuk und Blei). Die Annahme neuer Gleichgewichtsgrenzen findet aber ebenfalls nur bis zu einer gewissen Grenze, der Festigkeitsgrenze, statt; jenseits dieser entsteht eine dauernde Trennung der Theilchen des Körpers von einander. Den Widerstand, welchen der Körper der Trennung seiner Theilchen entgegensetzt, nennt man seine Cohäsion.

In den nicht krystallisirten, sogenannten amorphen Körpern, z. B. in einem Stück Glas, sind alle diese von der Elasticität abhängigen Eigenschaften (Grösse des Elasticitätscoëfficienten, der Elasticitätsgrenze, Cohäsion) nach allen Richtungen innerhalb eines und desselben Stückes absolut gleich. Dies ist nicht der Fall bei den Krystallen. Hiermit steht die S. 4 erwähnte Annahme über die Regelmässigkeit der Lagerung der Krystallmoleküle in Zusammenhang, denn dieselbe ist nur möglich, wenn man zugleich annimmt, dass die kleinsten Theilchen nach verschiedenen Richtungen einander verschieden stark anziehen und abstossen. Alsdann müssen aber auch alle

*) Setzt man $\delta = 1$, so wird $e = P$, d. h. der Elasticitätscoëfficient ist gleich demjenigen Gewichte, welches die Länge des Körpers verdoppeln würde, wenn auch dann noch die Verlängerung proportional dem Gewichte bliebe.

Elasticitätsverhältnisse in den Krystallen in verschiedenen Richtungen verschieden, in allen Geraden gleicher Richtung jedoch gleich beschaffen sein.

Directe Messungen des Elasticitätscoëfficienten eines und desselben Krystalls nach verschiedenen Richtungen haben denn auch in unzweideutiger Weise gezeigt, dass diese Zahl bei einem Krystall zwar in derselben Richtung stets denselben Werth, in verschiedenen Richtungen dagegen verschiedene Werthe besitzt.

Da die Elasticität nun gewissermassen die Fundamentaleigenschaft eines Körpers ist, mit welcher alle übrigen physikalischen Eigenschaften desselben im Zusammenhange stehen, so können wir einen Krystall am besten definiren: als einen festen Körper, dessen Elasticität nach allen parallelen Richtungen gleich, nach verschiedenen dagegen verschieden ist. Diese Definition sagt zugleich aus, dass der Krystall in physikalischer Beziehung noch ein solcher ist, wenn auch seine äussere Form verändert, z. B. durch Schleifen ihm eine andere gegeben worden ist.

Ebenso, wie der Elasticitätscoëfficient, ist auch die Cohäsion der Theilchen eines Krystalls mit der Richtung wechselnd, und diese Eigenschaft ist sehr leicht an denselben zu erkennen. Nach derjenigen Richtung nämlich, oder, wenn deren mehrere vorhanden sind, nach den Richtungen, in welchen die Cohäsion ihr Minimum erreicht, findet am leichtesten eine Trennung der Theilchen statt, und zwar geschieht diese Trennung in allen parallelen Geraden gleich leicht, so dass, wenn durch Zug in jener Richtung der Krystall zerrissen wird, senkrecht zu derselben eine ebene Trennungsfläche entsteht, welche um so leichter und vollkommener darzustellen ist, je mehr die Cohäsion senkrecht dazu, abweicht von derjenigen in andern Richtungen. Diese Eigenschaft, nach ebenen, krystallographisch bestimmten Flächen mehr oder weniger leicht getrennt werden zu können, eine Eigenschaft, welche sonach nur die Krystalle besitzen können, heisst Spaltbarkeit. Man stellt eine Spaltungsfläche gewöhnlich in der Weise dar, dass man in der Richtung derselben ein Messer auf den Krystall aufsetzt und auf dasselbe einen kurzen Schlag mit einem kleinen Hammer ausführt. Die als Maass der Cohäsion zu betrachtende Zugfestigkeit, d. h. das Gewicht, welches nöthig ist, um Prismen, in abweichenden Richtungen aus dem Krystall geschnitten, zu zerreissen, ist bei den am vollkommensten spaltbaren Krystallen in differirenden Richtungen ausserordentlich verschieden; so ist jenes Gewicht z. B. bei dem Steinsalz, senkrecht zur Spaltbarkeit, also im Minimum, weniger als $^1/_3$ von der Zugfestigkeit desselben Stoffes in derjenigen Richtung, in welcher sie ihr Maximum erreicht (s. d. Nähere darüber in §. 43).

Ausser den Spaltungsflächen existiren in den Krystallen noch andere Ebenen, ausgezeichnet dadurch, dass parallel denselben ein Gleiten der Theilchen an einander mit besonderer Leichtigkeit stattfinden kann, so dass, wenn der Krystall z. B. gepresst wird, die Theilchen desselben sich längs einer solchen Ebene gegen einander verschieben, zuweilen sogar eine voll-

ständige Trennung nach derselben stattfindet. Diese Ebenen wurden von Reusch, welcher zuerst auf ihre Existenz hinwies (Poggendorff's Annalen der Physik, 132. Bd. 441), Gleitflächen genannt. Sie entstehen bei gewissen Krystallen als Trennungsflächen, wenn man auf deren Oberfläche die Spitze eines Stahlconus (besonders eignet sich hierzu der Körner der Metallarbeiter) aufsetzt und durch einen kurzen Schlag mit einem Hämmerchen eintreibt. Man erhält durch diese sogenannte Körnerprobe in einer oder mehreren Richtungen gradlinige Sprünge, von der Schlagstelle ausstrahlend, welche gewöhnlich den Gleit-, nicht den Spaltungsflächen entsprechen (das Nähere darüber folgt bei Besprechung der einzelnen, in dieser Beziehung besonders studirten Körper: Steinsalz, Kalkspath, Gyps).

Endlich zeigt sich die Verschiedenheit der Cohäsion mit der Richtung im Krystall auch durch die Härte, d. h. den Widerstand, welchen seine Oberfläche dem Ritzen durch einen härteren Körper entgegensetzt. Diese ergiebt sich nämlich verschieden in verschiedenen Richtungen bei allen Krystallen, und zwar um so mehr, je verschiedener die Cohäsion in verschiedenen Richtungen ist, d. h. je vollkommnere Spaltbarkeit der Krystall besitzt. Wird eine Fläche desselben, zu welcher normal eine oder mehrere Spaltungsebenen existiren, nach verschiedenen Richtungen geritzt, so ergiebt sich die Härte am geringsten beim Ritzen parallel einer solchen Spaltungsebene. Exner (»Untersuchungen über die Härte an Krystallflächen, Wien 1873«) hat dies durch eine grosse Reihe von Messungen nachgewiesen. Dieselben sind so angestellt, dass eine ebene Krystallfläche unter einer darauf ruhenden, mit Gewichten belasteten Spitze fortgezogen wurde (der Krystall lag zu diesem Zwecke auf einem kleinen Wagen) und man das niedrigste Gewicht bestimmte, welches eben noch die Spitze den Krystall ritzen liess. Nimmt man die Härte diesen Gewichten proportional, und trägt sie von einem Punkte aus auf den Richtungen des Ritzen's auf, so geben die Endpunkte dieser Radien die Härtecurve*) der betreffenden Krystallfläche.

§. 3. **Begriff der Schwingungsbewegung.** Die physikalischen Einwirkungen auf die Körper bestehen im Allgemeinen in Bewegungen derselben oder ihrer Moleküle. Wird ein Theilchen, durch anziehende Kräfte von anderen festgehalten, durch einen Impuls aus seiner Gleichgewichtslage entfernt, so bewegt es sich in Folge jenes Impulses mit einer bestimmten Geschwindigkeit, welche indess, da die anziehenden Kräfte der übrigen Theilchen fortdauernd auf dasselbe wirken, immer mehr abnimmt und in einem gewissen Abstand gleich Null wird, worauf das Theilchen, da nunmehr die anziehenden Kräfte immer stärker überwiegen, mit beschleunigter Geschwindigkeit in seine ursprüngliche Ruhelage zurückkehrt. Hier langt das Theil-

---

*) Stehen z. B. senkrecht zu der untersuchten Fläche zwei, sich unter 90° schneidende Spaltungsebenen, so hat die Härtecurve die Gestalt einer vierseitigen Rosette, welche in den Richtungen der Spaltungsflächen vier Minima, unter 45° dazwischen vier Maxima besitzt.

chen, da die Beschleunigung auf dem Rückwege ganz ebenso bewirkt wurde, als die Verzögerung auf dem Hinwege, mit derselben Geschwindigkeit an, als diejenige war, mit welcher es sich davon entfernt hatte, verhält sich also ebenso, als ob es einen Impuls von derselben Beschaffenheit, aber von der entgegengesetzten Richtung, empfangen habe, d. h. es bewegt sich ganz ebenso, wie vorhin, nach der entgegengesetzten Seite von der Ruhelage mit abnehmender Geschwindigkeit, zurück mit zunehmender, u. s. f. Eine solche hin- und hergehende Bewegung nennt man eine Schwingung. Ihre Weite, also der während derselben von dem Theilchen zurückgelegte Weg, heisst die Schwingungsamplitude, der Schwingungszustand des Theilchens in einem bestimmten Moment, gegeben durch den Abstand von der Ruhelage, durch die Geschwindigkeit und die Richtung der Bewegung, heisst die Phase, endlich die Zeit, welche zur Ausführung einer ganzen Schwingung d. h. bis zur nächsten Wiederkehr derselben Phase vergeht, die Schwingungsdauer. Die Amplitude hängt nur ab von der Kraft, welche die Verschiebung aus der Ruhelage verursacht; dieser ist sie proportional, also ist sie das Maass dieser Kraft, welche man als Intensität der Schwingungsbewegung bezeichnet. Da es sich bei den im Folgenden zu betrachtenden Schwingungserscheinungen immer nur um sehr kleine Amplituden handelt, so kann man annehmen, dass die Kraft, welche die Theilchen nach ihrer Ruhelage zurückzieht, proportional dem Abstande von dieser Ruhelage sei. Alsdann wird ein Theilchen, welches doppelt so weit aus seiner Gleichgewichtslage entfernt ist, mit doppelter Kraft nach dieser zurückgezogen, d. h. es muss die doppelte Kraft des ersten Impulses aufgewendet werden, um die Amplitude zu verdoppeln. Da demnach die Amplitude mit der Anfangsgeschwindigkeit proportional wächst, so wird bei dem angezogenen Beispiel der doppelte Weg mit der doppelten Geschwindigkeit, also in derselben Zeit zurückgelegt werden, d. h. die Dauer einer Schwingung ist unabhängig von ihrer Amplitude.

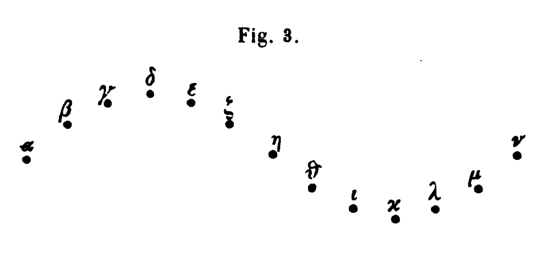
Befindet sich eine gradlinige Reihe von kleinsten Theilchen α, β, γ ... (Fig. 2), welche wir als materielle Punkte betrachten wollen, in Ruhe, so halten sich alle zwischen ihnen wirkenden anziehenden und abstossenden Kräfte das Gleichgewicht. Wird α durch einen Impuls aus seiner Ruhelage seitlich entfernt, so ist dieses Gleichgewicht gestört, es überwiegt die Anziehung zwischen α und β die Abstossung, die Theilchen müssen streben, sich einander zu nähern, α wird in seiner neuen Stellung α' nicht nur von β zurückgezogen, sondern dieses wird auch nach α' hingezogen werden. Gegen die Bewegung von β nach dieser hin wirkt aber die Anziehung von γ, so dass β vermöge dieser beiden Anziehungen von α' und von γ, eine mittlere Bewegungsrichtung, nämlich die parallel $\alpha\alpha'$, einschlägt. In derselben Weise wird hierauf das Theilchen γ durch die Bewegung von β veranlasst, sich nach derselben Richtung hin zu bewegen,

Fig. 2.

α β γ δ ε ζ α'

u. s. f. alle folgenden. Wenn die Bewegung sich bis zu einem bestimmten Theilchen ν Fig. 3., welches eben seine Bewegung beginnt, fortgepflanzt hat, so bildet in diesem Moment die vorher gradlinige Punktreihe eine Welle, bestehend aus einem Wellenberg und einem gleich langen Wellenthal. Eine derartige Bewegung nennt man eine Wellenbewegung; den Abstand $\alpha\nu$, bis zu welchem sich dieselbe fortgepflanzt hat, während das erste Theilchen eine ganze Schwingung ausführte, eine Wellenlänge, und bezeichnet sie mit λ. In einer solchen Welle sind alle Phasen der Bewegung neben einander vorhanden, welche ein und dasselbe Theilchen während der Dauer einer Schwingung nach einander besitzt Alle Punkte, welche um eine halbe Wellenlänge von einander abstehen, befinden sich in entgegengesetztem Schwingungszustand, ihre Phasendifferenz ist gleich $\frac{1}{2}\lambda$.

Fig. 3.

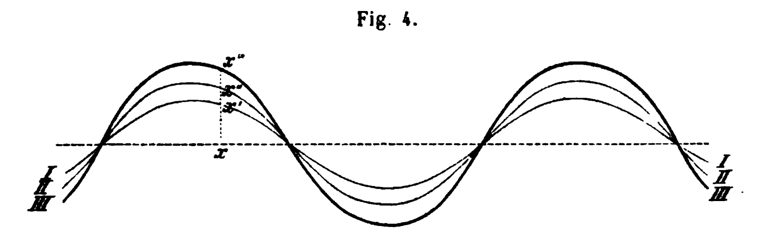


Hat sich die Bewegung durch eine grössere Reihe von Punkten fortgepflanzt, so bilden diese nunmehr einen Wellenzug, der in eine Anzahl Wellenlängen getheilt erscheint, welche gleich lang sind, wenn die Verhältnisse auf der ganzen Punktreihe, also auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Bewegung, dieselben bleiben. Die Bahn, in welcher sich die einzelnen Theilchen bewegen, hängt ab von der Richtung, in der das erste aus seiner Ruhelage entfernt wurde. Ist diese Richtung, bei gradliniger Bewegung, parallel der Punktreihe, so werden sich die Theilchen abwechselnd nähern und entfernen; dann nennt man die Schwingung longitudinale. Bildet die Schwingungsrichtung mit der Fortpflanzungsrichtung einen Winkel (in dem obigen Beispiel einen rechten), so heissen die Schwingungen transversale.

§. 4. Interferenz der Wellenbewegungen. Wenn ein Theilchen von mehreren Wellenbewegungen zugleich ergriffen wird, so führt es eine Bewegung aus, welche nach dem Gesetz des Parallelogramms der Kräfte aus den einzelnen Bewegungen sich zusammensetzt; es gelangt also nach einer bestimmten Zeit an einen Punkt, wohin es die einzelnen Kräfte gebracht haben würden, wenn sie nach einander ebenso lange gewirkt hätten. Die Zusammensetzung mehrerer solcher Partialbewegungen zu einer resultirenden nennt man Interferenz der Wellenbewegungen. Der einfachste Fall der Interferenz besteht darin, dass die sich zusammensetzenden (interferirenden) Wellen sich in derselben Richtung fortpflanzen, und ihre Schwingungen senkrecht dazu, und in derselben Ebene stattfinden. Gehen die Wellenbewegungen von verschiedenen Punkten der Reihe aus, so ist die Phase, mit der sie an einem Punkte zur Interferenz gelangen, im Allgemeinen verschieden. Sind die Ausgangspunkte der Bewegung aber genau ein Vielfaches einer

ganzen Wellenlänge von einander entfernt, so interferiren die Wellenzüge an jedem Punkte mit gleicher Phase. Bezeichnet in Fig. 4. *I* den Zustand, in welchem die Punktreihe in einem bestimmten Augenblicke sich befinden würde, wenn die erste der interferirenden Wellenbewegungen allein vorhanden wäre, *II* denjenigen, wenn die zweite allein wirkte, so ist *III* der

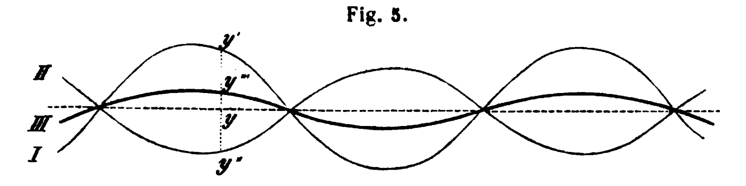
Fig. 4.



Zustand der Punktreihe in Folge der aus beiden resultirenden Wellenbewegung, denn irgend ein Punkt x würde vermöge der ersten Theilbewegung sich bis x', vermöge der zweiten bis x'' bewegt haben, also muss er sich nunmehr in einem Abstande x''' von der Ruhelage befinden, welcher gleich ist der Summe der Abstände, welche die einzelnen Bewegungen hervorgebracht hätten. Es resultirt aus der Interferenz also eine Wellenbewegung von derselben Phase, deren Amplitude die Summe der Schwingungsweiten der sich zusammensetzenden Bewegungen ist.

Kommen zwei interferirende Wellenbewegungen von zwei Punkten her, welche einen Abstand von $\frac{1}{2}\lambda$ oder einem ungraden Vielfachen dieser Grösse haben, so wirken sie auf jedes von ihnen gleichzeitig ergriffene Theilchen in entgegengesetztem Sinne; der Punkt y in Fig. 5. z. B. würde durch die Bewegung *I* allein nach oben bis y' getrieben worden sein, dagegen bis y'' nach unten, wenn *II* allein gewirkt hätte, folglich muss sein Abstand yy'''

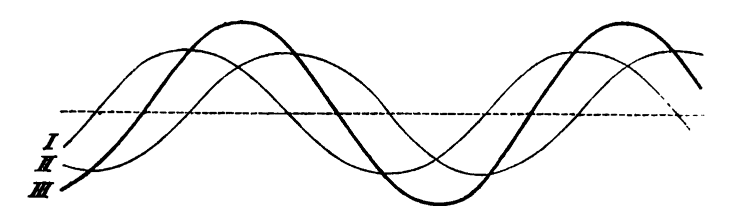
Fig. 5.



von der Ruhelage nach Einwirkung der Partialbewegungen die Differenz beider Abstände sein. Es resultirt also aus der Interferenz zweier Wellenbewegungen von $\frac{1}{2}\lambda$ Phasendifferenz eine einzige Wellenbewegung (*III* in Fig. 5.), deren Phase gleich derjenigen der stärkeren der beiden sich zusammensetzenden Wellenbewegungen, und deren Amplitude gleich der Differenz der Schwingungsweiten derselben ist. In dem besonderen Falle, dass die beiden interferirenden Wellenbewegungen gleiche Amplituden haben, ist diejenige der resultirenden $= 0$, d. h. die beiden Bewegungen vernichten sich gegenseitig vollständig.

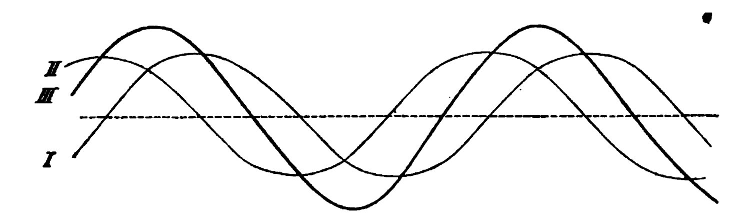
Ist die Phasendifferenz eine andere, als 0 oder $\frac{1}{2}\lambda$, so resultirt durch Interferenz eine Wellenbewegung von anderer Phase und anderer Amplitude.

Fig. 6.



Ist z. B. die Verschiedenheit des Schwingungszustandes $= \frac{1}{4}\lambda$, so ist die resultirende Bewegung gegen beide Wellenzüge (wenn sie gleiche Amplitude besitzen) um $\frac{1}{8}\lambda$ verschoben, wie aus Fig. 6 leicht ersichtlich. In der entgegengesetzten Richtung um ebenso viel verschoben ist die durch Interferenz entstehende Welle, wenn die beiden Wellenzüge eine Phasendifferenz von $\frac{3}{4}\lambda$ besitzen, s. Fig. 7.

Fig. 7.



Die Intensität der durch Interferenz erzeugten Wellenbewegungen kann also die verschiedensten Werthe haben, zwischen Null und der Summe der Intensitäten der interferirenden Bewegungen, je nach der Phasendifferenz derselben.

§. 5. **Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegungen.** In einem andern Medium ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegungen eine andere. Die Mechanik lehrt, dass die Geschwindigkeiten, mit denen sich eine Wellenbewegung in zwei verschiedenen Medien fortpflanzt, proportional sind den Quadratwurzeln aus den Elasticitätscoëfficienten $= e$, und umgekehrt proportional den Quadratwurzeln aus ihren Dichtigkeiten $= d$, wenn wir damit das Product der Masse eines kleinsten Theilchens mit der Zahl derselben auf der Längeneinheit bezeichnen. Wenn also c und c' die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in den beiden Substanzen sind, so findet das Verhältniss statt:

$$c : c' = \sqrt{\frac{e}{d}} : \sqrt{\frac{e'}{d'}}.$$

Gehen wir nunmehr von der Betrachtung einer Punktreihe zu der eines Körpers über, d. h. eines mit Massentheilchen erfüllten Raumes, wobei die Theilchen sich in ihren Gleichgewichtslagen befinden, so wird

deren Gleichgewicht gestört werden, sobald eines der Theilchen aus seiner Ruhelage entfernt wird. Wir können das ganze den Raum erfüllende Punktsystem betrachten als zusammengesetzt aus einzelnen Punktreihen, welche radienförmig von jenem, aus seiner Gleichgewichtslage entfernten Theilchen ausgehen. Da dasselbe allen jenen Punktreihen zugleich angehört, so muss, wenn es in oscillirende Bewegung versetzt wird, diese auch auf allen Punktreihen sich fortpflanzen. Nach der Art der Vertheilung der Punkte in dem Raume, d. h. nach der Dichtigkeit derselben auf den verschiedenen Punktreihen, wird die Fortpflanzung eine verschiedene sein. Sind für jede einzelne Punktreihe des Raumes die Abstände der Massentheilchen auf der ganzen Länge gleich, und die Elasticität dieselbe, so ist für diese Richtung der Werth $\sqrt{\frac{e}{d}}$, welcher die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bestimmt, constant; die Wellenbewegung pflanzt sich also mit constanter Geschwindigkeit fort. Die oscillirende Bewegung in einem solchen System kann also unmittelbar betrachtet werden, wie die Schwingungen in einzelnen Punktreihen. Ein solches Medium nennt man ein homogenes. Unter den homogenen Substanzen sind zweierlei zu unterscheiden:

1) Solche Medien, in welchen nicht nur eine Wellenbewegung in jeder beliebigen Richtung sich mit constanter Geschwindigkeit fortpflanzt, sondern diese Geschwindigkeit auch für alle verschiedenen Richtungen dieselbe ist; solche heissen isotrope;

2) Anisotrope oder heterotrope Medien, in welchen sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Wellenbewegung ändert mit der Richtung, in welcher sie sich im Körper bewegt.

Nicht homogen oder heterogen nennen wir dagegen ein Medium dann, wenn eine derartige Bewegung ihre Geschwindigkeit auch in einer und derselben Richtung nicht constant beibehält, sondern an verschiedenen Stellen dieser Richtung sich verschieden schnell fortpflanzt. Wir können einen solchen Körper als aus verschiedenen homogenen Körpern zusammengesetzt betrachten, und eine Wellenbewegung in demselben auf eine solche in homogenen Medien zurückführen, sobald wir wissen werden, welche Aenderung eine derartige Bewegung beim Uebergang aus einem Medium in ein anderes erfährt.

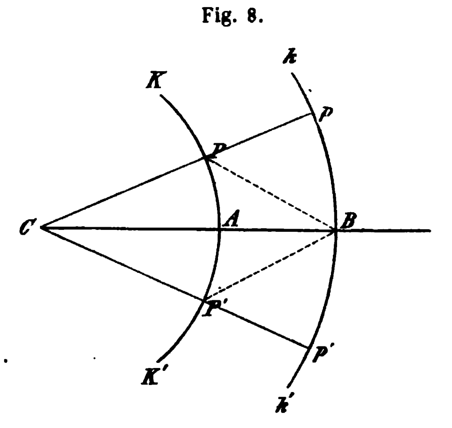
§. 6. **Reflexion und Brechung der Wellen.** Beginnt in einem isotropen Medium an irgend einer Stelle eine Wellenbewegung, so pflanzt sie sich von da nach allen Richtungen gleich schnell fort, es werden demgemäss nach Ablauf einer ganzen Schwingungsdauer T alle Punkte, welche von jenem um eine Wellenlänge λ abstehen, d. h. alle Punkte einer Kugeloberfläche vom Radius λ, gleichzeitig ihre Bewegung beginnen. Nach der Zeit $2T$ werden dies alle auf einer Kugelfläche mit dem Radius 2λ thun, während die vorigen in demselben Moment ihre zweite Schwingung beginnen, u. s. f. Wie sich eine Punktreihe durch die Schwingungsbewegung in eine Anzahl gleicher Wellenlängen theilt, so theilt sich dadurch ein schwin-

gendes Punktsystem in eine Anzahl Kugelschaalen, deren Abstand $= \lambda$ ist, in welchen alle gleichweit von der Grenze zweier Schaalen nach derselben Seite abstehenden Punkte gleiche Oscillationsphase haben. Die Oberfläche, welche alle Punkte enthält, welche gleichzeitig ihre Bewegung beginnen, nennt man die Wellenfläche der von dem ersten Punkte ausgehenden Bewegung.

In isotropen Körpern sind nach dem Gesagten die Wellenflächen stets kugelförmig; in anisotropen dagegen können sie dies nicht sein, und ihre Gestalt wird davon abhängen, nach welchen Gesetzen sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Wellenbewegung mit der Richtung in dem Medium ändert.

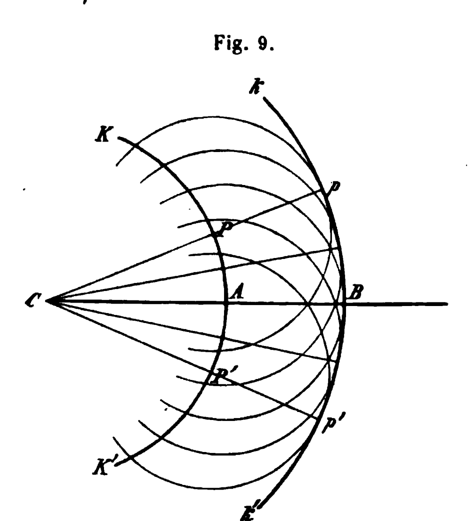
Betrachten wir zunächst nur den einfacheren Fall der isotropen Körper, so wird in einem solchen eine Wellenbewegung, welche von dem Punkte C Fig. 8 ausgegangen ist, nach einer bestimmten Zeit auf der Oberfläche einer Kugel KK' angelangt sein. Jeder Punkt derselben, z. B. P beginnt in diesem Augenblicke seine Bewegung, und da derselbe, ebenso wie der Punkt A, gleichzeitig auf allen möglichen von ihm ausgehenden Punktreihen liegt, so muss er in allen diesen das Gleichgewicht stören, d. h. es muss von ihm nach allen Seiten eine gleiche Wellenbewegung ausgehen. Da also jeder bewegte Punkt eines solchen Systems selbst wieder Mittelpunkt einer neuen Wellenfläche ist, so wird nach dem Punkte B auf einer Kugelfläche kk', deren Punkte später ihre Bewegung beginnen, nicht nur Bewegung von A aus gelangen, sondern auch von allen andern Punkten der ersten Kugelfläche KK'. Um die Wirkung, welche diese sämmtlichen Bewegungen auf diejenige des Punktes B hervorbringen, zu beurtheilen, muss man die Entfernung der Punkte, von denen sie ausgehen, von B in Rücksicht ziehen. Betrachtet man die Kugel KK' von B aus, und denkt sich auf derselben Kreise von verschiedenem Durchmesser um den Punkt A (wie die Breitengrade um den Nord- oder Südpol der Erde) gezogen, so stehen alle Punkte eines solchen Kreises offenbar gleich weit von B ab, die verschiedenen Kreise dagegen besitzen verschiedene Entfernung von B. Zu jedem Kreise denke man sich ferner denjenigen construirt, dessen Entfernung von B genau um $\frac{1}{2}\lambda$ grösser ist; die beiden Bewegungen, welche je von einem Punkte des einen und dem entsprechenden des andern ausgehend in B zusammenkommen, werden sich durch Interferenz vollständig vernichten und in B gar keine Bewegung hervorbringen. Vergleicht man nun die Wirkung aller dieser kreisförmigen Zonen der Kugelfläche KK' auf den Punkt

Fig. 8.



B, mit Berücksichtigung ihres Flächeninhaltes, so findet man als Gesammtresultat, dass die Wirkungen aller Theile derselben durch diejenigen anderer völlig vernichtet werden, mit alleiniger Ausnahme der Bewegung, welche vom Punkte *A* ausgeht. Nach *B* gelangt also nur diejenige Schwingungsbewegung, welche von *A* ausging, diese allein setzt *B* in Bewegung. Da das Gleiche für jeden Punkt gilt, so wird nicht nur von der Bewegung, welche von *A* ausgehend sich in einer bestimmten Zeit bis zur Kugeloberfläche *kk'* fortgepflanzt haben müsste, blos die Bewegung in *B* eine Wirkung ausüben, sondern auch von *P* wird nur nach *p*, statt nach allen Seiten, von *P'* aus nur nach *p'* Bewegung mitgetheilt u. s. f. Wenn also auch jeder Punkt einer Wellenfläche Mittelpunkt einer neuen Wellenfläche ist, so gelangt seine Bewegung doch nur an denjenigen Punkt der letzteren, in welcher diese **berührt** wird von derjenigen Oberfläche, welche alle diese Wellenoberflächen der einzelnen Punkte umhüllt. Diese umhüllende Wellenfläche ist in Fig. 9 die Kugeloberfläche *kk'*, die Wellenfläche in dem spätern Moment. Die soeben beschriebene Construction, die **Huyghens'**sche genannt, wird weiterhin noch mehrfach benutzt werden, um die Wellenflächen und damit die Lage der Strahlen, d. h. der Verbindungsgraden der Centren der einzelnen Wellenflächen mit den Punkten, in welchen sie von der umhüllenden Fläche tangirt werden (*AB*, *Pp*, *P'p'* Fig. 9.), zu finden.

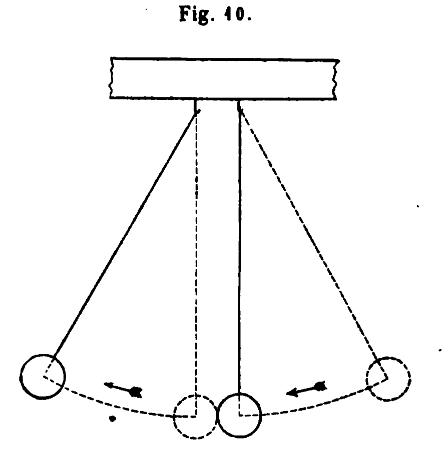
Fig. 9.



Von den Vorgängen, welche stattfinden, wenn eine derartig sich fortpflanzende Wellenbewegung an der Grenze zweier verschiedener Medien anlangt, können wir uns eine Vorstellung verschaffen, wenn wir beobachten, wie sich zwei elastische Kugeln verhalten, welche neben einander aufgehängt sind, und von denen man die eine gegen die andere fallen lässt. Bestehen dieselben aus der gleichen Substanz und sind sie von gleicher Grösse, so überträgt beim Anprall die fallende Kugel ihre ganze Bewegung an die zweite, welche sich nun so fortbewegt, wie es die erste gethan hätte, wenn kein Widerstand vorhanden gewesen wäre, s. Fig. 10. Ist dagegen die fallende Kugel grösser, als die andere, so verleiht sie nicht nur dieser dieselbe Bewegung, wie im ersten Falle, sondern sie bewegt sich auch selbst noch in gleicher Richtung über die Ruhelage hinaus. Ist endlich die erste Kugel kleiner, so bewegt sie zwar die zweite, erhält aber selbst beim Zusammenstoss eine rückwärts gerichtete Bewegung.

Uebertragen wir nunmehr diese Vorstellungen auf die Wellenbewegungen an der Grenze zweier Medien, in welchen der Werth von $\sqrt{\frac{e}{d}}$ ein verschiedener ist, so wird sich die Bewegung in dem zweiten Medium, entsprechend dem Werthe von $\sqrt{\frac{e}{d}}$, fortpflanzen, zugleich aber auch im ersten eine Bewegung übrig bleiben.

Fig. 10.



Ist das zweite Medium z. B. weniger dicht, und ein Punkt des ersten an der Grenze beider hat in einem gegebenen Momente eine bestimmte Bewegung, so wird ein Theil derselben genügen, dem benachbarten Punkt des zweiten Mittels die gleiche Bewegung zu ertheilen, da dessen Massentheilchen ja mit geringerer Kraft in die Ruhelage zurückgezogen werden. Der an der Grenze befindliche Punkt des ersten Mediums überträgt also an den nächsten Punkt des zweiten nicht seine ganze Bewegung, sondern behält einen Theil derselben, d. h. er verhält sich ebenso, als ob er die Bewegung ganz übertragen, selbst aber einen Impuls in derselben Richtung empfangen hätte. Die Folge davon, dass der Punkt des ersten Mittels sich mit unverändertem Schwingungszustand weiter bewegt, ist, dass von ihm ausgehend in demselben Medium sich eine Wellenbewegung rückwärts fortpflanzt, welche an einem bestimmten Punkt genau dieselbe Phase besitzt, als ob sie sich um ebenso viel, als dieser letztere Punkt von der Grenze absteht, jenseits derselben fortgepflanzt hätte.

Ist dagegen das zweite Medium das dichtere, dessen Theilchen mit grösserer Kraft in die Ruhelage zurückgezogen werden, so wirken diese auch mit einer solchen Kraft auf ein an der Grenze befindliches Theilchen des ersteren Mittels, seiner Bewegung entgegen, dass dasselbe nicht nur seine ganze Bewegung auf die Massentheilchen des zweiten Mediums überträgt, sondern selbst noch einen seiner Bewegungsrichtung entgegengesetzten Impuls erhält. In Folge dessen wird es zum Mittelpunkt einer neuen Wellenbewegung von genau entgegengesetzter Phase, welche sich demgemäss im ersten Medium fortpflanzt.

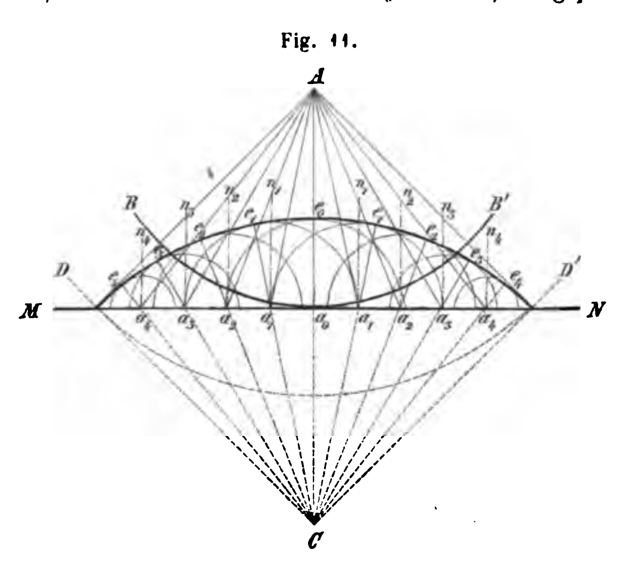
Sobald also der Quotient $\sqrt{\frac{e}{d}}$ in zwei Substanzen einen verschiedenen Werth besitzt, demnach eine Wellenbewegung sich in denselben mit verschiedener Geschwindigkeit fortpflanzt, wird dieselbe an der Grenze in zwei zerlegt, von denen die eine rückwärts in das erste Mittel zurückgeworfen (reflectirt) wird, die andere in das zweite eindringt.

In dem einfachsten Falle, dass beide Körper isotrop sind, giebt uns die

Huyghens'sche Construction das Mittel, die Richtung sowohl der reflectirten, als der eindringenden Welle zu bestimmen:

1) Richtung der reflectirten Welle: Sei MN Fig. 11. der Durchschnitt der Grenzfläche (also einer Ebene) zwischen den beiden Medien mit der Ebene der Zeichnung, und gehe die Wellenbewegung von dem Punkte A aus. Nach einer bestimmten Zeit wird sie sich bis zur Kugeloberfläche BB', welche die Grenzfläche in a_0 berührt, fortgepflanzt haben. Von diesem Augenblick ab giebt der Wellenstrahl Aa_0 Anlass zu einer reflectirten Bewegung, welche nach Verlauf der Zeit t auf irgend einem Punkte der Kugeloberfläche angelangt ist, welche mit dem Radius a_0e_0 um a_0 beschrieben ist, soweit sie noch in das erste Medium fällt. Dies Letztere ist der Fall mit der Hälfte dieser, der Wellenfläche des reflectirten Strahls. Der Strahl Aa_1 trifft die Grenzfläche MN erst in einem etwas späteren Augenblicke, und nach der Zeit t wird somit die aus diesem entstandene reflectirte Welle um so viel weniger weit sich rückwärts in das erste Medium fortgepflanzt haben, als die Strecke betrug, welche sie von Beginn der Zeit t an noch zurückzulegen hatte, um an die Grenzfläche zu gelangen. Die Wellenfläche des an a_1 reflectirten Strahls wird demnach die mit dem Radius a_1e_0 um a_1 beschriebene Halbkugel sein. Der Strahl Aa_2 trifft die Grenze noch später, der davon reflectirte Antheil der Bewegung wird sich also in derselben Zeit bis zu irgend einem Punkte der noch kleineren Halbkugel um a_2 fortgepflanzt haben, u. s. f. Die gemeinschaftliche Wellenfläche aller der von A ausgehenden Strahlen ist nach der Huyghens'schen Construction die Oberfläche, welche alle einzelnen Wellenflächen umhüllt; diese Oberfläche ist, wenn man die durch Fig. 11 erläuterte Vorstellung von der Ebene auf den Raum überträgt, offenbar eine Kugelfläche, deren Radius $= Aa_0 + a_0e_0 = Ce_0$, d. h. genau so gross ist, wie der Halbmesser derjenigen Kugel DD' bis zu deren Oberfläche die Bewegung nach der Zeit t gelangt wäre, wenn das untere Medium sich nicht von dem obern unterschiede. Die Richtung der reflectirten Strahlen selbst erhalten wir nunmehr, wenn wir die Centren aller einzelnen Wellenflächen gradlinig verbinden mit den Punkten, in wel-

Fig. 11.



chen dieselben von der umhüllenden Fläche berührt werden. Der Strahl Aa_0 wird also in der Richtung $a_0 e_0$, der Strahl Aa_1 in $a_1 e_1$, Aa_2 in $a_2 e_2$ u. s. f. reflectirt. Diese Richtungen treffen die kleinen Kreise in Punkten, in welchen der umhüllende Kreis die Richtung einer Tangente besitzt, also stehen sie dort normal zu diesem, sie schneiden sich, rückwärts verlängert, alle in dessen Mittelpunkt C, der auf der Geraden Aa_0 genau so weit von MN entfernt ist, wie A. Die von der Grenzfläche der beiden Medien zurückgeworfenen Strahlen divergiren demnach, wenn diese eine Ebene ist, ebenso, als ob sie von dem Punkte C ausgingen. Wie aus Fig. 11. leicht zu ersehen, wird der Winkel, welchen der ankommende und der reflectirte Strahl mit einander bilden, genau halbirt durch die Normale ($a_1 n_1$, $a_2 n_2$ u. s. f.) auf der Trennungsfläche MN.

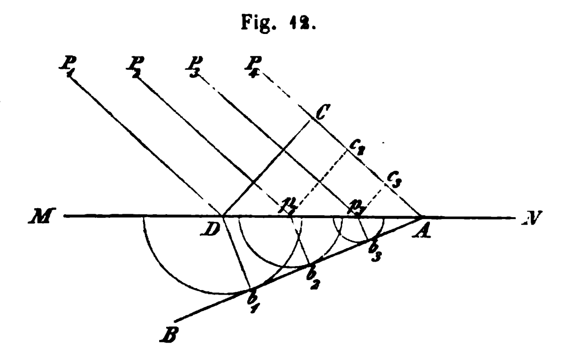
Hierdurch ist das Gesetz der Reflexion der Wellen an ebenen Grenzflächen verschiedener Mittel bestimmt. Es lautet: Eine Wellenbewegung, welche unter irgend einem Winkel auf die Trennungsebene zweier Medien auffällt, wird so reflectirt, dass der zurückgeworfene und der auffallende Wellenstrahl in einer Ebene liegen mit der Normalen zur Trennungsfläche, und beide mit dieser gleiche Winkel einschliessen.

Den Winkel, welchen der einfallende Strahl mit der Normalen zur Grenzfläche (dem Einfallsloth) bildet, nennt man den Einfallswinkel, denjenigen zwischen dem reflectirten Strahl und derselben Normalen den Reflexionswinkel, so dass der zweite Theil des Reflexionsgesetzes auch so lautet: Einfallswinkel und Reflexionswinkel sind gleich.

2) Richtung der in das zweite Medium eindringenden Welle (Brechungsgesetz): Ist dieses zweite Mittel das dichtere, so ist für dasselbe der Quotient $\sqrt{\frac{e}{d}}$ kleiner, als für das erste, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Wellenstrahles also geringer, als im ersten.

Seien P_1, P_2, P_3, P_4 Fig. 12. so nahe an einander liegende und aus so entfernter Bewegungsquelle herstammende Strahlen, dass wir sie als genau parallel, und das zwischen ihnen liegende Stück ΘD der Wellenfläche als Ebene betrachten können, so wird der Strahl P_1 in einem bestimmten Moment die Grenzebene MN in D treffen. Von da ab pflanzt sich die eindringende Wellenbewegung im zweiten Medium, aber mit geringerer Geschwindigkeit, fort. Sei diese z. B. nur die Hälfte derjenigen im ersten Mittel, so wird nach Verlauf der Zeit t, welche

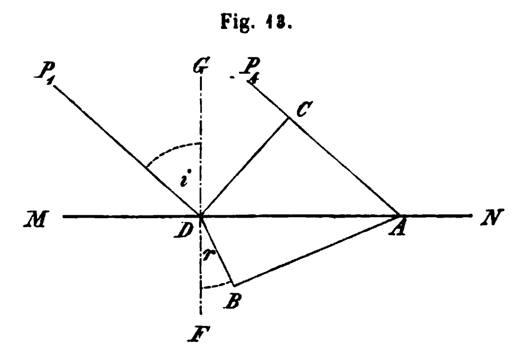
Fig. 12.



der Strahl P_4 nöthig hat, um die Strecke CA zu durchlaufen, P_1 nur so weit in den zweiten Körper eingedrungen sein, als die Hälfte der Strecke CA beträgt. P_1 wird alsdann in irgend einem Punkte der um D mit dem Radius $Db_1 = \frac{1}{2} CA$ beschriebenen Halbkugel angelangt sein. Der zweite Strahl P_2 trifft die Grenzfläche MN etwas später, nämlich in dem Augenblicke, wo P_4 in Punkt c_2 angelangt ist; bis zum Ablauf der Zeit t bewegt sich P_4 im ersten Medium um die Strecke $c_2 A$ vorwärts; der Strahl P_2, während derselben Zeit im zweiten Medium befindlich, kann nur eine halb so grosse Strecke zurücklegen; er wird also am Schluss der Zeit t sich an einem Punkte der Halbkugel befinden, welche mit dem Radius $p_2 b_2 = \frac{1}{2} c_2 A$ um p_2 construirt ist. In gleicher Weise wird nach Verlauf von t die Wellenfläche der von p_3 aus sich in das zweite Mittel fortpflanzenden Strahlen die Oberfläche einer Halbkugel um p_3 mit dem Radius $p_3 b_3 = \frac{1}{2} c_3 A$ sein; endlich wird zu derselben Zeit diejenige des Strahles P_4 der Punkt A selbst sein. Die allgemeine Wellenfläche aller zwischen P_1 und P_4 gelegenen Strahlen im dichteren Medium ist die Fläche, welche alle ihre Wellenflächen in demselben tangirt. Diese ist die durch ihren Durchschnitt AB in Fig. 12 dargestellte Ebene; wir würden dieselbe auch gefunden haben, wenn wir nur von einem Strahl, z. B. P_1, die Wellenfläche construirt und von A aus die Tangente an dieselbe gezogen hätten. Die im ersten Mittel ebene Wellenfläche CD ist also auch im zweiten noch eben, hat aber eine andere Richtung. Das Letztere gilt natürlich auch von den Strahlen, den Geraden zwischen den Punkten D, p_2, p_3 u. s. f. mit den Tangirungspunkten b_1, b_2, b_3 etc.

Aus der Huyghens'schen Construction ersehen wir demnach zunächst, dass die in das zweite Medium eindringende Wellenbewegung zwar in der Ebene bleibt, in welcher der einfallende Strahl und die Normale GF Fig. 13. zur Grenzfläche liegen, aus seiner Richtung aber abgelenkt, gebrochen wird. Wir können aber aus dieser Construction auch das Gesetz ableiten, nach welchem diese Brechung vor sich geht.

Fig. 13.



Die Längen CA und DB verhalten sich nach Construction, wie die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung im ersten zu der im zweiten Medium (in unserem Beispiel wie 2 : 1); nennen wir die erstere v, die zweite v', so ist

$$\frac{AC}{BD} = \frac{v}{v'}$$

Nun ist aber der Einfallswinkel $i = P'DG = ADC$, der Winkel BDF, welchen der gebrochene Strahl

mit dem Einfallsloth bildet, der **Brechungswinkel** r genannt, $= \measuredangle DAB$. In den beiden rechtwinkligen Dreiecken ACD und ABD ist:

$$\frac{AC}{AD} = \sin ADC = \sin i$$

$$\frac{BD}{AD} = \sin BAD = \sin r.$$

Diese beiden Ausdrücke, in einander dividirt, geben:

$$\frac{AC}{BD} = \frac{\sin i}{\sin r}$$

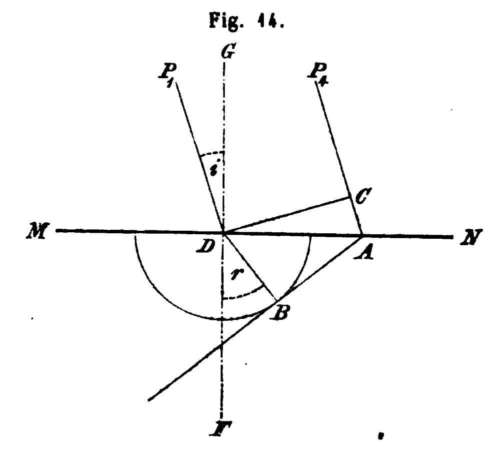
und, da AC und BD sich verhalten, wie die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten,

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v}{v'}$$

Darnach kann der Einfallswinkel jeder beliebige sein, stets muss sich **sein Sinus zu demjenigen des Brechungswinkels verhalten, wie die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im ersten zu der im zweiten Medium.** Dieses Verhältniss $\frac{v}{v'}$, der **Brechungsexponent, Brechungsindex** oder **Brechungsquotient** genannt, gestattet also, wenn es durch Bestimmung der Richtung eines beliebig einfallenden und des zugehörigen gebrochenen Strahles einmal für zwei Medien gefunden worden ist, zu jedem in anderer Richtung auf die Grenzfläche derselben beiden Körper auffallenden Strahl die Richtung des zugehörigen gebrochenen zu berechnen.

In dem bisher betrachteten Falle war das zweite Medium das dichtere, also $v > v'$, demnach der Brechungsexponent $\frac{v}{v'} > 1$. In diesem Falle ist für jeden Einfallswinkel der Brechungswinkel kleiner, als jener; der Strahl wird dem Einfallsloth **zu**gebrochen.

Fig. 14.



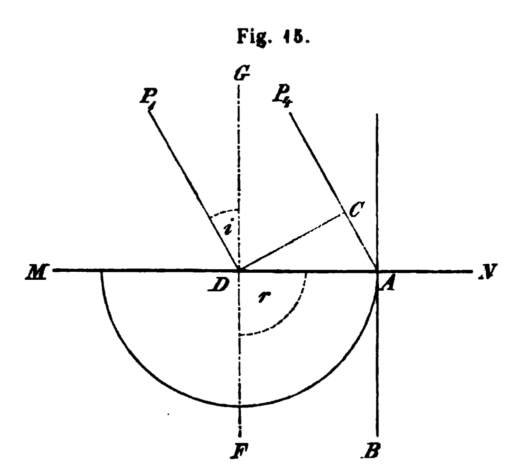
Ist dagegen das erste Medium das dichtere, so ist $v' > v$, also $\frac{v}{v'} < 1$, und, wie aus der ganz analogen Construction Fig. 14, welche daher einer besonderen Erläuterung nicht bedarf, hervorgeht, wird der abgelenkte Strahl vom Einfallsloth **ab**gebrochen. Da demnach hier der Brechungswinkel grösser als der Einfallswinkel, so muss es einen der letzteren geben, für den der erstere $= 90^0$ ist, d. h. der Strahl nicht mehr in das zweite Medium eindringen kann. Da

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n, \qquad (n < 1)$$

ist $\sin r = \frac{\sin i}{n} = 1 = \sin 90^0$ für den Fall, dass $\sin i = n$. Der Strahl, dessen Einfallswinkel so gross ist, dass sein Sinus genau gleich dem Brechungsexponent ist, wird so gebrochen, dass er sich parallel der Grenzfläche fortpflanzt, also nicht in das zweite Medium eindringt. Ebenso wenig kann dies gemäss dem Brechungsgesetz ein Strahl, dessen Einfallswinkel noch grösser ist, denn dann wird $\frac{\sin i}{n} > 1$. Dies ist aber der Werth für den sin des Brechungswinkels; nun existirt aber kein Winkel, dessen sin > 1, also giebt es in diesem Falle auch keinen Brechungswinkel.

Fig. 14 stellt die Brechung an der Grenze eines Mediums gegen ein weniger dichtes (das untere) dar, in welch letzterem die Geschwindigkeit die doppelte von der im oberen Mittel, der Brechungsexponent also $= \frac{1}{2}$ ist. Die Wellenfläche im zweiten findet man in vereinfachter Weise als Tangentialebene AB an die Wellenfläche des Strahles P_1 im unteren Medium, welche um D mit dem Radius $BD = 2AC$ beschrieben ist. BD ist demnach die Richtung des gebrochenen Strahles. In Fig. 15 ist i so gross, dass $\sin i = \sin CDA = \frac{AC}{AD} = n = \frac{1}{2}$, also $AD = 2AC$. Die Wellenfläche des Strahles P_1 muss also um D mit dem Radius AD beschrieben werden, sie geht also durch A, die Tangente auf den Kreis aus dem Punkte A hat die Richtung AB, der zugehörige gebrochene Strahl, die Grade vom Tangirungspunkt nach der Mitte, liegt also in MN; der Brechungswinkel ist, wie bereits oben die Rechnung lehrte, $= 90^0$. Fig. 16 endlich zeigt die Brechung bei noch grösserem Einfallswinkel i unter sonst gleichen Verhältnissen. Die Wellenfläche des Strahles P_2 im zweiten Medium ist die Kugelfläche, um D mit dem Radius $DB = 2AC$ beschrieben; an diese kann von A aus keine Tangentialebene gelegt werden, weil A innerhalb derselben liegt, also giebt es auch keine Wellenfläche und keinen gebrochenen Strahl im zweiten Medium.

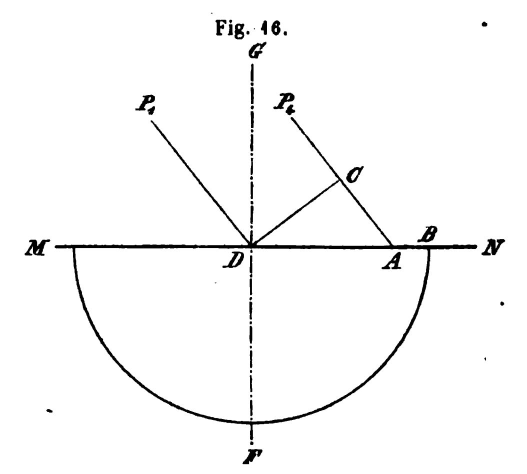
Fig. 15.



Das Brechungsgesetz lehrt folglich, dass eine Wellenbewegung an der Grenze zweier Medien stets aus ihrer Richtung abgelenkt wird; dass dieselbe, in jeder beliebigen Richtung auf die Grenze auffallend, stets in das zweite Medium eindringt, sobald ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit in demselben kleiner ist, als im ersten; dass dagegen im umgekehrten Falle ein Eindringen der Bewegung nur stattfinden kann, wenn der Einfallswinkel

eine bestimmte Grenze nicht überschreitet; bei grösserem Einfallswinkel giebt es vielmehr zu dem einfallenden Strahl keinen gebrochenen mehr, es findet keine Theilung der Wellenbewegung mehr in eine reflectirte und eine gebrochene statt, die ganze Bewegung wird reflectirt. Daher nennt man diese Erscheinung die totale Reflexion der Wellen, und den Einfallswinkel, von welchem ab dieselbe eintritt und dessen Werth nach Obigem unmittelbar aus dem Brechungsindex folgt, den Winkel der totalen Reflexion.

Fig. 16.



Die optischen Eigenschaften der Krystalle.

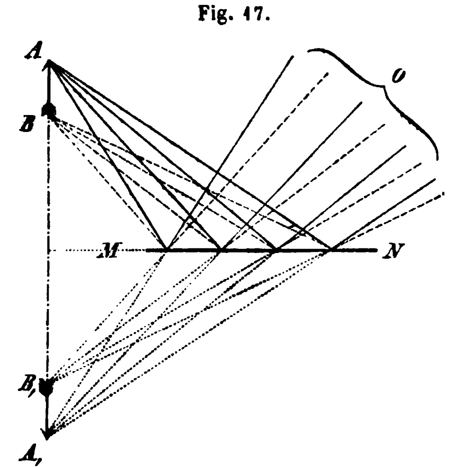
§. 7. **Undulationstheorie des Lichtes.** Die Gesetze der Wellenbewegungen finden ihre eingehendste Anwendung in der theoretischen Optik, d. h. in der hypothetischen Vorstellung, welche man sich von den Erscheinungen des Lichtes macht. Diese Vorstellung, die Undulationstheorie des Lichtes genannt und zuerst von Huyghens entwickelt, aber erst im Anfang dieses Jahrhunderts zu allgemeiner Annahme gelangt, besteht darin, dass man sich den Raum und alle darin befindlichen Körper erfüllt denkt von einem unendlich dünnen elastischen Fluidum, dem Aether, und annimmt, das Licht sei eine den Gesetzen der Wellenbewegungen entsprechende Vibrationsbewegung dieses Aethers. Das Leuchten ist dieser Theorie nach die Erregung von Vibrationen der zwischen den Theilchen des leuchtenden Körpers befindlichen Aethertheilchen, welche Bewegung als Welle in dem umliegenden Aether sich fortpflanzt und, als Schwingungen der in unserem Auge befindlichen Aethertheilchen auf den Sehnerv übertragen, uns den Eindruck verschafft, welchen wir »Licht« nennen. Die Intensität (Helligkeit) des ausgesandten Lichtes wird von der Energie der Erregung, also von der Amplitude der Schwingungen abhängen. Endlich wird noch die Annahme gemacht, dass die Verschiedenheit des Eindruckes, den wir vom Licht empfangen je nach seiner Farbe, abhängt von einer Verschiedenheit der Schwingungsdauer der Vibrationen des Aethers. Die Wellenlänge ist nach Früherem die Strecke, um welche sich die Bewegung während der Dauer einer Schwingung fortgepflanzt hat; ist letztere Zeit grösser, so muss es deshalb auch die Wellenlänge sein, vorausgesetzt, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Vibra-

tionen von verschiedener Schwingungsdauer dieselbe ist, was für die Fortpflanzung des Lichtes im Weltraum feststeht. Dasjenige Licht, welches seine Schwingungen am langsamsten vollführt, die grösste Schwingungsdauer, also die grösste Wellenlänge hat, nennen wir roth, das von kleinerer Schwingungsdauer orange, gelb, grün, blau, endlich die schnellsten Schwingungen mit der kleinsten Wellenlänge, welche wir überhaupt noch als Licht wahrnehmen, violett.

Wir werden nunmehr sehen, dass das Licht in der That alle die Eigenschaften besitzt, welche ihm zukommen müssen, wenn es eine Wellenbewegung ist, deren allgemeine Gesetze im vorigen §. enthalten sind.

§. 8. **Reflexion des Lichtes. Reflexionsgoniometer.** Vergleichen wir die Aethertheilchen, welche sich in einem Medium befinden, mit denjenigen in einem andern, so müssen dieselben nicht blos einander anziehen und abstossen, sondern auch unter dem Einfluss der Theilchen des Körpers selbst stehen, und da dies die Elasticität des Aethers beeinflussen muss, so ist anzunehmen, dass die Elasticität des Aethers in verschiedenen Medien eine verschiedene sei. Ist diese aber in zwei Körpern verschieden, so ist es auch die davon abhängende Geschwindigkeit, mit welcher sich eine Wellenbewegung in denselben fortpflanzt. Einer solchen gegenüber muss sich der Aether im einen zu dem im andern Körper verhalten, wie zwei völlig verschiedene Medien. Dies ist nun dem Licht gegenüber in der That der Fall. Lassen wir Lichtstrahlen auf die Grenzfläche zweier Körper auffallen, so beobachten wir, dass, wie es bei einer Wellenbewegung der Fall sein muss, ein Theil der Bewegung reflectirt wird, und zwar, wenn die Trennungsfläche eine Ebene ist, genau nach dem Reflexionsgesetz, so dass einfallender und reflectirter Lichtstrahl in einer Ebene liegen mit der Normale zur Grenzfläche, und mit dieser Richtung gleiche Winkel einschliessen. Gehen daher von den einzelnen Punkten eines Körpers AB Fig. 17, z. B. von A, Lichtstrahlen aus und treffen diese eine ebene Oberfläche eines anderen Körpers MN, so werden sie, nach dem Reflexionsgesetz zurückgeworfen, genau so divergiren, als ob sie von einem Punkt A' kämen, welcher auf der Normale zu MN (oder deren Verlängerung) ebenso weit jenseits MN liegt, als A diesseits. Da unsere Sehthätigkeit so organisirt ist, dass wir das Bild eines Körpers dahin verlegen, woher die in unser Auge divergirend gelangenden Strahlen convergiren oder zu convergiren scheinen, so wird ein nach der reflectirenden (spiegelnden)

Fig. 17.

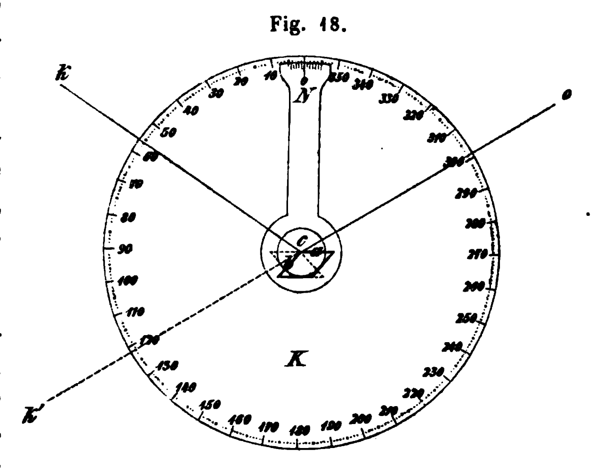


Fläche in der Richtung O, Fig. 17, blickendes Auge A an der Stelle A_1, und da das Gleiche für alle Punkte des Körpers AB gilt, ein Bild desselben in $A_1 B_1$ erblicken. Ein solches Bild nennt man ein virtuelles im Gegensatz zu einem reellen als einem solchen, von dem die ins Auge gelangenden Strahlen wirklich ausgehen.

Das Gesetz der Reflexion des Lichtes findet in der Krystallographie eine wichtige Anwendung, nämlich zur Bestimmung der Winkel, welche die ebenen Flächen der Krystalle mit einander bilden. Das zu diesem Zwecke dienende Instrument heisst Reflexionsgoniometer, und sein Princip ist folgendes:

Der getheilte Kreis K Fig. 18 hat eine drehbare Axe, welche mit dem Zeiger oder Nonius N fest verbunden ist, so dass mittelst desselben der Winkel auf der Kreistheilung abgelesen werden kann, um welchen die Axe gedreht worden ist. Diese letztere ragt vor dem Kreise hervor und trägt dort den Krystall derart befestigt, dass die Kante, in welcher sich die beiden Flächen schneiden, deren Neigungswinkel gemessen werden soll, centrirt, d. h. in ihrer Verlängerung die Mitte des Kreises trifft, und justirt ist, d. h. normal zur Ebene des Kreises steht. Befinde sich von den beiden mit a und b bezeichneten Krystallflächen die erstere alsdann in derjenigen Stellung, dass dem in o befindlichen Auge das virtuelle Bild eines in der Richtung ck liegenden Gegenstandes in der Richtung $o\,c\,k'$ erscheint, und drehe man nunmehr die Axe und damit den Krystall, wobei natürlich die Kante a/b vollkommen stillsteht, bis b in eine Stellung gelangt ist, welche der früheren von a parallel ist, so befindet sich der Krystall in der Lage, welche durch den punktirten Umriss dargestellt ist, und man erblickt jetzt das Spiegelbild von k in derselben Richtung $c\,o$ von der zweiten Fläche reflectirt, als es vorher von der ersten zurückgeworfen wurde. Man sieht nun aus Fig. 18, dass der Winkel, um welchen man drehen musste, das Supplement des gesuchten Winkels zwischen den beiden Flächen ist, dass der Krystallwinkel also bestimmt ist, wenn jener Drehungswinkel am Kreise abgelesen worden ist. Das Nähere über die Einrichtung und den Gebrauch des Reflexionsgoniometers wird an einer späteren Stelle gegeben werden (in d. III. Abthl.).

Fig. 18.



§. 9. **Brechung des Lichtes.** Wenn das Licht eine Wellenbewegung ist, so muss, sobald ein Strahl desselben auf die Grenzfläche zweier Medien auftrifft, nicht nur ein Theil der Bewegung reflectirt werden, sondern auch der übrige Theil in das zweite Mittel eindringen. Dies scheint mit den Lichtstrahlen nur bei den sogenannten durchsichtigen Körpern der Fall zu sein. Die scheinbar undurchsichtigen zeigen dagegen ebenfalls eine Schwächung des reflectirten Lichtes, also muss auch bei ihnen ein Theil des auffallenden Lichtes eingedrungen sein. In der That besteht der Unterschied nur darin, dass in den durchsichtigen Körpern die Lichtstrahlen in grössere Tiefe eindringen können, ohne merklich geschwächt (absorbirt) zu werden, bei den undurchsichtigen nur in geringe. Sogenannte undurchsichtige Stoffe erweisen sich in genügend dünnen Schichten als durchsichtige.

Ein an der Grenze zweier Körper, z. B. Luft und Glas, in den zweiten eindringender Lichtstrahl wird nun, wie die Erfahrung lehrt, genau so gebrochen, wie es das Brechungsgesetz S. 18 für Wellenbewegungen überhaupt erfordert. Der gebrochene Strahl liegt in der Einfallsebene (Ebene des einfallenden Strahls und des Einfallslothes) und das Verhältniss (der Brechungsexponent):

$$n = \frac{\sin i}{\sin r}$$

ist für dieselben Substanzen bei allen Grössen des Einfallswinkels i constant, es ist das Verhältniss $\frac{v}{v'}$ der Lichtgeschwindigkeit in dem einen und andern Medium.

Gelangt ein Lichtstrahl, der sich im zweiten Medium fortbewegt, an eine zweite Grenzfläche der beiden Substanzen, welche der ersten parallel ist, Fig. 19, so wird er an der ersten Fläche so gebrochen, dass $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v}{v'}$, an der zweiten so, dass $\frac{\sin r}{\sin e} = \frac{v'}{v}$, denn dieses ist das Verhältniss seiner Fortpflanzungsgeschwindigkeit in demjenigen Medium, aus welchem er an die zweite Grenze gelangt, zu der in demjenigen, in welches er austritt. Daraus folgt aber

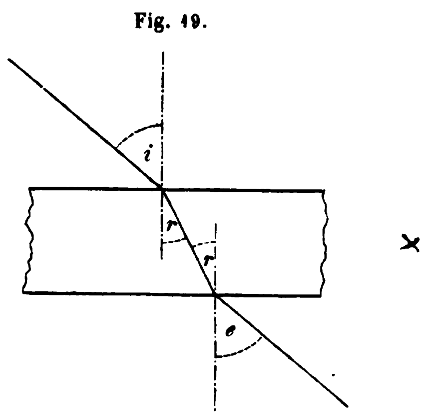
$$\sin e = \sin i, \quad e = i,$$

d. h. der Lichtstrahl setzt jenseits der zweiten Grenzfläche seinen Weg in derselben Richtung fort, in welcher er auf die erste auffiel. Eine planparallele durchsichtige Platte, in den Weg der Lichtstrahlen eingefügt, ändert deren Richtung nicht. Aus der Construction Fig. 19 ersieht man zugleich, dass der Brechungsexponent beim Uebergang aus einem Medium in ein zweites der reciproke Werth desjenigen beim Uebergang aus dem zweiten in das erste ist, dass, wenn z. B. der Brechungsquotient eines Lichtstrahles, der aus Luft in Glas eintritt, $= n$, derselbe beim Austritt aus Glas in Luft $= \frac{1}{n}$ ist.

Der bestimmte Zahlenwerth von n ist für Lichtstrahlen von gleicher Farbe bei einem und demselben Stoffe stets derselbe, so dass er unter

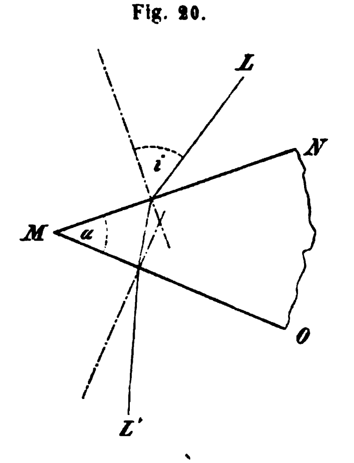
Umständen, wo die Bestimmung anderer Eigenschaften unzulässig ist (z. B. bei geschliffenen Edelsteinen), zur Erkennung der Natur der Substanz benutzt werden kann. Er ist ferner für alle Richtungen in einem Körper constant, sobald dieser zu der Klasse der optisch isotropen gehört. Ist $n > 1$, also $v > v'$, so nennt man das zweite Medium, in welchem die Lichtbewegung sich langsamer fortpflanzt, das optisch dichtere.

Fig. 19.



Betrachten wir nun den Fall, dass ein Lichtstrahl in einen durchsichtigen Körper ein- und wieder austritt, dessen Ein- und Austrittsflächen jedoch nicht parallel sind, so ist zunächst klar, dass dann auch der austretende Strahl dem einfallenden nicht parallel sein kann. Sei Fig. 20 der Querschnitt eines solchen von zwei geneigten Ebenen MN und MO begrenzten Körpers, ein Prisma genannt, so zeigt die Construction, dass ein durch denselben hindurchgehender Lichtstrahl LL' eine Ablenkung erfährt. Diese Ablenkung können wir berechnen, wenn wir α, den sogenannten brechenden Winkel des Prismas, den Einfallswinkel i und den Brechungsexponenten n kennen. Umgekehrt kann aber ein solches Prisma, indem wir die durch dasselbe hervorgebrachte Ablenkung messen, dazu dienen, den Brechungsquotienten n des Lichtstrahles, bei seinem Eintritt aus Luft in die Substanz des Prismas, zu bestimmen.

Fig. 20.



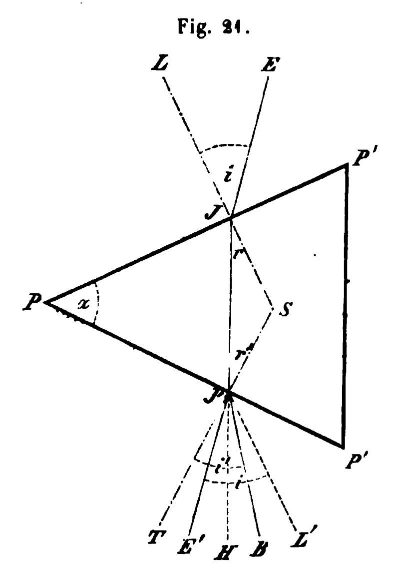
Sei $PP'P'$, Fig. 21, der Durchschnitt eines Prismas, senkrecht zu dessen brechender Kante, deren Winkel $= \alpha$, und diese Durchschnittsebene sei zugleich die Einfallsebene des Lichtstrahles EJ. Derselbe wird gebrochen nach J' sich fortpflanzen und abermals gebrochen in der Richtung $J'B$ austreten. Ziehen wir $J'E' \parallel EJ$, so ist $E'J'B = \delta$ die gesammte Ablenkung, welche der Strahl im Prisma erfahren hat. LJ, verlängert bis S, ist das Loth zur Eintrittsfläche, TJ' das zur Austrittsfläche. $EJL = i$ ist der Einfallswinkel an der ersteren, und da $L'J' \parallel LJ$ und, wie schon bemerkt, $E'J' \parallel EJ$, so ist auch $L'J'E' = i$. $TJ'B = i'$ ist der Winkel, welchen der austretende Strahl mit dem Loth zur Austrittsfläche einschliesst; $J'JS = r$ und $JJ'S = r'$ die Winkel des Strahls JJ' im Prisma mit den beiden

Lothen JL und $J'T$. Da $J'H$ die Verlängerung von JJ' ist, so ist $TJ'H = r'$. $HJ'L' = r$.

Nun ist

$$E'J'B = \delta = E'J'H + HJ'B = (L'J'E' - L'J'H) + (BJ'T - TJ'H)$$

Fig. 21.



Für diese Winkel ihre obigen Werthe eingesetzt, giebt:

$$\delta = (i - r) + (i' - r')$$
$$\delta = i + i' - (r + r')$$

Ferner ist in dem Dreieck PJJ'

$$\alpha + (90^0 - r) + (90^0 - r') = 180^0$$

also: $\quad \alpha = r + r'$

demnach $\quad \delta = i + i' - \alpha$

Die Fig. 21. ist so construirt, dass $i = i'$, also auch $r = r'$; in diesem Falle ist

$$\delta = 2i - \alpha = 2i' - \alpha.$$

Ist aber einer der Winkel grösser als der andere, z. B. $i = i' + \beta$, so ist

$$\delta = 2i' + \beta - \alpha;$$

im entgegengesetzten Fall, wenn $i' = i + \beta$,

$$\delta = 2i + \beta - \alpha.$$

Beide Werthe für δ sind grösser, als $2i - \alpha$, also hat die Ablenkung ihren kleinsten Werth in dem in Fig. 21 dargestellten Falle, dass der ein- und der austretende Strahl gleiche Winkel mit den Prismenflächen einschliessen. Dann ist

$$\delta = 2i - \alpha, \quad i = \frac{\alpha + \delta}{2}.$$

Ferner ist, da $r = r'$,

$$\alpha = r + r' = 2r$$
$$r = \frac{\alpha}{2}$$

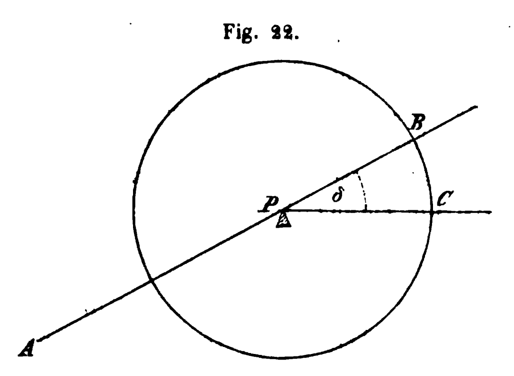
folglich der Brechungsexponent:

$$n = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\sin \frac{\alpha + \delta}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

Diese letzte Gleichung liefert nun die einfachste und bequemste Methode zur Bestimmung des Brechungsquotienten eines Lichtstrahles beim Eintritt aus Luft in einen festen durchsichtigen Körper. Man hat hierzu nur den brechenden Winkel α eines aus dem Körper bestehenden Prismas, und die Minimalablenkung δ eines hindurchgehenden Lichtstrahles zu bestimmen. Das Erstere geschieht mittelst des Reflexionsgoniometers, s. S. 24, das Letztere ebenfalls mittelst eines getheilten Kreises, in dessen Centrum das Prisma justirt drehbar ist, an welchem man aber ausserdem die Richtung des aus

dem Prisma austretenden Strahles, sowie diejenige des eintretenden ablesen kann. Das Schema Fig. 22 mag dies versinnlichen. Hier ist P das Centrum des Kreises, vor welchem sich die brechende Kante des Prismas befindet, $AP \parallel PB$ die Richtung des einfallenden Lichtes, PC die des gebrochenen Strahles; alsdann ist der am Kreise abzulesende Winkel BPC die Ablenkung δ. Man dreht nun das Prisma um seine brechende Kante, d. h. um die Axe des Kreises so lange, bis δ seinen kleinsten Werth hat, also bei weiterer Drehung der Strahl PC sich wieder mehr von BP entfernen würde. Hat man diesen Werth von δ, sowie den brechenden Winkel α das Prismas gemessen, so folgt aus der Gleichung

Fig. 22.



$$\frac{\sin \frac{\alpha + \delta}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = n$$

unmittelbar der gesuchte Brechungsquotient. Das Nähere über die practischen Manipulationen bei einer derartigen Messung muss einer späteren Stelle vorbehalten bleiben.

Bestimmt man auf dem angegebenen Wege den Brechungsexponent eines Körpers für einen Lichtstrahl einer gewissen Farbe, ferner für einen Strahl einer andern Farbe, so findet man beide verschieden. Damit übereinstimmend sieht man, dass ein Strahl weissen Lichtes durch ein Prisma zerlegt wird in Strahlen verschiedener Farbe, welche sämmtlich eine verschiedene Ablenkung in demselben erfahren. Da diese Farben und ihre Reihenfolge, der Ablenkung nach, im Allgemeinen bei verschiedenen Substanzen des Prismas die gleichen sind, so können sie nicht durch das Letztere hervorgebracht worden sein, sondern müssen schon im einfallenden weissen Licht präexistirt haben. Es ist demnach anzunehmen, dass das sogenannte weisse Licht aus den verschiedenen, durch die Brechung zu einem Spectrum zerstreuten (dispergirten) Farben bestehe. In der That vermögen wir durch ein umgekehrt gestelltes gleichartiges Prisma dieselben wieder sämmtlich zu vereinigen, und alsdann machen sie auf unser Auge wieder den Eindruck des Weiss. Das Farbenspectrum, welches das weisse Licht durch ein Prisma liefert, hat eine grössere Ausdehnung, wenn der brechende Winkel des Prismas grösser ist, da die Ablenkung jeder Farbe mit dem Werthe jenes Winkels wächst, also auch der Abstand der wenigst brechbaren Strahlen im Spectrum von den am stärksten brechbaren. Die Ausdehnung desselben hängt aber ausserdem noch ab von dem Dispersions-

vermögen, d. h. von der Zerstreuungskraft für die verschiedenen Farben, welche die Substanz des Prismas besitzt.

Die Erfahrung lehrt demnach, dass der Brechungsexponent sich nicht nur mit der Substanz, sondern auch mit der Farbe, d. h. mit der Wellenlänge des Lichtes, ändert. Die genaue theoretische Herleitung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer jeden Wellenbewegung liefert denn auch eine Abhängigkeit derselben von der Wellenlänge der Bewegung. Diese Abhängigkeit ist für den Brechungsquotienten sehr angenähert ausgedrückt durch die Formel (von Cauchy):

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2},$$

in welcher A und B für eine und dieselbe Substanz Constante sind, λ die Wellenlänge bedeutet. Wenn man demnach für zwei Farben, deren Wellenlängen λ_1 und λ_2 sind, die Brechungsexponenten bestimmt hat, so kann man mittelst obiger Formel A und B (indem man jene Werthe einsetzt und die beiden Gleichungen nach A und B auflöst) berechnen, und kennt alsdann für jede beliebige Farbe mit anderem λ das zugehörige n. Aus dieser Dispersionsformel sieht man, dass der Brechungsindex, also auch die Ablenkung, um so kleiner wird, je grösser die Wellenlänge des gebrochenen Lichtes ist. Da nach Früherem das Roth unter den Farben des Spectrums die grösste Wellenlänge hat, so ist dieses die am wenigsten abgelenkte Farbe; stärker abgelenkt sind Orange, Gelb, Grün, Blau, und die am weitesten abgelenkte Farbe des ganzen Spectrums ist Violett. Dieses letzte besteht also aus Schwingungen von der kleinsten Wellenlänge, welche noch als Licht wahrgenommen werden können. Betrachten wir ein solches Farbenspectrum, wie ein Prisma es aus weissem Licht erzeugt, so sehen wir, dass jede der soeben genannten Farben noch einen bestimmten Raum in der Breite einnimmt, also noch Strahlen enthält, deren Ablenkung und somit deren Wellenlänge noch zwischen gewissen Grenzen verschieden ist. Hiernach kann eine genaue Bestimmung des Brechungsexponenten für eine Farbe nicht vorgenommen werden, z. B. für Gelb überhaupt, sondern für die Strahlen von einer bestimmten Wellenlänge unter allen denen, welche zum Gelb gehören, welche also nur an einer bestimmten Stelle im Gelb des Spectrums erscheinen. Solches Licht, welches nur aus Schwingungen von einer und derselben Wellenlänge besteht, nennt man einfarbig, monochromatisch, und kann dasselbe auf verschiedene Arten erhalten:

1) Einfarbig ist das Licht, welches gewisse Metalldämpfe in glühendem Zustande aussenden. Lässt man z. B. festes schwefelsaures Lithium, Natrium oder Thallium, an einen dünnen Platindraht angeschmolzen, in einer nicht leuchtenden Gasflamme (eines Bunsen'schen Brenners) verdampfen, so sendet diese im ersten Falle monochromatisches rothes, im zweiten gelbes, im dritten grünes Licht aus, und das Licht solcher gefärbten Flammen ist das bequemste Hülfsmittel zur Bestimmung des Brechungsexponenten eines Körpers für verschiedene Farben.

2) Das Sonnenlicht enthält nicht alle zwischen dem äussersten Roth und äussersten Violett befindliche Farben, wie sie z. B. das einer weissen Flamme, durch ein Spectrum zerlegt, zeigt, sondern gewisse Lichtarten werden beim Durchgang durch die äussere Dampfhülle der Sonne vernichtet. An den diesen Lichtarten entsprechenden Stellen des hellen Spectrums erscheinen bei geeigneter Hervorbringung desselben demnach äusserst schmale dunkele Lücken (die sogenannten Fraunhofer'schen Linien), wodurch also bestimmte Stellen im Spectrum scharf markirt sind, und für diese alsdann die Ablenkung und somit der Brechungsexponent des Prismas sehr genau gemessen werden kann.

Angenähert einfarbig ist auch das Licht, wenn es durch gewisse farbige Körper hindurchgegangen ist, z. B. durch rothes Glas, welches ausser Roth alle übrigen Lichtarten vernichtet, doch haben die hindurchgehenden Strahlen noch merklich verschiedene Wellenlängen, daher sie im Spectrum nicht an einer einzigen Stelle, sondern innerhalb eines Streifens von einiger Breite auftreten, daher zu genauen Messungen der Ablenkung nicht geeignet sind.

Durch die Bestimmung der Brechungsexponenten fester durchsichtiger Körper an der Grenze gegen Luft findet man, dass diese sämmtlich optisch dichter sind, als die letztere, dass also der Brechungsquotient aus Luft in einen solchen Körper stets grösser als 1 ist; bei der grossen Mehrzahl liegt er zwischen den Grenzen 1,4 und 1,7, doch giebt es auch Substanzen mit beträchtlich höherem Brechungsexponenten, z. B. ist derjenige des Diamant

$$n = 2,4135 \text{ roth,}$$
$$= 2,4195 \text{ gelb,}$$
$$= 2,4278 \text{ grün.}$$

Für diesen Körper ist also der Brechungsindex beim Austritt aus demselben in Luft c. $\frac{1}{2,4}$, d. i. ungefähr der Sinus von 25°. Nach dem S. 20 Gesagten, welches wörtlich auch für die Schwingungen des Lichtes gilt, wird zu einem Lichtstrahl, welcher sich im Innern eines Diamanten fortpflanzt und eine Grenzfläche unter einem grössern Einfallswinkel, als 25°, trifft, kein gebrochener mehr existiren können, er wird demnach total reflectirt, und wegen des hohen Brechungsexponenten ist hier der Grenzwinkel der totalen Reflexion so klein, dass ein Lichtstrahl in einem von vielen ebenen Facetten begrenzten Diamant meist eine grosse Zahl totaler Reflexionen zu erleiden hat. Dies ist die Ursache der zahlreichen Lichtreflexe im Innern eines geschliffenen Diamanten.

§. 10. **Linsen. Mikroskop. Fernrohr.** Die Erscheinungen der Brechung des Lichtes in Prismen gestatten die Erklärung derjenigen, welche die Lichtstrahlen zeigen beim Durchgang durch eine sogenannte Linse, d. h. einen durchsichtigen Körper (meist starkbrechendes Glas), der von zwei Segmenten einer Kugelfläche begrenzt ist. RR', Fig. 23, stellt den Durchschnitt einer solchen dar, AB, die Normale zu der Ebene des kreisförmigen Randes RR' durch die Mitte C, die Axe derselben. Fallen auf

eine derartige Linse parallele, also von einem sehr weit entfernten Punkte ausgehende Lichtstrahlen, P^0, P', u. s. f. auf, so werden die dem Rande nächsten, z. B. P^0, die Oberfläche der Linse unter einem grösseren Einfallswinkel i treffen, als ein der Mitte mehr genäherter Strahl, z. B. P^2; für diese beiden, P und P^2 ist in der Figur die Richtung der Normale zur Eintrittsfläche und die Grösse des Einfallswinkels i angegeben. Demnach muss, da n in allen Theilen der Linse gleich ist, auch der Brechungswinkel des Strahles P grösser sein, als der von P^2, so dass ersterer eine weit stärkere Ablenkung erfährt, als letzterer. Die beiden Stellen der Linse, an welchen ein Lichtstrahl ein- und austritt, bilden gleichsam zwei Stellen eines Prismas, dessen brechender Winkel um so grösser wird, je mehr wir uns dem Rand der Linse nähern, wie aus Fig. 23 hervorgeht, worin die gegen einander geneigte Lage dieser Stellen durch ihre Tangentialebenen (punktirt) bis zu deren Durchschnittsrichtung angegeben ist. Die Folge dieser verschiedenen Ablenkung ist es, dass alle diese einander und der Axe der Linse parallele Strahlen sich jenseits derselben in einem auf AB liegenden Punkte F, dem Brennpunkt (Focus) der Linse, vereinigen. Der Abstand CF dieses Punktes von der Mitte der Linse heisst ihre Brennweite oder Focallänge. Sind die auffallenden Strahlen zwar einander, aber nicht der Axe AB parallel, s. Fig. 24, kommen sie also von einem nicht in der Verlängerung von AB liegenden Punkte (in unendlicher Entfernung), so vereinigen sie sich in einem Punkte F′, welcher auf der durch F, senkrecht zu AB gelegten Ebene dort liegt, wo dieselbe von dem durch die Mitte der Linse gehenden Strahl PC getroffen wird. Auf der gradlinigen Verlängerung von PC muss der Vereinigungspunkt F^1 liegen, weil dieser durch die Mitte gehende Strahl an parallelen Stellen der Linse ein- und austritt, also durch diese ebenso wenig, wie durch eine planparallele Platte, eine Aenderung seiner Richtung

Fig. 23.

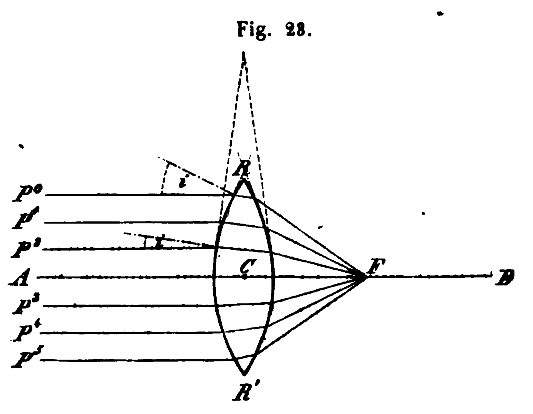
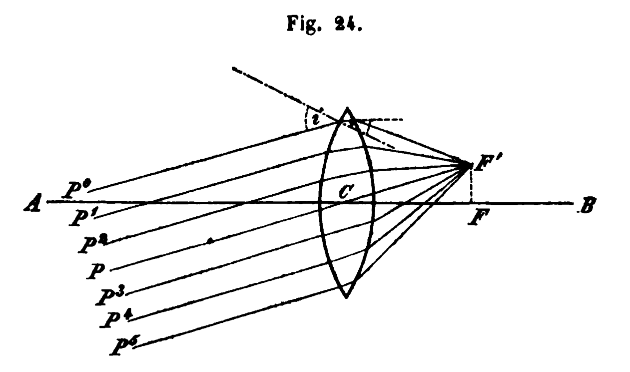


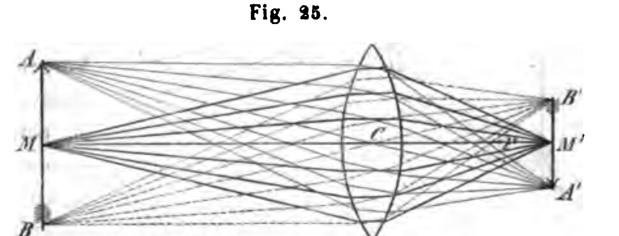
Fig. 24.



erfährt. Dass der Strahl PCF' sich aber in einem oberhalb F befindlichen Punkte, F', mit einem andern, z. B. P^0 vereinigen muss, lehrt folgende Betrachtung: Der Strahl P^0 trifft die Linse an derselben Stelle, wie der gleichbezeichnete in der vorigen Figur, aber unter grösserem Einfallswinkel i, folglich ist auch der Brechungswinkel r grösser, der Strahl wird also in seiner Verlängerung die Gerade AB erst in grösserem Abstande, als in F, folglich die Gerade PC oberhalb F, schneiden. Die beiden Constructionen Fig. 23 und 24 gelten nun aber auch umgekehrt für den Fall, dass sich in F, resp. F^1 ein leuchtender Punkt befindet, von welchem divergirende Strahlen ausgehen und auf die Linse fallen. Diese verlassen die Linse auf der linken Seite als parallele Strahlen; wenn sie von F ausgehen, parallel zur Axe der Linse (Fig. 23), wenn sie von F^1 ausgehen, in der Richtung F^1C (Fig. 24).

Betrachten wir nunmehr solche Strahlen, welche nicht aus dem Focus oder einem Punkte, dessen Abstand von der Linse gleich der Focallänge ist, aber auch nicht aus so grosser Entfernung kommen, dass wir sie als parallel ansehen können, sondern von einem Punkte ausstrahlen, dessen Entfernung gegen die Focallänge der Linse nicht als unendlich gross betrachtet werden kann, so stellt AMB Fig. 25 einen Gegenstand vor, dessen einzelne Punkte dieser Bedingung genügen, wenn wieder CF die Brennweite ist. Senden die einzelnen Punkte Lichtstrahlen aus, so werden die von einem, z. B. von M, ausgehenden sich auf einem Punkte M^1 der Axe vereinigen, welcher jenseits des Brennpunktes F, aber demselben um so näher liegen muss, je mehr sich die von M ausgehenden Strahlen dem Parallelismus nähern, d. h. je weiter der Gegenstand AB von der Linse absteht. Die von A ausgehenden Strahlen müssen einander in einem Punkte A' schneiden, welcher auf der Verlängerung der Geraden AC und normal unter M' liegt; die von B ausgehenden in B', auf der Geraden BC normal über M' liegend; alle von Punkten des Gegenstandes zwischen A und B divergirenden Strahlen convergiren in Punkten zwischen A' und B'; die Linse erzeugt im Abstand CM' ein sogenanntes reelles Bild des Gegenstandes AB, welches umgekehrt steht. In Fig. 25 ist der Gegenstand weiter entfernt als das Bild, daher dieses verkleinert erscheint; wäre das Umgekehrte der Fall, wäre z. B. $A'B'$ der Gegenstand, so würde AB sein durch die Linse erzeugtes Bild sein, dasselbe wäre also vergrössert. Genau gleiche Grösse haben beide nur, wenn sie den gleichen Abstand, nämlich $2 \cdot CF$ von der Linse haben. Wäre der Gegenstand in so grosser Entfernung, dass wir die auf die Linse fallenden Strahlen als parallel ansehen

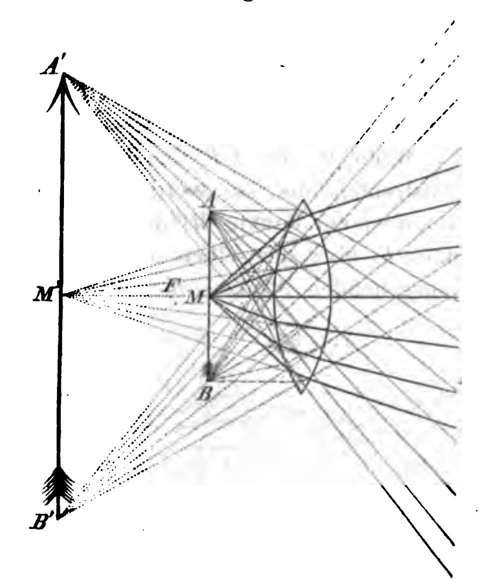
Fig. 25.



müssen, so würde das Bild im Brennpunkt der Linse entstehen und fast verschwindend klein sein.

Bringen wir endlich einen Gegenstand *AB* so nahe an die Linse, dass er sich zwischen derselben und ihrem Brennpunkt befindet, Fig. 26, so divergiren die von den einzelnen Punkten des Gegenstandes ausgehenden Strahlen stärker, als wenn sie aus dem Focus *F* kämen, sie treffen dieselbe Stelle der Linse unter grösserem Einfallswinkel, haben also auch grösseren Brechungswinkel und können demnach nicht einander parallel aus der Linse austreten, wie in obigem Falle, sondern müssen noch divergiren, wenn auch viel weniger, als vor der Linse. Die von *M* ausgehenden Strahlen, in Fig. 26 mit starken Geraden ausgezeichnet, divergiren jenseits der Linse noch und werden daher auf ein unmittelbar hinter derselben befindliches Auge den Eindruck machen, als ob sie von dem Punkte *M'*, nach welchem hin sie convergiren, ausgegangen wären (vergl. S. 22); die von *A* aus auf die Linse fallenden (schwach ausgezogenen) divergiren so, als ob sie von *A'*, die von *B* aus (punktirt), als ob sie von *B'* kämen.

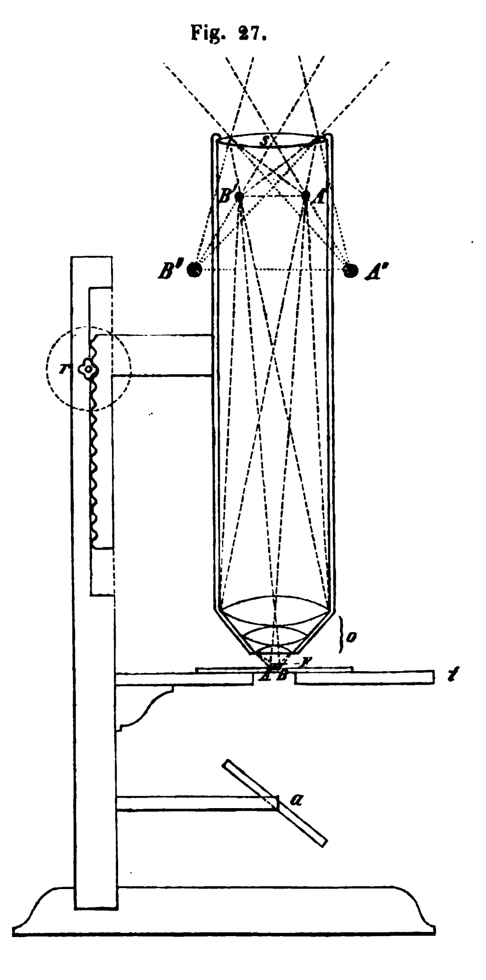
Fig. 26.



Das Auge erblickt also in grösserer Entfernung hinter der Linse, nämlich in *A'B'* ein vergrössertes aufrecht stehendes **virtuelles** Bild des Gegenstandes *AB*. Eine in dieser Weise zur Vergrösserung naher Gegenstände angewandte Linse nennt man eine einfache **Lupe**. Die zusammengesetzte Lupe oder das **Mikroskop** dient dazu, eine stärkere Vergrösserung, als sie mit der einfachen möglich ist, zu erreichen. Dasselbe besteht, in Fig. 27 in verticalem Durchschnitt dargestellt, aus dem **Objectiv** *o*, einer Linse von sehr kurzer Brennweite oder mehrerer unmittelbar auf einander liegender Linsen, welche zusammen wie **eine** von sehr kurzer Brennweite wirken, und dem **Ocular** *s*, einer Lupe von grösserer Focaldistanz. Beide sind an den entgegengesetzten Enden eines innen geschwärzten Rohres befestigt. Wird dieses Instrument nun einem sehr kleinen Gegenstand *AB*, welcher auf einer von unten durch den das Licht des hellen Himmels reflectirenden Spiegel *a* erleuchteten Glasplatte liegt, so genähert, dass derselbe nur ganz wenig ausserhalb des Focus *F* des Objectivs sich befindet, so wird nach S. 31 in grosser Entfernung von *o*, in *A'B'*, ein reelles vergrössertes Bild des Gegenstandes erscheinen. Dieses Bild entsteht inner-

halb der Focallänge des Oculars, folglich wird es, durch Letzteres betrachtet, als virtuelles, noch mehr vergrössertes Bild in $A''B''$ gesehen werden. Gewöhnlich legt man zur mikroskopischen Beobachtung das Object auf eine Glasplatte und diese auf den aus Metall bestehenden und in der Mitte durchbohrten Objectträger *t*, welcher fest mit dem Stativ des Instrumentes verbunden ist, während dieses selbst durch ein Zahnrad *r* auf und nieder bewegt und somit in die erforderliche Entfernung vom Object gebracht werden kann.

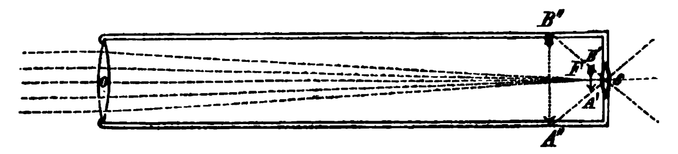
Fig. 27.



Eine weitere Anwendung von Linsen besteht in ihrer Zusammensetzung zu einem Fernrohr. Dieses Instrument, Fig. 28, besteht ebenfalls aus zwei Linsen oder zusammengesetzten Linsensystemen, dem Objectiv *o* und dem Ocular *s*, aber hier ist das erstere von grosser, das letztere von kleiner Brennweite. Da das Instrument stets zur Betrachtung entfernter Gegenstände dient, so entsteht ein reelles Bild $A'B'$ eines solchen (AB) ganz nahe dem Brennpunkt *F* des Objectivs, folglich nach S. 32 sehr verkleinert. Fällt nun in *F* zugleich der Focus des Oculars *s* (d. h. ist der Abstand beider Linsen gleich der Summe ihrer Brennweiten), so befindet sich das Bild $A'B'$ zwischen dem Ocular und dessen Brennpunkt;



Fig. 28.



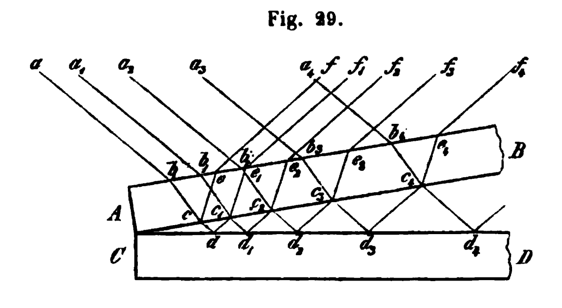
durch diese stark gekrümmte Linse betrachtet wird es demnach als bedeutend vergrössertes virtuelles Bild in $A''B''$ erblickt werden.

§. 11. **Interferenz des Lichtes.** Wenn das Licht, wie Eingangs des

Paragraphen 7 angenommen wurde, eine Wellenbewegung des Aethers ist, so müssen zwei Lichtstrahlen, welche eine und dieselbe Reihe von Aethertheilchen gleichzeitig in Bewegung setzen, auch interferiren, d. h. sich zu einer Bewegung zusammensetzen, deren Amplitude (Intensität) und Schwingungszustand von den Amplituden und der Phasendifferenz der interferirenden Strahlen abhängt So müssen z. B. zwei Lichtstrahlen von gleicher Helligkeit, gleicher Schwingungsrichtung und Wellenlänge (Farbe), welche eine halbe oder eine ungrade Zahl halber Wellenlängen gegen einander verzögert sind, einander vollständig vernichten, Dunkelheit hervorbringen u. s. f., wie es §. 4 für Wellenbewegungen überhaupt auseinander gesetzt ist.

Die einfachsten Interferenzerscheinungen des Lichtes sind die von Newton zuerst genauer untersuchten, an dünnen Platten einer beliebigen Substanz auftretenden. Seien AB und CD Fig. 29 die senkrechten Durchschnitte zweier planparallelen Platten eines durchsichtigen Körpers, z. B. Glas, und die eine gegen die andere so gestellt, dass sich zwischen beiden eine sehr dünne keilförmige Luftschicht befindet (welche in der Figur nur der Deutlichkeit wegen breit gezeichnet ist). Sei ferner die ganze Fläche der oberen Platte von parallelen Strahlen einer bestimmten Farbe, deren Richtung $\parallel ab$, getroffen, welche also von einem sehr fernen Punkte ausgehen, so wird uns selbstverständlich die ganze Oberfläche von AB spiegelnd erscheinen, wenn sich das Auge vertical über B befindet, weil alle Strahlen ab, $a_1 b_1$ etc. theilweise an derselben reflectirt werden. Ausserdem aber wird ein Theil der Bewegung in das Glas eindringen, und zwar wird der Strahl ab in b gebrochen werden in die Richtung bc; in c, an der Grenze von Glas und Luft, erfährt derselbe eine erneute Theilung, indem der eine Theil nach ce reflectirt wird, wobei bc und ce gleiche Winkel mit der Grenzfläche bilden, der andere Theil in die Luft austritt in der Richtung cd, welche parallel ab sein muss; dieser letztere Strahl wird in d, während er theilweise natürlich auch in CD eindringt, wieder nach dem Reflexionsgesetz zurückgeworfen, gelangt also nach c_1, von da gebrochen nach e_1 und tritt in die Luft aus in der Richtung $e_1 f_1 \parallel d c_1$. Unter den unzähligen, auf alle Punkte der Oberfläche AB auffallenden Strahlen betrachten wir nun denjenigen a_1, welcher, in b_1 gebrochen, genau an der Stelle c_1 theilweise reflectirt wird, an welcher der vorige, in d reflectirte Strahl wieder in das Glas eintritt und sich in demselben bis e_1 fortpflanzt. In der Geraden $e_1 f_1$, welche in ihrer Verlängerung das Auge des Beobachters treffen soll, pflanzen

Fig. 29.



sich demnach gleichzeitig zwei Bewegungen fort, diejenige des Lichtstrahles, welche den Weg $a_1 b_1 c_1 e_1 f_1$, und dessen, welche den Weg $a b c d c_1 e_1 f_1$ zurückgelegt hat. Wenn diese beiden Bewegungen auch von derselben Lichtquelle ausgegangen sind und daher in gleicher Entfernung von derselben gleichen Schwingungszustand haben, so gelangen sie hier in die gleiche Bahn, nachdem der zweite einen längern Weg hat zurücklegen müssen; der Schwingungszustand, in welchem er in einem bestimmten Augenblicke bei e_1 austritt, ist bei dem ersten Strahl an einer Stelle, um deren Entfernung von e_1 er bereits vorangeeilt ist. Der zweite ist gegen den ersten verzögert um die Strecke, welche sein Weg von der Lichtquelle aus grösser, als der jenes ist; die beiden Strahlen treten in e_1 aus mit einer Phasendifferenz, welche von der Grösse jener Strecke abhängt. Diese Grösse ist $cd + dc_1$, also um so kleiner, je geringer der Abstand der oberen von der unteren Glasplatte ist. Seien nun an der in Rede stehenden Stelle diese beiden so nahe an einander, dass die Strecke $cd + dc_1$ gleich einer halben Wellenlänge des einfallenden monochromatischen Lichtes ist, so werden die beiden obigen Strahlen in e_1 austreten, der eine aber um $\frac{1}{2}\lambda$ verzögert sein, beide also gleichzeitig an jedem Punkte ihrer gemeinschaftlichen Bahn $e_1 f_1$ genau entgegengesetzten Schwingungszustand besitzen und sich demnach, wenn ihre Intensität genau gleich ist, vollständig vernichten, d. h. in der Richtung $e_1 f_1$ wird kein Licht in das Auge des Beobachters gelangen. Sind dagegen beide Strahlen nicht genau gleich hell, so wird noch die Differenz ihrer Amplituden übrig bleiben, also keine vollständige Dunkelheit in der angegebenen Richtung erzeugt werden.

Vergleichen wir jetzt zwei andere, in entsprechendem Verhältniss stehende Strahlen, z. B. $a_1 b_1 c_1 d_1 c_2 e_2 f_2$ und $a_2 b_2 c_2 e_2 f_2$, so bewegen sich diese von e_2 aus in derselben Geraden, während jedoch der erstere eine Verzögerung um die Strecke $c_1 d_1 + d_1 c_2$, gegenüber dem zweiten, erfahren hat; sei diese $= \frac{3}{4}\lambda$ des angewandten Lichtes, so werden die Lichtstrahlen in $e_2 f_2$ interferiren mit dieser Phasendifferenz, also sich zu einer einzigen Wellenbewegung zusammensetzen, welche, wie S. 11 Fig. 7 gezeigt worden ist, um $\frac{1}{8}\lambda$ verschoben ist und eine Amplitude besitzt, welche grösser als die der Einzelbewegungen, aber kleiner als deren Summe ist. In der Richtung $e_2 f_2$ wird also Licht von der einer solchen Amplitude entsprechenden Helligkeit in das Auge des Beobachters gelangen. Gehen wir zu den Strahlen $a_2 b_2 c_2 d_2 c_3 e_3 f_3$ und $a_3 b_3 c_3 e_3 f_3$ über, so ist bei deren Interferenz in der Geraden $e_3 f_3$ der erstere um die Weglänge $c_2 d_2 + d_2 c_3$ verzögert; diese ist grösser als im vorigen Falle; sie sei gleich der Wellenlänge des angewandten Lichtes λ, so haben die beiden Strahlen bei ihrem Austritt aus dem Glase in e_3 genau gleichen Schwingungszustand, setzen sich also zu einer Schwingung von derselben Phase zusammen, deren Amplitude die Summe der Amplituden der beiden Strahlen ist. In der Richtung $e_3 f_3$ erblickt der Beobachter demnach Licht von einer Helligkeit, gleich der Summe der Helligkeit der interferirenden Lichtstrahlen, d. i. das Maximum der Hellig-

keit, welches bei einer derartigen Interferenz möglich ist. Von dem Minimum, welches in der Richtung $e_1 f_1$ erscheint, zu diesem Maximum muss ein allmäliger Uebergang stattfinden. Für die folgenden, einander in gleicher Weise entsprechenden Paare von Lichtstrahlen wird nun der Abstand der beiden Glasplatten immer grösser, also auch die Verzögerung des einen gegen den andern. Dasjenige Paar, welches mit $\frac{3}{4}\lambda$ Phasendifferenz interferirt, wird um $\frac{1}{4}\lambda$ im Schwingungszustand gegen einander verschoben sein, also einen Strahl von etwas geringerer Helligkeit als das letztere liefern (vergl. Fig. 6 S. 11). Ein weiteres Paar wird eine Phasendifferenz von $\frac{3}{2}\lambda$ erhalten, also mit genau entgegengesetztem Schwingungszustand interferiren, somit wird dasselbe Minimum der Helligkeit resultiren, als in der Richtung $e_1 f_1$. Denkt man sich dieselbe Construction und Betrachtung für immer grössere Dicke der zwischen den Glasplatten befindlichen dünnen Luftschicht fortgesetzt, so ergiebt sich folgendes Resultat: Ein Beobachter, welcher nach der Oberfläche der Platte AB in der Richtung hinblickt, in welcher das von der obern und untern Grenzfläche der Luftschicht zwischen AB und CD reflectirte Licht die obere Platte verlässt, sieht eine regelmässige Folge von hellen und dunkeln Streifen, welche sämmtlich der Kante, mit der AB auf CD aufliegt, parallel laufen, also senkrecht zu dem verticalen Durchschnitt Fig. 29 stehen.

Würde man darauf das Licht einer anderen Farbe, z. B. von grösserer Wellenlänge, auf die Glasplatten fallen lassen, so würde an der Stelle, an welcher vorher der erste dunkle Streifen entstand, weil die beiden dort interferirenden Strahlen einer Phasendifferenz von $\frac{1}{2}\lambda$ der früher benutzten Farbe hatten, jetzt noch keine vollständige Auslöschung eintreten, da eine halbe, jetzt grössere, Wellenlänge Wegdifferenz erst Strahlen erhalten können, die an einer dickeren Stelle der Luftschicht reflectirt werden. Mit Licht von grösserer Wellenlänge beleuchtet, werden die Platten also ebenfalls helle und dunkle Streifen zeigen, dieselben werden aber weiter von der Berührungslinie derselben und ebenso weiter von einander abstehen.

Das weisse Licht besteht nach Früherem aus einer Mischung sehr verschiedener Farben, welche nur dann den Eindruck des Weiss machen, wenn sie in einem bestimmten Helligkeitsverhältniss gemischt sind. Die Erscheinungen, welche wir beobachten, wenn wir weisses Licht auf jene Glasplatten fallen lassen, sind nun andere und complicirtere als vorher. Betrachten wir die Stelle sehr nahe an der Berührungslinie der Platten, an welcher die Luftschicht so dünn ist, dass die beiden an der oberen und der unteren Seite derselben reflectirten Lichtstrahlen eine Wegdifferenz haben, welche nur $\frac{1}{2}\lambda$ des violetten Lichtes beträgt, dessen Wellenlänge die kleinste unter denen aller Farben ist. Die Strahlen dieser Farbe werden hier vollständig ausgelöscht, nicht so jedoch diejenigen der anderen im Weiss enthaltenen Farben, welche auf derselben Stelle auffallen; diese letzteren erhalten durch die Interferenz zwar eine Schwächung ihrer Helligkeit, die aber um so geringer ist, je grössere Wellenlänge sie haben. Das an dieser

Stelle erscheinende Licht enthält also die Farben in anderem Helligkeitsverhältniss (Violett gar nicht), als das Weiss, es kann also nicht weiss erscheinen, sondern zeigt eine in diesem Falle gelbe M i s c h f a r b e. An einer benachbarten Stelle beträgt die Wegdifferenz wegen der wachsenden Dicke der Luftschicht etwas mehr, nämlich $\frac{1}{2}\lambda$ blauen Lichtes, hier wird also diese Farbe vernichtet, die andere nur geschwächt, es erscheint Orange als Gesammteindruck derselben. In noch grösserem Abstande von dem Rande der Luftschicht entsteht die Phasendifferenz $\frac{1}{2}\lambda$ des Grün; hier erscheint als Mischfarbe Roth, u. s. f. Im w e i s s e n Licht erscheinen also statt der dunkeln und hellen Streifen f a r b i g e. Diese sind aber um so blasser, je mehr sie vom Rande der Luftschicht abstehen, und da, wo diese einigermassen dick ist, sieht man nur Weiss. Die Ursache dieser Erscheinung ist folgende: an einer solchen Stelle erhalten die beiden interferirenden Strahlen eine sehr grosse Wegdifferenz, z. B. $\frac{41}{2}\lambda$ des äussersten Violett, dieses wird also ausgelöscht; dieselbe Länge ist aber auch $= \frac{39}{2}\lambda$ einer Farbe von etwas grösserer Wellenlänge, $\frac{37}{2}\lambda$ einer von noch grösserer Wellenlänge u. s. f. Es werden also aus allen Farben des Spectrums Theile von bestimmter Brechbarkeit ausgelöscht; je zahlreicher diese sind, d. h. je dicker die Luftschicht ist, desto gleichmässiger werden alle Hauptfarben des Spectrums geschwächt, desto mehr macht die entstehende Mischfarbe den Eindruck des Weiss. Man nennt dieses W e i s s d e r h ö h e r e n O r d n u n g, weil man die Farben der einzelnen Streifen vom Rande aus als solche erster, zweiter, dritter Ordnung u. s. w. bezeichnet. Diese Farbenstreifen, die sogenannten Newton'schen Farben, sieht man sehr häufig an Krystallen mit vollkommener Spaltbarkeit, wenn nämlich parallel deren Richtung sich Sprünge in denselben befinden.

Würde man statt der beiden ebenen Platten e i n e solche und eine Glaslinse anwenden, so würde man kreisförmige Farbenringe (Newton'sche Ringe) erhalten.

Man sieht leicht ein, dass die Erscheinungen der Interferenz, wenn auch andere als die hier beschriebenen, ein Mittel liefern, um die Wellenlänge des Lichtes zu bestimmen. So hat man gefunden, dass die Wellenlänge der folgenden Farben in Luft beträgt:

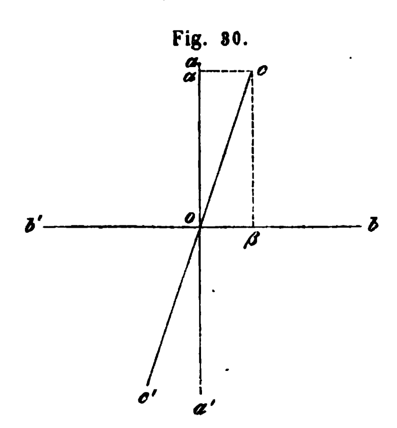
Roth der Lithiumflamme	0,000671	Millimeter.
Gelb der Natriumflamme	0,000589	,,
Grün der Thalliumflamme	0,000535	,,
Aeusserstes Violett	0,000406	,,

§. 12. **Polarisation des Lichtes.** In allen bisherigen Betrachtungen haben wir angenommen, dass der Lichtstrahl sich nach allen Seiten rings um seine Fortpflanzungsrichtung gleichartig verhalte. Eine Drehung des Strahls um jene Richtung würde also keine Aenderung seiner Eigenschaften bewirken, er selbst in keiner andern Beziehung zum Raume stehen, als diejenige, durch welche die Richtung seiner Fortpflanzung bestimmt ist. Eine solche Beziehung müsste aber stattfinden bei einem Strahl, dessen

Schwingungen in einer Ebene vor sich gehen, derselbe müsste eine Seitlichkeit in Bezug auf jene Ebene zeigen. Dies ist jedoch bei dem sogenannten gewöhnlichen Lichte nicht der Fall, und es wird daher zur Erklärung dieses Mangels an Seitlichkeit angenommen, dass ein mit gewöhnlichem Licht leuchtender Körper eine Bewegung aussendet, deren Schwingungen in sehr schneller Aufeinanderfolge ihr Azimuth wechseln, so dass zwar Schwingungen mit Seitlichkeit unser Auge treffen, aber nach einander nach äusserst kurzen Zeiträumen solche, deren Bewegung nach allen Richtungen senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung stattfindet; ein solcher Strahl wird den Eindruck eines Strahles ohne Seitlichkeit machen.

Pflanzt sich eine solche Bewegung, wie wir annehmen, dass das gewöhnliche Licht es sei, in einem isotropen Medium fort, so wird irgend ein Theilchen desselben in einem bestimmten Zeitmomente in Schwingung nach $a\,a'$ (Fig. 30) versetzt werden; bei jeder folgenden Elongation wird die Richtung derselben um einen sehr kleinen Winkel gedreht sein, also z. B. in einem gewissen Augenblicke parallel $c\,c'$ sein. Ein Impuls, welcher das Aethertheilchen von o nach c hin bewegt, wirkt ebenso, wie zwei gleichzeitig ausgeübte Impulse nach a und b, welche für sich dasselbe nach α resp. β bewegt haben würden. Da aber in den isotropen Medien die Schwingungen des Aethers, sie mögen stattfinden in welcher Richtung sie wollen, sich gleich schnell fortpflanzen, so werden an jedem folgenden Theilchen in der Fortpflanzungsrichtung, welches von der Bewegung ergriffen wird, die beiden Impulse nach a und b gleichzeitig anlangen und sich also zu einer einzigen Bewegung nach c zusammensetzen. Dieselbe Betrachtung gilt für jede Schwingungsrichtung, es muss demnach eine Bewegung, welche schnell nach einander in allen Azimuthen stattfindet, nach ihrem Eindringen in ein isotropes Mittel, den gleichen Wechsel ihrer Schwingungsrichtung beibehalten. So erklärt es sich, dass ein Strahl gewöhnlichen Lichtes in den isotropen Körpern, zu denen auch eine bestimmte Klasse der Krystalle gehört, sich als gewöhnlicher Lichtstrahl fortpflanzt.

Fig. 30.



Anders verhält sich ein solcher Lichtstrahl, wenn er in einen anisotropen Krystall eindringt; in diesem ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Bewegung eine verschiedene, je nach der Richtung, in der die Schwingung stattfindet. Erfahrungsgemäss steht die Schwingungsrichtung der am langsamsten sich fortpflanzenden, unter allen in derselben Ebene schwingenden Strahlen in den Krystallen stets senkrecht zu derjenigen der unter jenen sich am schnellsten fortpflanzenden. Ist in Fig. 30 also $a\,a'$ die Richtung, in welcher die mit der grössten Geschwindigkeit fortschreitenden Strahlen

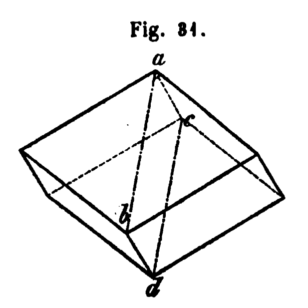
schwingen, so ist bb' die der langsamsten in derselben Ebene schwingenden. Ist o nun ein Aethertheilchen, welches von einer soeben in den Krystall eintretenden Bewegung von der Natur des gewöhnlichen Lichtes getroffen wird, und ist in einem bestimmten Augenblicke die Schwingungsrichtung jenes Lichtes aa', in einem der folgenden cc', so wird letztere Schwingung nach Obigem gleichbedeutend sein mit den Schwingungen, welche durch zwei gleichzeitige Impulse, deren einer parallel aa', der andere parallel bb' und deren Intensität im Verhältniss der Längen $o\alpha$ und $o\beta$ stehen, bewirkt werden. Diese beiden Schwingungen pflanzen sich aber mit verschiedener Geschwindigkeit fort, gelangen also zu verschiedenen Zeiten an eines der später in Bewegung gesetzten Aethertheilchen, können sich demnach dort nicht mehr zu einer Schwingung nach cc' zusammensetzen, sondern werden ihren Weg getrennt fortsetzen. In einem noch späteren Momente wird o nach einer Richtung bewegt werden, welche einen noch grösseren Winkel mit aa' macht als die Richtung cc', diese Bewegung wird also ebenfalls in zwei, parallel aa' und bb', zerlegt werden, in welchem Falle aber die Componente nach bb' einen grösseren Werth besitzt als vorher. Die gesammte Bewegung eines gewöhnlichen Lichtstrahles, dessen Schwingungsazimuth sehr schnell wechselt, wird also in zwei Lichtstrahlen zerlegt werden, von denen der eine parallel aa' schwingt und dessen Intensität mit dem Azimuth des eintretenden Strahles wechselt, und zwar in dem Moment, wo dieses parallel aa' ist, gleich der vollen Intensität des eintretenden Lichtes ist, dann abnimmt, Null wird, sobald jenes Azimuth parallel bb' ist, dann wieder wächst u. s. f. Dieser Wechsel der Intensität tritt aber so schnell ein, dass der Lichtstrahl den Eindruck eines solchen von constanter mittlerer Intensität macht, also eines, dessen Intensität gleich der Hälfte von der des eintretenden Strahles ist. Der zweite Strahl, welcher durch die Zerlegung entsteht, dessen Schwingungen parallel bb' stattfinden, hat in denselben Augenblicken die Intensität Null, wenn die des ersten im Maximum ist, nimmt zu, wenn jene abnimmt, erreicht das gleiche Maximum, wenn jene gleich Null wird u. s. f., d. h. dieser zweite Strahl macht ebenso den Eindruck eines Strahles von der constanten Helligkeit, gleich der Hälfte derjenigen des eintretenden Strahls.

Beim Eintritt eines gewöhnlichen Lichtstrahls in einen anisotropen Krystall entstehen also aus demselben zwei Lichtstrahlen von verschiedener Fortpflanzungsgeschwindigkeit, aber gleicher Helligkeit, deren Schwingungen in der senkrecht zum Strahl stehenden Ebene stattfinden, die des einen in der Richtung, welche der grössten, die des anderen in der, welche der kleinsten Lichtgeschwindigkeit der in jener Ebene schwingenden Strahlen entsprechen. Wie bereits erwähnt, lehrt die Beobachtung, dass in den Krystallen diese beiden Richtungen stets senkrecht auf einander stehen. Jeder dieser beiden Strahlen, als nur in einer Ebene seine Schwingungen vollführend, muss eine gewisse Seitlichkeit (Polarität) in Bezug auf diese Ebene zeigen und heisst desshalb ein polarisirter Lichtstrahl; da die

beiden Ebenen, in Bezug auf welche dies stattfindet, in diesem Falle senkrecht auf einander stehen, so heissen die beiden Strahlen »senkrecht zu einander polarisirt«. Da die Geschwindigkeit, mit der sich dieselben in dem Krystall fortpflanzen, für jeden eine andere ist, so haben sie auch verschiedene Brechungsquotienten (Verhältniss ihrer Geschwindigkeit in Luft, welche für beide gleich, zu der im Krystall), d. h. sie werden an der Grenze von Luft und Krystall verschiedene Ablenkung erfahren. Der vorher einfache Strahl wird also im Krystall doppelt gebrochen in zwei Strahlen von verschiedener Richtung. Deshalb nennt man die anisotropen Krystalle auch doppeltbrechende, im Gegensatz zu den »einfach brechenden« oder isotropen.

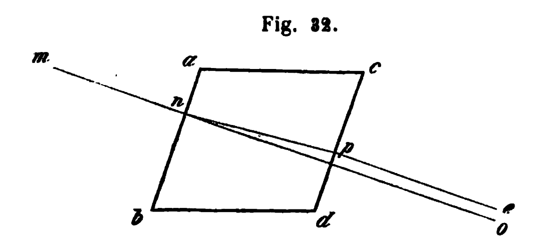
§. 13. **Doppelbrechung des Lichtes im Kalkspath.** Die Krystalle des Kalkspaths sind nach drei Richtungen, welche sich unter Winkeln von 105° 4′ schneiden, sehr vollkommen spaltbar, und da dieses Mineral sich in sehr grossen wasserhellen Krystallen in der Natur (besonders auf Island) vorfindet, ist es leicht, von demselben grosse durchsichtige Spaltungsstücke von der Form eines sogenannten Rhomboëders, Fig. 31, herzustellen.

Fig. 31.



Diese eignen sich namentlich deshalb in hohem Grade zu dem experimentellen Studium der Erscheinungen der Doppelbrechung, weil der Kalkspath die Eigenschaft besitzt, die beiden durch die Brechung in demselben entstehenden Strahlen sehr beträchtlich verschieden abzulenken. Stelle Fig. 32 einen Durchschnitt des Rhomboëders durch die 4 Eckpuncte *abcd* (Fig. 31) dar, so dass *ab* und *cd* die kurzen Diagonalen der Rhomboëderflächen sind, und lässt man nun senkrecht auf diese Flächen, parallel *mn*, ein Lichtbündel fallen, z. B. blickt man durch die beiden parallelen Rhomboëderflächen nach einer kleinen kreisrunden und beleuchteten Oeffnung in einem dunkeln Schirm, so sieht man zwei gleich helle Bilder dieser Oeffnung, woraus hervorgeht, dass ein

Fig. 32.



in der Richtung *mn* in den Kalkspath eintretender Lichtstrahl in zwei zerlegt wird, von denen einer, *no*, wie ein gewöhnlicher Lichtstrahl bei senkrechter Incidenz, ungebrochen durch den Kalkspath hindurchgeht, während der zweite, in der Ebene des Durchschnittes abgelenkt, im Krystall sich von *n* nach *p* bewegt, dort die entgegengesetzte Brechung als in *n* erfährt, also in der Richtung *pe* austritt. Da von diesen beiden Strahlen nur der erstere *no* dem Brechungsgesetz für gewöhnliches Licht (s. §. 9) folgt, so nennt man ihn den or-

dentlichen (ordinären) Strahl, den anderen den ausserordentlichen (extraordinären).

Sind diese beiden, aus einem Strahl gewöhnlichen Lichtes im Kalkspath entstandenen Strahlen polarisirte Wellenbewegungen mit den in §. 3 auseinandergesetzten Eigenschaften, so müssen dieselben einem zweiten Kalkspath gegenüber sich ganz anders verhalten, als ein gewöhnlicher Lichtstrahl, wie sich aus folgenden Betrachtungen ergiebt:

Angenommen, der ordinäre Strahl *o*, welcher aus dem Kalkspath austritt, bestehe nur aus gradlinigen Schwingungen parallel der längeren Diagonale der Rhomboëderfläche, der extraordinäre *e* aus solchen parallel der kurzen Diagonale. Möge Fig. 33 *I* und *II* die beiden Kalkspathrhomboëder, durch welche das Licht gehen soll, welche man sich also, den einen vor dem andern, zu denken hat, neben einander darstellen, so würden *oo* und *o'o'* in denselben die Schwingungsrichtungen des ordentlichen, *ee* und *e'e'* diejenigen des ausserordentlichen Strahles sein, dessen Fortpflanzungsrichtung senkrecht zur Zeichnungsebene steht. Der ordentliche Strahl mit der Schwingungsrichtung *oo*, welcher aus *I* austritt, gelangt in *II*, wenn *I* und *II* parallel sind, wie es Fig. 33 darstellt, mit der Schwingungsrichtung *o'o'*, hier wird die Bewegung zerlegt in eine solche nach *o'o'* und eine nach *e'e'*; der auf letztere Richtung fallende Antheil derselben ist jedoch gleich Null, die Componente parallel *o'o'* gleich der Intensität des in *II* eintretenden ordentlichen Strahls; dieser wird also im zweiten Kalkspath nicht doppelt gebrochen, sondern geht vollständig als ordentlicher Strahl durch denselben. Denken wir uns jetzt *II* um einen kleinen Winkel gedreht, s. Fig. 34, so tritt der ordentliche Strahl aus *I* mit der Schwingungsrichtung $\omega\omega$ in *II* ein, wird hier in zwei Strahlen zerlegt, welche nach *o'o'* und *e'e'* schwingen, und deren Intensitäten sich verhalten, wie die Längen *CO* und *CE*, d. h. er geht nicht mit seiner vollen Intensität als ordentlicher Strahl hindurch, der Rest als ausserordentlicher.

Fig. 33.

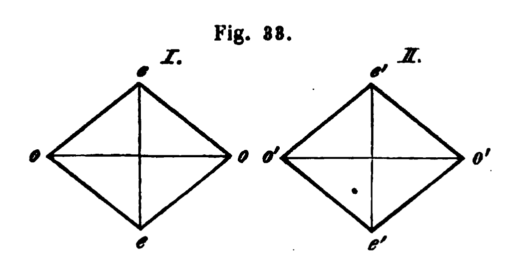
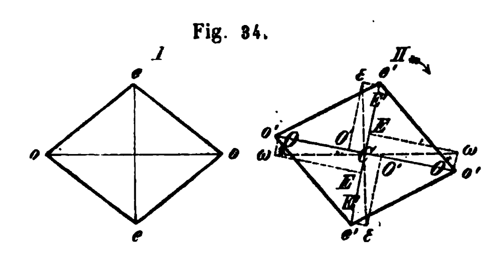


Fig. 34.



In diesem Falle wird der ordentliche Strahl aus dem ersten Kalkspath im zweiten also doppelt gebrochen, liefert aber zwei Strahlen von verschiedener Intensität. Bei einer weiteren Drehung des Kalkspaths *II*, Fig. 35, wenn derselbe nämlich 45° mit *I* bildet, wird der ordentliche Strahl in *II* in zwei gleich grosse Componenten zerlegt, er liefert

also zwei gleich helle Strahlen, einen ordinären und einen extraordinären; demnach geht er nur zur Hälfte als ordentlicher Strahl durch den zweiten Kalkspath. Je weiter man nun *II* dreht, ein um so kleinerer Antheil desselben geht als ordentlicher Strahl durch denselben; bei der in Fig. 36 dargestellten Stellung, in welcher *I* und *II* rechtwinkelig gekreuzt erscheinen, tritt der aus *I* herauskommende ordinäre Strahl in *II* mit der Schwingungsrichtung $e'e'$ ein, wird also in zwei senkrechte Componenten zerlegt, deren erste, parallel $o'o'$, gleich Null, deren zweite, parallel $e'e'$, gleich der ganzen Intensität des eintretenden Lichtes ist; der Strahl o kann also gar nicht mehr als ordinärer Strahl durch den zweiten Kalkspath hindurchgehen, er geht ganz als extraordinärer hindurch. Theilweise als ordentlicher gelangt er wieder durch *II* bei weiterer Drehung dieses, vollständig, wenn die gesammte Drehung $= 180^0$ ist, und es ist einleuchtend, dass völlig das Gleiche eintreten muss, wenn die Drehung, von der Stellung in Fig. 33 ausgehend, nach links herum, statt nach rechts, stattgefunden hätte. Denken wir uns durch ee, resp. durch $e'e'$ und die Fortpflanzungsrichtung des Strahls eine Ebene gelegt, und nennen diese einen Hauptschnitt des Kalkspathes, so ist diese Ebene insofern charakteristisch für den aus dem ersten Rhomboëder austretenden ordinären Strahl, als derselbe ganz als ordentlicher durch *II* hindurchgeht, wenn der Hauptschnitt von *II* parallel dem von *I*, um so weniger, je grösser der Winkel ist, welchen die Hauptschnitte beider einschliessen, endlich gar nicht, wenn dieselben senkrecht auf einander stehen. Wir wollen deshalb diese für den Strahl o so charakteristische Ebene seine Polarisationsebene nennen, und ihn als einen im Hauptschnitt polarisirten Strahl bezeichnen.

Fig. 35.

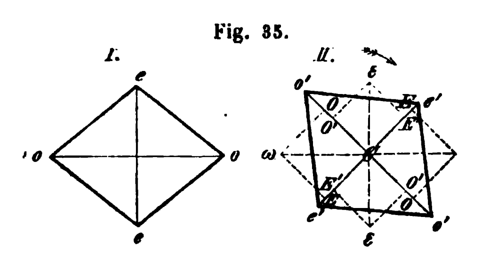
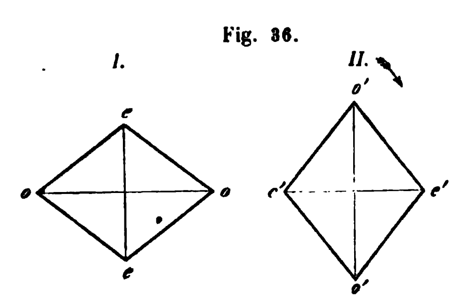
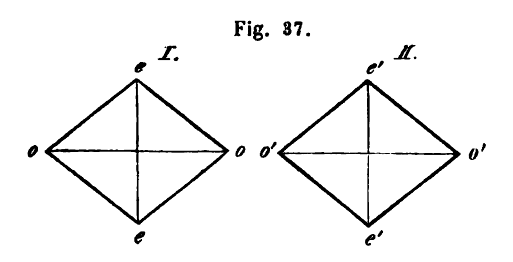


Fig. 36.



Betrachten wir nunmehr den zweiten, ausserordentlichen Lichtstrahl, welcher aus Kalkspath *I* austritt, unter denselben Voraussetzungen, so zeigt Fig. 37, dass dieser in *II* mit der Schwingungsrichtung $e'e'$ eintretend, in zwei Componenten

Fig. 37.



nach $o'o'$ und $e'e'$ zerlegt wird, deren erste gleich Null ist; dies ist aber die Schwingungsrichtung des ordentlichen Strahls, also kann bei paralleler Stellung der Kalkspathe der Strahl e aus I gar nicht als ordentlicher Strahl durch II hindurchgehen. Drehen wir II um einen Winkel, s. Fig. 38, so tritt e mit der Schwingungsrichtung $\varepsilon\varepsilon$ ein und wird in die beiden Componenten CO' und CE' zerlegt, jetzt geht also der extraordinäre Strahl des ersten Kalkspaths theilweise als ordentlicher durch den zweiten, und zwar ein um so grösserer Antheil, je weiter wir drehen. Steht endlich, wie in Fig. 39, die zum Hauptschnitt des zweiten Kalkspaths senkrechte Ebene, welche durch $o'o'$ und die Fortpflanzungsrichtung des Strahles bestimmt ist, parallel dem Hauptschnitt, so muss der aus I austretende extraordinäre Strahl vollständig als ordinärer Strahl durch II hindurchgehen; bei noch weiterer Drehung wieder nur unvollständig u. s. f. Dem Hauptschnitt des ersten Kalkspaths muss also parallel sein die senkrecht zum Hauptschnitt stehende Ebene des zweiten, damit der Strahl e als gewöhnlicher vollständig durch letzteren hindurchgelangen kann; einen je grösseren Winkel jene beiden Ebenen mit einander einschliessen, um so weniger kann von jenem als ordentlicher Strahl durch II hindurch. Die Ebene, welche senkrecht zum Hauptschnitt steht, ist also ganz in gleicher Weise charakteristisch für den extraordinären Strahl, wie es der Hauptschnitt selbst für den ordinären ist; man nennt deshalb jene die Polarisationsebene des ausserordentlichen Lichtstrahls, und sagt, dieser sei senkrecht zum Hauptschnitt polarisirt.

Fig. 38.

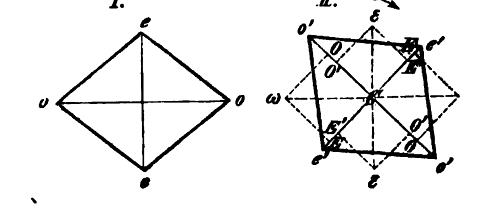
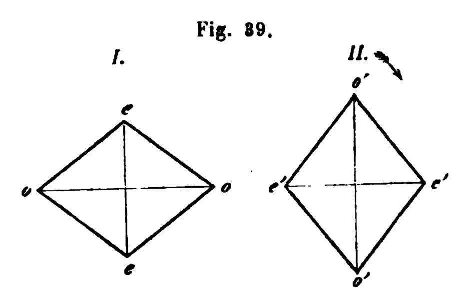


Fig. 39.



Dass die beiden, aus einem Kalkspath austretenden Lichtstrahlen sich in der That einem zweiten Kalkspath gegenüber ganz anders verhalten, als gewöhnliches Licht, und zwar genau in der soeben aus bestimmten Annahmen gefolgerten Art und Weise, dies kann man leicht durch folgenden Versuch prüfen:

Vor einem undurchsichtigen Schirm mit einer kreisrunden kleinen Oeffnung, welcher so aufgestellt wird, dass diese von der Rückseite erleuchtet erscheint, bringt man ein Kalkspathrhomboëder in der Stellung an, dass zwei parallele Flächen desselben vertical stehen, beim horizontalen Hindurchsehen nach der hellen Oeffnung also die Lichtstrahlen mit senkrechter

Incidenz auffallen. Ist dann der Kalkspath in seiner Fassung drehbar um eine Axe, parallel der Richtung des auffallenden Lichtes, so lässt sich leicht bestimmen, welches von den beiden nunmehr sichtbaren Bildern der Oeffnung das ordentliche, welches das ausserordentliche ist, da ersteres, als nicht abgelenkt, beim Drehen des Rhomboëders stehen bleibt, letzteres, welches im Hauptschnitt abgelenkt ist, mit dessen Drehung sich im Kreise um das ordentliche Bild herumbewegt. Bringt man jetzt vor diesen Kalkspath einen zweiten, gleich gross und ebenso gefasst, in vollkommen paralleler Stellung an, und blickt durch beide hindurch nach der hellen Oeffnung, so sieht man, dass das ordentliche Bild *o* ganz als ordentliches Bild hindurchgeht, ohne abermals doppelt gebrochen zu werden, ebenso wenig wie das zweite, welches dagegen als extraordinäres Bild durch Kalkspath *II* geht, da es eine weitere Ablenkung um den gleichen Betrag, wie die in *I*, erleidet. Dreht man nun den vorderen Kalkspath in seiner Fassung nach rechts oder links, so erscheinen vier Bilder der Oeffnung, aber von verschiedener Helligkeit, und man sieht an der Ablenkung leicht, dass jedes der Bilder *o* und *e* in ein ordinäres und ein extraordinäres zerlegt worden ist. Je weiter man dreht, desto mehr nimmt die Helligkeit des ordinären, aus dem ersten ordentlichen entstandenen, und des extraordinären Bildes, welches aus dem ausserordentlichen entstanden ist, ab, während die Helligkeit der beiden andern Bilder fortwährend zunimmt; bei 45° Drehung sind alle vier Bilder gleich hell; wenn die Hauptschnitte beider Kalkspathe senkrecht auf einander stehen, verschwinden das ordentliche Bild von *o* und das ausserordentliche von *e* ganz, es erscheinen nur zwei Bilder, das abgelenkte, also ausserordentliche, von *o*, und das nicht weiter gebrochene, also ordentliche Bild von *e*. Nach einer Drehung von 180° erscheint nur ein einziges Bild, da *e* im zweiten Kalkspath um gleich viel nach der entgegengesetzten Richtung abgelenkt wird, als im ersten, also nach seinem Austritt mit dem Bilde *o* zur Deckung kommt. Bei einer ganzen Drehung eines der beiden Kalkspathe um 360° giebt es, wie die Beobachtung zeigt, nur vier Stellungen (wenn sich nämlich die Hauptschnitte beider unter 45° durchschneiden), in denen die aus dem ersten Rhomboëder austretenden Strahlen *o* und *e* sich wie gewöhnliche Lichtstrahlen verhalten, d. h. in zwei gleich helle zerlegt werden. In allen andern Stellungen entstehen zwei Strahlen von ungleicher Intensität aus denselben, bei parallelen oder senkrecht sich durchkreuzenden Hauptschnitten endlich werden sie gar nicht mehr doppelt gebrochen*). Dieses Verhalten der aus dem ersten Kalkspath austretenden Strahlen gegenüber dem zweiten ist nun aber genau dasselbe, welches sie nach den Betrachtungen am Eingang dieses § zeigen müssen, unter der Voraussetzung, dass sie aus linearen polarisirten Schwingungen parallel *oo* und *ee* (Fig. 33 u. f.) bestehen. Diese Annahme über

*) Diese Erscheinungen sind geeignet, gradlinig polarisirtes Licht von gewöhnlichem zu unterscheiden, zu welchem Zwecke unser Auge nicht befähigt ist.

die Natur des im Kalkspath doppelt gebrochenen Lichtes erklärt also die beobachteten Erscheinungen aufs Vollständigste. Die Vibrationsrichtung des polarisirten Lichtes muss stets einen Winkel mit der des Strahles einschliessen, da longitudinale Schwingungen, bei denen jener Winkel gleich Null ist, niemals irgend eine Seitlichkeit zeigen können. Was die Grösse dieses Winkels betrifft, so folgt dieselbe aus zwei von Arago und Fresnel gefundenen, empirischen Gesetzen. Dieselben Physiker beobachteten nämlich 1) dass zwei Lichtstrahlen mit parallelen Polarisationsebenen interferirten, wie gewöhnliches Licht; 2) dass zwei senkrecht zu einander polarisirte Strahlen gar nicht interferirten.

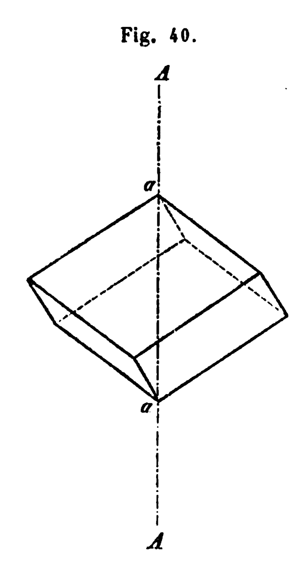
In der Mechanik wird bewiesen, dass nur solche gradlinig polarisirte Wellenbewegungen ein derartiges Verhalten zeigen können, deren Vibrationen senkrecht zur Richtung ihrer Fortpflanzung stattfinden. Das aus einem Kalkspath austretende polarisirte Licht kann also nur aus solchen Schwingungen bestehen, welche in einer Ebene (Schwingungsebene) und senkrecht zum Strahl stattfinden. Die am Kalkspath beobachteten Erscheinungen sind nur dann möglich, wenn die Schwingungen des ordinären Strahles senkrecht zu denen des extraordinären stattfinden, aber sie sind ebenso erklärlich durch die Annahme, dass bei jedem der beiden Strahlen seine Schwingungsebene parallel seiner Polarisationsebene sei, oder einen rechten Winkel damit bilde. Wir haben in unsern obigen Betrachtungen das letztere angenommen, dass nämlich die Schwingungen des ordinären Strahles parallel *oo* und *o'o'* (Fig. 33 u. f.), d. h. senkrecht zum Hauptschnitt, die des extraordinären parallel *ee*, resp. *e'e'*, d. h. im Hauptschnitt, stattfinden. Es lässt sich aber mit Hülfe der Figuren 33 bis 39 leicht übersehen, dass die entgegengesetzte Annahme, dass der ordentliche Strahl im Hauptschnitt, || *ee* und *e'e'*, der ausserordentliche senkrecht dazu schwingt, das gleiche Resultat, wie die dort angestellten Betrachtungen liefert, dass aber eine dritte Möglichkeit nicht existirt. Zwischen beiden Annahmen ist eine experimentelle Entscheidung, welche die richtige sei, noch nicht getroffen; beide sind gleich geeignet zur Erklärung der optischen Erscheinungen. Im Folgenden wollen wir, wie bisher, annehmen, dass die Schwingungsebene eines linear polarisirten Strahles senkrecht zu seiner Polarisationsebene stehe.

Wir sahen, dass ein Strahl gewöhnlichen, unpolarisirten Lichtes in zwei gleich helle Strahlen zerlegt wird, wenn er einen Kalkspath passirt; die Summe der Helligkeiten dieser beiden Strahlen ist nun gleich der Helligkeit des eintretenden gewöhnlichen Lichtes; demnach kann dieses ebenfalls nur aus transversalen, senkrecht zum Strahl stattfindenden Vibrationen bestehen, da eine andere Art von Schwingung im Kalkspath vernichtet worden wäre. Darnach bleibt nur die anfänglich gemachte Annahme über die Natur des gewöhnlichen Lichtes übrig, dass dasselbe nämlich linear polarisirtes, senkrecht zur Richtung des Strahls schwingendes Licht ist, dessen Schwingungsazimuth, oder, was dasselbe bedeutet, dessen Polarisationsebene fortwährend

sehr schnell wechselt. Dass diese Annahme in der That eine berechtigte ist, beweist das folgende, von Dove angegebene Experiment: lässt man einen Kalkspath, auf dessen eine Rhomboëderfläche ein gewöhnlicher Lichtstrahl auffällt, folglich der entstehende ordinäre Strahl in derselben Richtung an der entgegengesetzten Fläche austritt, um diese Richtung als Drehungsaxe sehr schnell rotiren, so zeigt der austretende ordinäre Strahl einem zweiten Kalkspath gegenüber nicht mehr das Verhalten eines polarisirten, sondern das eines gewöhnlichen Lichtstrahls. Hier hat man es aber bestimmt mit einem gradlinig polarisirten Strahle zu thun, nur dass seine Polarisationsebene (der Hauptschnitt des Kalkspathes) durch dessen Rotation ihre Richtung fortwährend sehr schnell ändert.

§. 14. **Doppelbrechung des Lichtes im Kalkspath** (Forts.). **Einaxige Krystalle.** Wenn auf eine Rhomboëderfläche des Kalkspathes ein Lichtstrahl senkrecht auffällt, so beobachten wir, dass der ordentliche Strahl gar nicht, der ausserordentliche in der Ebene des Hauptschnittes abgelenkt wird (s. §. 13); steht dagegen die Richtung des einfallenden Lichtes schief gegen die Rhomboëderfläche, befindet sich jedoch im Hauptschnitt, so findet man, dass die Richtungen beider entstehenden Strahlen, welche natürlich beide eine Ablenkung erfahren, sich ebenfalls im Hauptschnitt befinden. Dasselbe geschieht, wenn statt des einen parallelen Flächenpaares, welches das Rhomboëder begrenzt, eines der beiden andern genommen worden wäre. In jedem dieser drei Fälle ist die Lage des Hauptschnittes eine andere, da sie durch die Normale zur Rhomboëderfläche und durch die Schwingungsrichtung des entstehenden ausserordentlichen Strahls bestimmt ist; die Hauptschnitte für das erste, zweite und dritte Flächenpaar des Rhomboëders schneiden sich aber in einer Richtung *AA* Fig. 40, mit welcher die drei oberen und folglich auch die drei unteren Flächen des Rhomboëders, wenn es so gestellt wird, wie in Fig. 40, gleiche Winkel bilden. Nennen wir diese Richtung*) die Axe des Rhomboëders, so können wir den optischen Hauptschnitt desselben für einen auf eine Rhomboëderfläche auffallenden Strahl nunmehr definiren als diejenige Ebene, in welcher das Einfallsloth (d. h. die Normale zur Rhomboëderfläche) und die Axe des Rhomboëders gelegen sind. Lässt man nun Lichtstrahlen unter verschiedenen Winkeln, aber immer in einem

Fig. 40.



*) Denken wir sie uns durch zwei gegenüberliegende Ecken des Rhomboëders gelegt, so schneiden sich in einem ihrer Punkte, nämlich a, drei gleichwinkelige Kanten, ebenso in a_1.

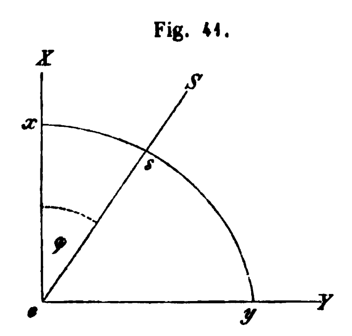
solchen Hauptschnitt, geneigt auffallen, und bestimmt den Brechungsexponent der beiden durch Doppelbrechung entstehenden Strahlen für jeden derselben, so ergiebt sich, dass derjenige des ordinären Strahls immer derselbe bleibt, unter welchem Winkel das Licht auch einfällt, nämlich für mittlere Farben den Werth $\omega = 1{,}654$ besitzt. Es war dies auch schon deshalb zu erwarten, weil dieser Strahl für alle im Hauptschnitt liegenden Neigungen des einfallenden Lichtes stets dieselbe Schwingungsrichtung besitzt, nämlich nach unserer Annahme die Normale zum Hauptschnitt. Bestimmt man unter gleichen Verhältnissen den Brechungsexponent des ausserordentlichen Strahles, so ergibt sich dieser verschieden, je nach der Richtung, in welcher er sich im Kalkspath bewegt, und die ja mit der Richtung des einfallenden Strahls wechselt; und zwar ist dieser Brechungsexponent genau gleich dem des ordinären Strahls (1,654), wenn der extraordinäre sich parallel der Axe fortpflanzt, er ist um so kleiner, je grösser der Winkel zwischen seiner Richtung und der Axe ist, und hat seinen kleinsten Werth $\varepsilon = 1{,}483$ senkrecht zur Axe.

Wählen wir jetzt statt eines jener oben definirten drei Hauptschnitte irgend eine Ebene, welche sich mit jenen drei in der Axe schneidet, und schleifen wir senkrecht zu derselben eine ebene Fläche an den Kalkspath an, durch welche das Licht eintritt, — so beobachten wir, dass die Brechungsexponenten der unter verschiedenen Neigungen in jener Ebene auffallenden Strahlen genau dieselben Werthe haben, wie sie im vorhergehenden Falle bei gleichem Neigungswinkel gegen die Axe gefunden wurden. Für diese beliebig gewählte Ebene sind die optischen Verhältnisse des Krystalls ganz dieselben, wie für die oben definirten drei Hauptschnitte, folglich können wir diese ebenfalls als einen solchen bezeichnen, und nennen nun ganz allgemein den optischen Hauptschnitt eines einfallenden Strahles diejenige Ebene, welche durch den Strahl und die optische Axe des Krystalls geht, wobei wir unter »optische Axe des Krystalls« diejenige Richtung verstehen, in welchen der ordinäre und der extraordinäre Strahl gleichen Brechungsquotienten besitzen. Der Kalkspath ist demnach ein Krystall mit unendlich vielen optischen Hauptschnitten, welche sich sämmtlich in der Axe schneiden und alle gleichwerthig sind, denn in jedem derselben nimmt der Brechungsexponent des ausserordentlichen Strahles mit der Neigung gegen die Axe in derselben Weise ab, während der des ordentlichen nicht nur in allen Hauptschnitten, sondern auch in jeder Richtung innerhalb eines jeden denselben Werth beibehält.

Da die Lichtgeschwindigkeiten sich umgekehrt verhalten, wie die Brechungsexponenten, so folgt aus diesen Beobachtungen: der ordentliche Strahl *o*, welcher im Kalkspath entsteht, pflanzt sich nach allen Richtungen gleich schnell fort, der ausserordentliche *e* in der Richtung der Axe mit derselben Geschwindigkeit, in jeder andern mit grösserer. Da die beiden Strahlen gleiche Geschwindigkeit haben, wenn sie sich parallel der Axe bewegen, so kann

nach dieser Richtung keine Doppelbrechung stattfinden; gewöhnliches Licht pflanzt sich demnach als solches durch den Kalkspath fort, wenn es parallel seiner optischen Axe hindurchgelangt. Ganz so, wie bei einem gewöhnlichen Lichtstrahl in einem isotropen Mittel, sind auch die Verhältnisse des ordinären Strahles, seine Richtung ist also für jeden Fall durch die Huyghens'sche Construction zu bestimmen; seine Wellenfläche ist eine Kugel. Was den extraordinären Strahl betrifft, so hat schon Huyghens nachgewiesen, dass die verschiedenen Geschwindigkeiten, welche ausserordentliche Strahlen eines Hauptschnittes, aber von verschiedener Neigung gegen die Axe, besitzen, sich zu einander verhalten, wie die gleich gerichteten radii vectores einer Ellipse, deren kleine Axe die Geschwindigkeit des ausserordentlichen (= ordentl.) Strahls parallel zur optischen Axe, deren grosse Axe die Geschwindigkeit desselben senkrecht zur Axe ist. Wenn in Fig. 41 Y eine Richtung senkrecht zur optischen Axe, X parallel derselben, die Ebene XY also ein optischer Hauptschnitt des Kalkspaths, wenn ferner $ox : oy$ das Verhältniss der Lichtgeschwindigkeiten des Strahls e parallel und senkrecht zur Axe, so ist diejenige eines beliebigen extraordinären Strahls oS, welcher den Winkel φ mit der Axe bildet, gleich os, d. h. der Länge des radius vector der Ellipse in derselben Richtung. Da erfahrungsgemäss die Lichtgeschwindigeit des ausserordentlichen Strahles für alle Richtungen dieselbe ist, welche gleiche Winkel mit der Axe bilden, so gilt Obiges für alle unzählig vielen Hauptschnitte, welche rings um die Axe zu denken sind. Die Länge os ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit für alle Strahlen mit gleichem Winkel φ, welche man erhält, wenn man sich die Fig. 41 um ox als Rotationsaxe um 360° gedreht denkt. Die ganze Ellipse liefert hierbei ein Rotationsellipsoid, dessen radius vector in jeder beliebigen Richtung ein Maass der Grösse der Lichtgeschwindigkeit von e in derselben Richtung ist. Geht also von irgend einem Punkte o im Innern des Kalkspaths eine Lichtbewegung aus, so wird der extraordinäre Antheil derselben sich zwar auch nach allen Richtungen fortpflanzen, aber nicht mit derselben Geschwindigkeit; nach einer bestimmten Zeit wird er in der Richtung der Axe bis x, senkrecht zu derselben nach allen Seiten gleichweit, nämlich bis y, in der beliebigen Richtung oS bis s u. s. f., gelangt sein, d. h. bis an die Oberfläche jenes Ellipsoids, welches durch die Rotation der Ellipse xsy um ox entsteht. **Die Wellenfläche des ausserordentlichen Strahls ist demnach ein Rotationsellipsoid, dessen kleine Axe seine Fortpflanzungsgeschwindigkeit parallel zur optischen Axe und zugleich Rotationsaxe, dessen grosse Axe die Geschwindigkeit von e senkrecht zur optischen Axe ist.** Die Gestalt und Lage dieser

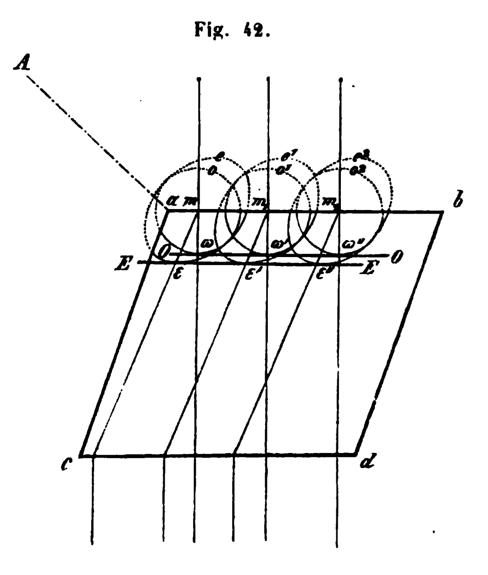
Fig. 41.



Wellenfläche ist folglich gegeben, wenn die beiden Brechungsexponenten ω (des ordinären) und ε (des extraordinären senkrecht zur Axe), und die Richtung der optischen Axe bekannt sind*). Mit der Gestalt und Lage der Wellenfläche ist nun aber in der Huyghens'schen Construction (S. 17) ein Mittel gegeben, die Richtung des extraordinären ebenso gut, wie die des ordinären Strahls für jeden beliebigen Fall zu bestimmen.

Sei z. B. in Fig. 42 *abcd* ein Hauptschnitt eines Kalkspathrhomboëders (*ab* und *cd* kurze Diagonalen, *ac* und *bd* stumpfe Kanten), so ist *aA* die Richtung der optischen Axe; fallen nun in der Weise, wie wir §. 13 zum ersten Male die Erscheinungen der Doppelbrechung am Kalkspath beobachteten, auf *ab* gewöhnliche Lichtstrahlen mit senkrechter Incidenz auf, so werden sie sämmtlich zu gleicher Zeit, von den Punkten m, m_1, m_2, .. aus, beginnen, sich im Kalkspath fortzupflanzen. Der entstehende ordinäre Strahl gelangt von diesen Punkten aus in einer bestimmten Zeit bis an die Oberfläche der Kugeln o, o_1, o_2, . .; nach Früherem ist seine neue Wellenfläche die Tangentialebene an alle diese einzelnen Wellenflächen, also *OO*, und $m\omega$, $m_1\omega_1$ u. s. f. die Richtung der entstehenden ordentlichen Strahlen. Der zweite, extraordinäre Strahl ist in derselben Zeit gelangt von m, m_1, m_2, . . aus bis an die Oberfläche der Rotationsellipsoide e, e_1, e_2, . ., deren Rotationsaxe parallel *aA* ist, seine Wellenfläche im Kalkspath ist also die gemeinschaftliche Tangentialebene aller dieser Wellenflächen, *EE* in unserem Durchschnitt, und die Richtung $m\varepsilon$, $m_1\varepsilon_1$ u. s. f. der extraordinären Strahlen ist gegeben durch die gradlinige Verbindung von m, m_1 . . mit den Punkten der Rotationsellipsoide, in welchen sie von *EE* berührt werden. Der ausserordentliche Strahl muss also eine Ablenkung im Hauptschnitt erfahren, ganz so, wie wir es früher beobachtet haben, und ausserdem sieht man, dass bei demselben nicht, wie

Fig. 42.

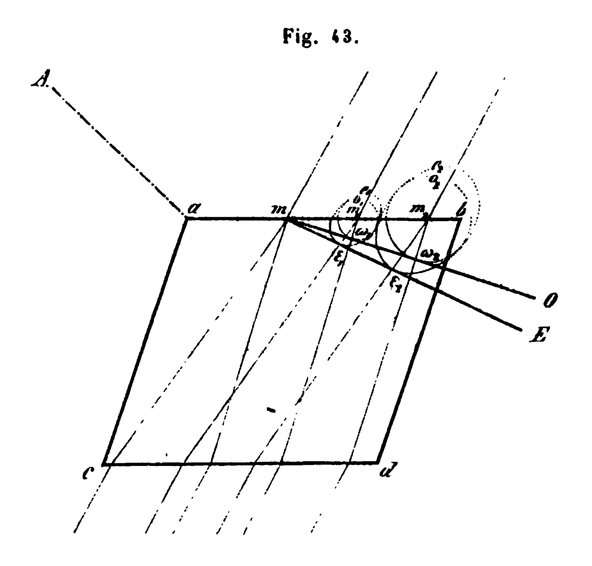


*) Den Brechungsexponenten ε des ausserordentlichen Strahls kann man mittelst der Einstellung auf das Minimum der Ablenkung, welche ein Prisma hervorbringt, nur dann bestimmen, wenn der beide Flächen des Prismas unter gleichen Winkeln treffende Strahl (vergl. Fig. 21 S. 26), dessen Einfallsebene senkrecht zur brechenden Kante ist, seine Schwingungen parallel der optischen Axe vollführt. Dies ist aber nur der Fall, wenn die brechende Kante entweder 1) der optischen Axe parallel läuft, wobei es gleichgültig ist, wie die Flächen des Prismas sonst liegen, oder 2) senkrecht zur optischen Axe steht,

bei einem gewöhnlichen Lichtstrahl, die Wellenfläche und die Richtung des Strahles senkrecht auf einander stehen.

Wenn (Fig. 43) die Strahlen im Hauptschnitt, jedoch unter schiefer Incidenz, auf den Kalkspath auffallen, also die Punkte m, m_1, m_2 zu verschiedenen Zeiten von den Wellenbewegungen erreicht werden, so ist die Wellenfläche des resultirenden ordentlichen Strahls die Tangentialebene durch mO senkrecht zum Hauptschnitt, die des ausserordentlichen die entsprechende Ebene durch mE; die ordinäre Wellenbewegung pflanzt sich also in der Richtung $m_1\omega_1$, $m_2\omega_2$, die extraordinäre parallel $m_1\varepsilon_1$, $m_2\varepsilon_2$ fort. Die Wellenfläche mE tangirt die einzelnen Ellipsoide e_1, e_2 in den Punkten ε_1, ε_2, und diese müssen in der Ebene des Hauptschnittes $abcd$ liegen, da in denselben auch die Rotationsaxe der Ellipsoide fällt, und dieser Hauptschnitt, der zugleich Einfallsebene des Lichtes ist, dieselben in zwei völlig symmetrische Hälften theilt.

Fig. 43.



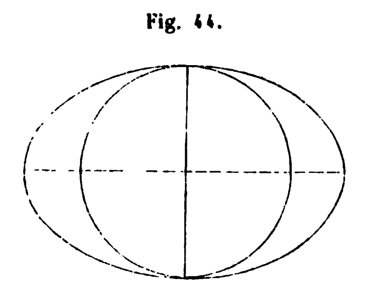
Fällt dagegen die Einfallsebene des Lichtes nicht mit einem Hauptschnitt zusammen, so findet keine derartige symmetrische Halbirung der einzelnen Wellenflächen durch die Einfallsebene mehr statt, folglich berührt die Tangentialebene jene in Punkten, welche ausserhalb der Einfallsebene des Lichtes liegen. Der ausserordentliche Strahl, dessen Richtung die gradlinige Verbindung des Punktes auf dem Rotationsellipsoid, welcher von der Wellenebene berührt wird, mit dem Mittelpunkte desselben ist, tritt somit aus der

und auch hier kann die Richtung übrigens eine beliebige sein, da alle in der zur Axe normalen Ebene liegenden Richtungen gleichwerthig sind. Mit einem Prisma der ersten oder der zweiten Art kann man nun, da die Geschwindigkeit des ordentlichen Strahls nach allen Richtungen die gleiche ist, die Brechungsexponenten ω und ε gleichzeitig bestimmen, indem man jeden einzeln auf das Minimum der Ablenkung einstellt, die letztere bestimmt und daraus den Brechungsexponent nach der S. 26 gegebenen Formel berechnet. Welches der (‖ zur Axe schwingende) ausserordentliche, welches der ordentliche Strahl ist, kann man leicht durch einen in den Weg der Lichtstrahlen eingefügten Nicol (s. §. 15) bestimmen, welcher den ordentlichen Strahl auslöscht, wenn seine Schwingungsebene parallel der optischen Axe des doppeltbrechenden Prismas steht, den ausserordentlichen nach einer Drehung um 90°.

Einfallsebene des Lichtes in allen Fällen heraus, wo diese nicht mit einem Hauptschnitt zusammenfällt, während selbstverständlich der ordinäre stets in der Einfallsebene bleibt, da seine Wellenfläche, wie die des gewöhnlichen Lichtes, eine Kugel ist.

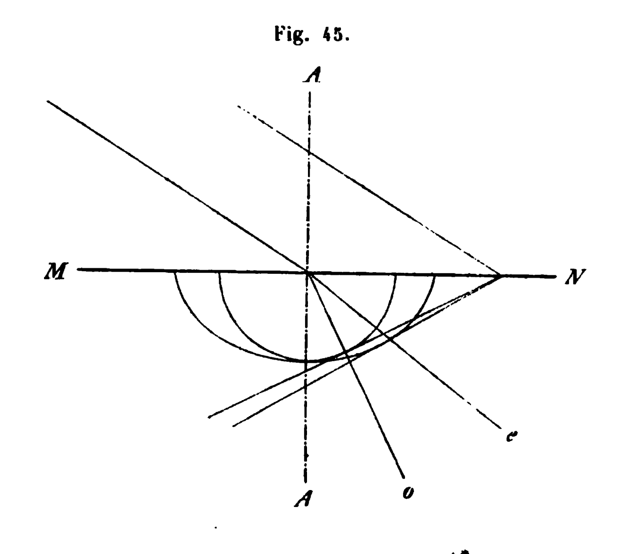
Aus dem Bisherigen ist ersichtlich, dass für jede beliebige Richtung des auffallenden Lichtes, wenn die Lage der von demselben getroffenen Fläche des Kalkspathes bekannt ist, aus der Gestalt und Lage der Wellenfläche nicht nur die Richtung des entstehenden ordentlichen, sondern auch des ausserordentlichen Strahles bestimmt werden kann. Diese Wellenfläche des Lichtes im Kalkspath besteht also aus einer Kugel und einem diese in zwei Punkten berührenden Rotationsellipsoide (Durchschnitt in Fig. 44); die Verbindungslinie beider Berührungspunkte ist die Rotationsaxe des Ellipsoides und die kleine Axe der jene erzeugenden Ellipse. Es ist zugleich die Richtung gleicher Geschwindigkeit für beide Strahlen, die Richtung, in welcher der Kalkspath keine Doppelbrechung besitzt, welche wir oben als optische Axe bezeichneten. Krystalle, welche, wie der Kalkspath, nur eine solche Richtung besitzen, nennt man optisch einaxige; dieselben bilden auch in Bezug auf ihre geometrischen Eigenschaften eine besondere Klasse.

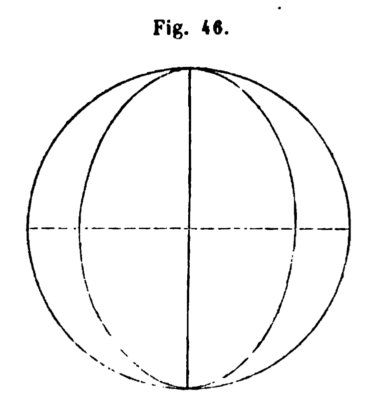
Fig. 44.



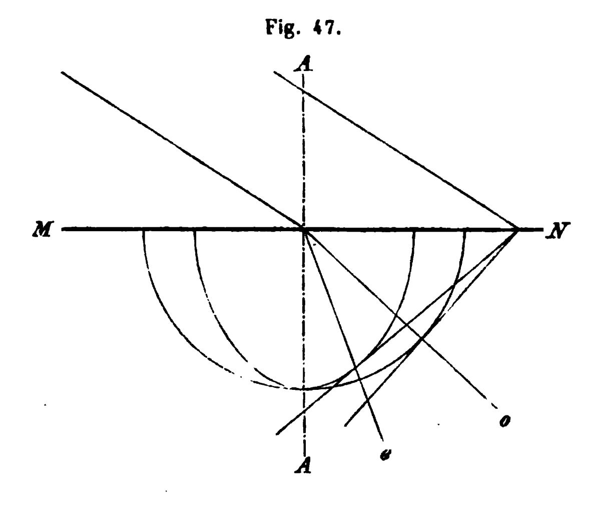
Die einaxigen Krystalle zerfallen noch in zwei Abtheilungen, je nachdem der extraordinäre Strahl sich in denselben schneller fortpflanzt als der ordinäre, oder umgekehrt. Die erste Abtheilung, zu der der Kalkspath gehört, sind solche, deren Wellenfläche, nach dem Hauptschnitt halbirt, die Gestalt von Fig. 44 hat. Wie aus Fig. 45 ersichtlich, wird in denselben der ausserordentliche Strahl *e* stets, vom ordentlichen *o* aus gerechnet, von der optischen Axe *AA* weg gebrochen; man nennt dieselben deshalb repulsive oder negative Krystalle. In einem Krystall der zweiten Abtheilung, wohin z. B. der Quarz gehört, hat die Wellenfläche im

Fig. 45.




Fig. 46.

Hauptschnitt die Gestalt Fig. 46, die Geschwindigkeit, mit der sich der extraordinäre Strahl bewegt, ist nur in der Axe gleich der des ordentlichen, in jeder anderen Richtung kleiner, sein Brechungsquotient also grösser. Aus Fig. 47 ist nun zu entnehmen, dass hier, umgekehrt wie bei den negativen Krystallen, der ausserordentliche Strahl *e*, vom ordentlichen *o* aus gerechnet, nach der optischen Axe hin abgelenkt wird. Diese Krystalle nennt man deshalb optisch positive oder attractive. Die optischen Erscheinungen, welche die negativen und die positiven einaxigen Krystalle zeigen, sind, wie wir später sehen werden, im Wesentlichen die gleichen, nur dass die beiden Strahlen, der ordentliche und ausserordentliche, in denselben ihre Rollen vertauschen.

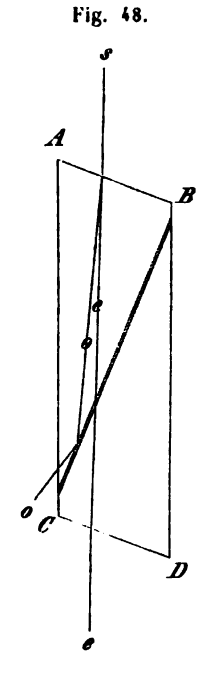
Fig. 47.


§. 15. **Herstellung polarisirten Lichtes durch einaxige Krystalle; Interferenz desselben; Polarisationsapparat.** Gradlinig polarisirtes, also nur in einer Ebene schwingendes Licht kann man zwar auch durch Reflexion gewöhnlichen Lichtes an ebenen Flächen, namentlich durch vielfache Wiederholung einer derartigen Reflexion, erzeugen, indess wird auf diesem Wege das gewöhnliche Licht nur theilweise polarisirt, d. h. es wird in solches umgewandelt, dessen Schwingungen vorwiegend in einer bestimmten Ebene stattfinden, z. Th. in wechselnden Azimuthen. Das aus einem einaxigen Krystall austretende und darin doppelt gebrochene Licht ist indess vollständig linear polarisirtes; es sind also einaxige Krystalle dazu geeignet, Licht hervorzubringen, welches nur in einer einzigen Ebene seine Schwingungen

ausführt. Um einen solchen Strahl zu erhalten und nicht die zu beobachtenden Erscheinungen durch das gleichzeitige Auftreten des zweiten, bei der Doppelbrechung entstehenden Strahles zu compliciren, werden verschiedene Mittel angewendet.

Gewisse Krystalle besitzen die Eigenschaft, den einen der beiden Strahlen so stark zu absorbiren, dass sie für diesen fast undurchsichtig sind. Derartig beschaffen sind z. B. die Krystalle des Turmalins, besonders die dunkelgrün gefärbten, welche die Schwingungen des im Hauptschnitt polarisirten (ordentlichen) Strahles sehr stark absorbiren, sehr viel weniger dagegen die in der Richtung der Axe schwingenden Strahlen. Durch eine Turmalinplatte, deren Flächen parallel der optischen Axe sind, gehen daher fast nur die letzteren Schwingungen, die des extraordinären Lichtes. Dieses geht ohne bedeutende Absorption durch einen zweiten Turmalin, der dem ersten parallel gehalten wird. Dreht man aber die zweite Platte in ihrer Ebene, so wird immer mehr von dem aus dem ersten austretenden Licht absorbirt, am meisten bei einer Drehung von 90°, weil die extraordinären Schwingungen des ersten Turmalins im zweiten mit der Vibrationsrichtung des ordinären Strahls, welcher die stärkste Absorption erleidet, sich fortpflanzen. Durch zwei gekreuzte Turmaline geht also nur sehr wenig Licht hindurch, dieselben erscheinen, gegen eine Lichtquelle gehalten, dunkel. In noch weit höherem Grade als der Turmalin besitzen die Eigenschaft, die verschiedenen Schwingungen sehr verschieden zu absorbiren, nach Heraphath's Entdeckung*) die Krystalle des schwefelsauren Jodchinin (daher auch Heraphathit genannt), welche bei äusserster Dünne der Platten bereits bei gekreuzter Stellung dunkel erscheinen. Da aber alle solche Krystalle gefärbt sind, so ertheilen sie dem durchgelassenen polarisirten Licht nicht nur eine Färbung, sondern sie absorbiren auch von demselben einen beträchtlichen Antheil. Zur Herstellung eines möglichst wenig geschwächten, ungefärbten, vollständig polarisirten Lichtstrahls dient das von Nicol erfundene und nach ihm benannte Nicol'sche Prisma, welches folgendermassen hergestellt wird: Man spaltet aus wasserhellem Kalkspath ein Rhomboëder, aus vier grösseren und zwei kleineren Flächen bestehend, dessen Hauptschnitt die Form von *ABCD* Fig. 48 hat; dieses wird, nachdem die obere und untere Endfläche so abgeschliffen ist, dass sie 68° (statt 71°) mit den verticalen Kanten bildet, nach *BC*, senkrecht zum Hauptschnitt, durchsägt, die beiden Schnittflächen

Fig. 48.



*) Phil. Mag. (4), XVI, 55.

vollkommen eben gemacht und polirt, endlich beide Hälften in ihrer ursprünglichen Stellung mit Canadabalsam wieder an einander gekittet. Trifft auf ein solches Prisma ein Lichtstrahl parallel seiner Längsrichtung (*s* in Fig. 48), so wird er in zwei verschieden gebrochene Strahlen zerlegt; der ausserordentliche *e* bewegt sich in einer Richtung im Kalkspath, in welcher sein Brechungsquotient = 1,536 ist; ungefähr denselben Werth besitzt derjenige des Canadabalsams für jede Art von Schwingungen (da dieser ein isotroper Körper ist), folglich wird der Strahl *e* fast ohne Ablenkung durch den Canadabalsam hindurchgehen. Dagegen wird der ordentliche Strahl *o* weit stärker abgelenkt, trifft also unter grösserem Incidenzwinkel auf die Grenze von Kalkspath und Canadabalsam; da sein Brechungsexponent im Kalkspath = 1,651, im Balsam = 1,536, so ist das erste Medium für ihn das optisch dichtere, aus welchem das Licht nur dann austreten kann, wenn der Einfallswinkel eine bestimmte Grenze nicht überschreitet (s. S. 20). In dem beschriebenen Falle ist diese Grenze überschritten, folglich findet Totalreflexion des Strahles *o* statt, durch welche derselbe auf die Seitenflächen des Prismas geworfen und durch eine schwarze Fassung desselben absorbirt wird. Durch den Nicol (das Nicol'sche Prisma) hindurch gelangt also nur der im Hauptschnitt schwingende, senkrecht dazu polarisirte extraordinäre Strahl hindurch, so dass also zwei, in gekreuzter Stellung nach einander in den Weg des Lichtes eingeschaltet, von demselben gar Nichts hindurchlassen. Treten in einen Nicol polarisirte Lichtstrahlen ein, aber von anderer Schwingungsebene als sein Hauptschnitt, so wird von denselben nur derjenige Antheil hindurchgelassen, welcher auf den Hauptschnitt als Schwingungsebene entfällt. Von zwei gleichzeitig durch einen Nicol gehenden, linear polarisirten Strahlen mit verschiedener Schwingungsebene geht jedesmal nur die dem Hauptschnitt parallele Componente der Vibrationen hindurch, die um so geringer ausfällt, je grösser der Winkel der Schwingungsebene des eintretenden Strahls mit dem Hauptschnitt des Nicols ist. Diese Antheile der beiden Strahlen, welche das Nicol'sche Prisma durchlässt, schwingen in derselben Ebene, nämlich dem Hauptschnitt des Nicols, die Schwingungen der beiden eintretenden Lichtstrahlen sind auf dieselbe Polarisationsebene zurückgeführt; nach S. 45 sind sie also jetzt im Stande zu interferiren.

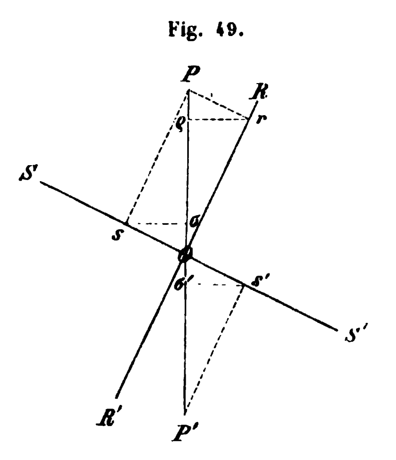
Die Erscheinungen der Interferenz der beiden polarisirten Strahlen, welche aus einem doppeltbrechenden Krystall austreten, dienen hauptsächlich zur Bestimmung der optischen Eigenschaften eines Krystalls. Die bisher betrachteten Erscheinungen, z. B. das Auftreten zweier getrennter Bilder beim Hindurchsehen, sind im Allgemeinen nicht geeignet, einen doppeltbrechenden Krystall von einem isotropen zu unterscheiden, da nur bei sehr grosser Differenz der Brechungsquotienten beider Strahlen und bei grosser Dicke des Krystalls, wie sie nur selten zur Verfügung steht, die beiden Bilder weit genug aus einander treten.

Ausser der oben erwähnten Bedingung für die Interferenz zweier pola-

risirten Strahlen, darin bestehend, dass sie durch einen Nicol auf eine Polarisationsebene zurückgeführt werden müssen, existirt für dieselbe noch eine zweite Bedingung, welche sich aus folgenden Betrachtungen ergiebt:

Sei PP' Fig. 49 die Schwingungsrichtung eines linear polarisirten Strahles, welcher in der senkrecht zur Ebene der Zeichnung stehenden Richtung in einen doppeltbrechenden Krystall eintritt und daselbst in zwei Strahlen mit den Schwingungsrichtungen RR' und SS' zerlegt wird. Ist der Krystall genau von einer solchen Dicke, dass die beiden, sich ungleich schnell darin fortpflanzenden Strahlen bei ihrem Austritt aus demselben eine ganze oder ein Vielfaches einer Wellenlänge des angewandten einfarbigen (homogenen) Lichtes Phasendifferenz besitzen, so wird ein Aetheriheilchen auf der Bahn des Lichtes, sobald das Letztere den Krystall verlassen hat, sich jedesmal vermöge der einen Vibrationsbewegung in demselben Augenblicke von O nach r hin bewegen, in welchem die andere der beiden entstehenden Bewegungen es von O nach s hin treiben würde. Wenn nunmehr die beiden Strahlen durch einen Nicol, dessen Hauptschnitt parallel PP' ist, auf eine Polarisationsebene zurückgeführt werden, so geht von jeder Bewegung nur die Componente $O\varrho$ und $O\sigma$, parallel PP', hindurch. Diese beiden Bewegungen müssen, da sie gleichzeitig nach derselben Seite stattfinden, sich einfach zusammensetzen, also mit gleicher Phase interferiren, d. h. mit derselben Phasendifferenz, welche sie im Krystall erhalten hatten. Ist dagegen der Durchmesser des Krystalls so gross, dass die Phasendifferenz, mit der die beiden Strahlen aus demselben austreten, $\frac{1}{2}\lambda$ oder ein ungerades Vielfaches davon beträgt, so findet die Bewegung des Aethertheilchens O (Fig. 49) in dem Augenblicke, wo es vermöge der einen Bewegung nach r hin bewegt wird, vermöge der zweiten nach s' hin statt. Beide Bewegungen können dadurch zur Interferenz gebracht werden, dass sie durch einen Nicol auf gleiche Schwingungsebene reducirt werden. Steht dessen Hauptschnitt, wie vorher, parallel PP', so finden die interferirenden Bewegungen gleichzeitig nach entgegengesetzten Seiten statt, nämlich nach $O\varrho$ und $O\sigma'$, sie interferiren also mit entgegengesetzter Phase, d. h. ebenfalls mit derselben Phasendifferenz, mit welcher sie aus dem Krystall austraten. Hieraus ergiebt sich allgemein, dass zwei Strahlen, welche durch Doppelbrechung aus einem linear polarisirten entstehen, mit derselben Phasendifferenz, welche sie durch den doppeltbrechenden Krystall erhalten, interferiren, sobald sie

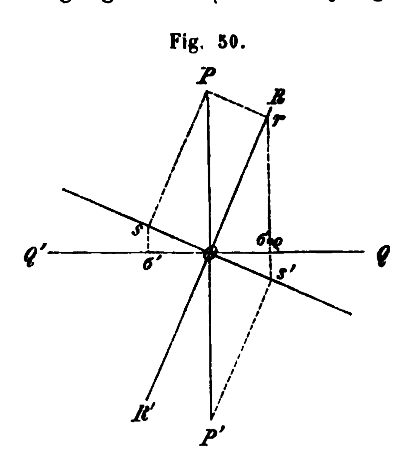
Fig. 49.



auf eine Schwingungsebene zurückgeführt werden, welche derjenigen des ersten Strahles parallel ist.

Betrachten wir jetzt den entgegengesetzten Fall, in welchem die Schwingungsebene des in den Krystall eintretenden Lichtstrahles senkrecht zum Hauptschnitt des Nicols steht, welche die beiden Strahlen auf eine Schwingungsebene zurückführt. Ist der Krystall so dick, dass die beiden darin entstehenden Strahlen λ, oder ein Vielfaches von λ, Phasendifferenz beim Austritt haben, so werden sie, wenn wieder PP' Fig. 50 parallel der Schwingungsebene des eintretenden Lichtes ist, ein Theilchen des Aethers, der eine von O nach r, der andere nach s hin sich bewegen. Ist nun aber das Nicol'sche Prisma um 90° gegen seine frühere Stellung gedreht, ist seine Schwingungsebene (d. h. diejenige des von ihm durchgelassenen Lichtes) parallel QQ_1, so sind die beiden Componenten, welche zur Interferenz gelangen, $O\varrho$ und $O\sigma'$; diese liegen nach entgegengesetzten Seiten, also findet die Interferenz mit entgegengesetzter Phase statt, während die beiden Strahlen mit gleicher Phase aus dem Krystall ausgetreten waren. Ist dagegen der Durchmesser des Krystalls so gross, dass die beiden Strahlen beim Austritt entgegengesetzte Phase besitzen, so sind ihre gleichzeitigen Bewegungsgrössen (s. Fig. 50) Or und Os'; werden diese auf die eine Schwingungsrichtung QQ_1 zurückgeführt, so sind ihre mit einander interferirenden gleich grossen Componenten, $O\varrho$ und $O\sigma$, nach derselben Seite gelegen, also findet die Interferenz mit gleicher Phase statt. Allgemein: Zwei Strahlen, welche durch Doppelbrechung aus einem linear polarisirten Strahl entstehen, interferiren mit entgegengesetzter Phase, als diejenige ist, mit welcher sie aus dem doppeltbrechenden Krystall austreten, wenn die Schwingungsebene, auf welche sie reducirt werden, senkrecht zur ursprünglichen Schwingungsebene steht.

Fig. 50.



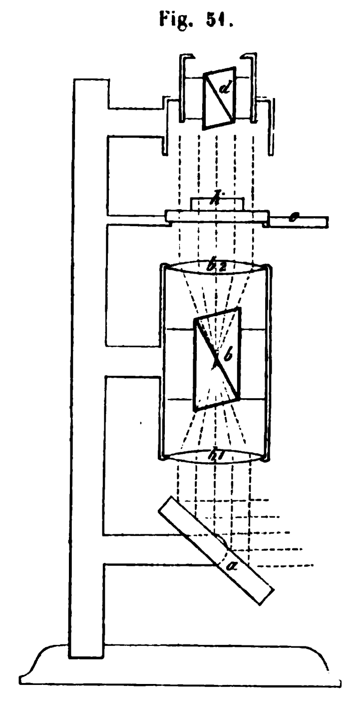
Denken wir uns jetzt statt eines linear polarisirten Lichtstrahles einen gewöhnlichen in den Krystall eintreten, so findet in dem Momente, in welchem die Schwingungsebene desselben parallel derjenigen des zurückführenden Nicols ist, die Interferenz mit derselben Phasendifferenz statt, mit welcher die beiden Strahlen aus dem Krystall austreten, — nach einem ausserordentlich kleinen Zeitraum, während dessen sich die Schwingungsebene des gewöhnlichen Lichtes um 90° gedreht hat, mit der jener entgegengesetzten Phasendifferenz (derselben $+$ oder $-\frac{1}{2}\lambda$), also müssen sich

auf der Bahn des Lichtes die durch Interferenz entstehenden Maxima und Minima der Lichtintensität ebenso rasch folgen, als sich die Polarisationsebene des gewöhnlichen Lichtes jedesmal um einen rechten Winkel gedreht hat. Wir werden also von diesem Wechsel der Intensität ebenso wenig etwas wahrnehmen, als von demjenigen der beiden im Kalkspath entstehenden Strahlen (s. S. 39). Es können demnach auf diese Weise Interferenzerscheinungen nicht zu Stande kommen, da an einer bestimmten Stelle wohl momentan durch Interferenz Dunkelheit erzeugt wird, in unmessbar kleiner Zeit darauf jedoch um so grössere Helligkeit, so dass im Ganzen der Eindruck eines Strahles von constanter mittlerer Helligkeit resultirt.

Hierdurch sind nunmehr die Bedingungen der Interferenz linear polarisirten Lichtes vollständig erkannt; sie lauten: Zwei linear polarisirte Strahlen interferiren nur dann, wenn sie aus einem einzigen linear polarisirten Lichtstrahle durch Doppelbrechung entstanden sind und durch ein Nicol'sches Prisma auf die gleiche Polarisationsebene zurückgeführt werden.

Will man also die Interferenzerscheinungen des in einem Krystall doppelt gebrochenen Lichtes untersuchen (analysiren), so muss man das in denselben eintretende Licht vorher durch einen Nicol polarisiren, muss ihn also zwischen zwei Nicols, von denen der erste der Polarisator, derjenige zwischen Auge und Krystall der Analysator heisst, betrachten. Ein Apparat, welcher dazu dient, einen Krystall zwischen zwei polarisirenden Vorrichtungen zu untersuchen, heisst Polarisationsapparat, und besteht aus einem Spiegel *a* Fig. 51 (verticaler Durchschnitt), der so geneigt wird, dass er das von einer hellen Stelle des Himmels herkommende Licht vertical nach oben reflectirt, einem polarisirenden Nicol *b*, welcher vortheilhaft in einem Rohr zwischen zwei Glaslinsen b_1 und b_2 so angebracht wird, dass der gemeinschaftliche Brennpunkt dieser in seine Mitte fällt, so dass die auf die erste Linse parallel auffallenden Strahlen, nachdem sie, in einen Doppelkegel zusammengeschnürt, sämmtlich durch den Nicol gegangen sind, auch parallel aus der zweiten Linse austreten; ferner besteht das Instrument aus dem Krystallträger *c* mit horizontaler drehbarer Glasplatte, auf welche der zu untersuchende Krystall *k* gelegt wird, endlich aus dem analysirenden Nicol *d*, welcher die doppeltgebrochenen Schwingungen wieder

Fig. 51.



auf eine Polarisationsebene zurückführt. Beide Nicols sind, wie der Krystallträger, um die verticale Axe des Apparates drehbar. Der Polarisator kann auch dadurch ersetzt werden, dass an Stelle des reflectirenden Spiegels ein solcher aus zahlreichen, auf einander geschichteten Platten dünnen Glases ohne Belegung gesetzt wird, welcher nach S. 52 dem reflectirten Lichte eine, wenn auch nicht ganz vollständige Polarisation verleiht*).

Da man bei der Benutzung eines solchen Apparates den auf dem Träger *c* befindlichen Krystall in deutlicher Sehweite erblickt, während er von unten her durch parallele polarisirte Strahlen erleuchtet erscheint, so nennt man diese Beobachtungsmethode »Untersuchung im parallelen polarisirten Lichte. Wird der Krystall mit blossem Auge nicht mehr erkannt, so schaltet man zu diesem Zwecke zwischen denselben und das Auge ein Mikroskop ein und besitzt dann in dem Instrument ein Mikroskop mit Polarisation (nicht ein Polarisationsmikroskop, welcher Name in anderem Sinne gebraucht wird). Die neueren Mikroskope, besonders wenn sie zu mikromineralogischen Untersuchungen dienen sollen**), werden meist zur Polarisation eingerichtet, indem unter den Objectträger ein Nicol drehbar eingeschoben und über dem Ocular ein gleicher aufgesetzt wird.

Sowohl mit dem oben beschriebenen Polarisationsinstrument zur Beobachtung in parallelem Licht als mit dem Mikroskop, welches für Polarisation eingerichtet ist, kann man jedesmal nur diejenigen optischen Erscheinungen, welche der Krystall in einer Richtung zeigt, untersuchen. Sehr häufig beabsichtigt man aber, die Veränderungen, welche das polarisirte Licht bei seinem Durchgange durch einen Krystall in möglichst verschiedenen Richtungen erleidet, gleichzeitig zu beobachten. Dazu dient das Polarisationsinstrument zur Beobachtung im convergenten Lichte, auch Polarisationsmikroskop***) genannt. Dasselbe, in Fig. 52 in verticalem Durchschnitt durch die Mitte dargestellt, besteht aus einem Spiegel *s* und dem Polarisator *p*, welcher von zwei Linsen *l*, *l* eingeschlossen ist, genau so, wie bei dem Polarisationsinstrument mit parallelem Licht. Hinter der oberen Linse *l* befindet sich ein geschwärzter Metallschirm (Diaphragma) mit kreisrunder Oeffnung vom Durchmesser *de*. Diese Oeffnung wird vom hellen Himmel her, durch Vermittelung des Spiegels *s*, des Nicols *p* und der Linsen *l*, beleuchtet, und zwar jeder Punkt derselben durch einen Strahlenkegel, dessen Spitze der besagte Punkt selbst und dessen Basis die untere Linse *l* ist. In der Figur sind diese Strahlenkegel für die beiden

---

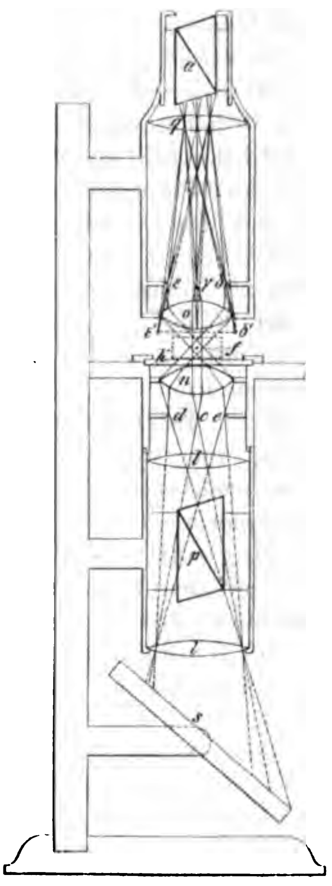
*) Ein solcher Glassatz als Polarisator wird deshalb häufig angewendet, weil er weit billiger herzustellen ist, als ein grosses Nicol'sches Prisma, wie ein solches für die Lichtstärke des Instrumentes wünschenswerth ist.

**) Dergleichen für diesen speciellen Zweck besonders practische Mikroskope mit Linsen von Hartnack liefert Fuess in Berlin, s. Vorrede.

***) Diese Bezeichnung, so gewöhnlich sie auch gebraucht wird, entspricht der Zusammensetzung des Instrumentes sehr wenig, da der Hauptheil desselben ein Fernrohr ist, welches fast gar keine Vergrösserung besitzt.

Randpunkte *de* und für den Mittelpunkt *c* des Diaphragmas angegeben, aber unterhalb der obersten Linse *l* nur punktirt fortgeführt, weil der wahre Gang der Lichtstrahlen zwischen *l*, *l* und *s* wegen der Brechung in den Linsen ein anderer, und zwar derart ist, dass alle vom Spiegel auf die untere Linse parallel auffallenden Strahlen, nach ihrem Austritt aus dem oberen *l* wieder einander parallel, natürlich aber alsdann Bestandtheile verschiedener auf *c*, *d*, *e* u. s. f. auffallender Lichtkegel werden. Die von unten her durch linear polarisirtes Licht erleuchtete helle Oeffnung *de* ist es nun, nach welcher wir durch das Instrument hinblicken. Wir können daher jeden Punkt derselben, z. B. d, als einen solchen, von welchem divergirende Lichtstrahlen ausgehen, betrachten; jedoch gehen dieselben nicht, wie von einem selbstleuchtenden Punkte, nach allen Seiten aus, sondern nur nach denjenigen, welche innerhalb der Divergenz des Kegels liegen, dessen Spitze *d* und dessen Basis die untere Linse *l* ist. Die von *d* ausgehenden Strahlen sind die gradlinigen Fortsetzungen derjenigen des betreffenden Kegels. Verfolgen wir deren Weg nach aufwärts, so sehen wir sie divergirend auf eine Linse *n* von starker Krümmung auftreffen; diese steht von dem Diaphragma *de* genau im Abstand der Brennweite, so dass also alle von einem Punkte der Brennebene *de* divergirende Strahlen durch *n* in parallele verwandelt werden. Oberhalb *n* befindet sich eine Linse *o* von derselben Grösse und Krümmung, welche das Objectiv eines Fernrohrs, dessen Ocular *q* ist, darstellt; der Brennpunkt von *o* und der von *n*, welche gleiche Focallänge besitzen, fallen in *f* zusammen. Der von *d* ausgehende Strahlenkegel wird auf der linken Seite von *n* gebrochen und dabei in einen Strahlencylinder verwandelt; dieser geht durch die rechte Seite von *o* und wird, da die Strahlen parallel sind, in der Brennebene von *o*, und zwar an dem *d* entsprechenden Punkte *δ* derselben, wieder vereinigt. In der Figur ist die gleiche Construction ausgeführt für die

Fig. 52.



Strahlen, welche von dem Mittelpunkte *c* der hellen Oeffnung *de* ausgehen und sich in *γ* vereinigen müssen, endlich für diejenigen, welche, von *e* kommend,

in ε convergiren. Da dasselbe für alle Punkte der erleuchteten Oeffnung de gilt, so muss in der Ebene $\delta\varepsilon$ ein reelles Bild von jener Oeffnung entstehen. Dieses betrachten wir nun mit einer sehr schwach vergrössernden Lupe, nämlich mit dem Ocular q, durch welche wir ein virtuelles Bild, etwa in der Ebene $\delta'\varepsilon'$, erblicken (vergl. §. 10). Die Strahlen, welche von diesem Bilde zu kommen scheinen, gehen, ehe sie ins Auge gelangen, durch den analysirenden Nicol a. Legen wir nun auf den Krystallträger k einen Krystall so auf, dass sich f innerhalb desselben befindet (in der Figur ist ein solcher punktirt angedeutet), so gehen durch denselben Strahlensysteme von sehr verschiedener Richtung; alle Strahlen gleicher Richtung, welche im Krystall ja die gleiche Veränderung erfahren müssen, vereinigen sich in einem einzigen Punkte des Bildes $\delta'\varepsilon'$; alle von abweichender Richtung an verschiedenen Punkten. In dem Bilde $\delta'\varepsilon'$ vermögen wir also mit einem Blicke alle Veränderungen zu überblicken, welche Strahlen von sehr mannigfaltigen Richtungen, nämlich von allen, welche innerhalb des von f auf den Umfang der Linse n gefällten Kegels liegen, — in dem zu untersuchenden Krystall erleiden. Je kürzer die Brennweite von n und o, einen desto grösseren Oeffnungswinkel besitzt dieser Kegel, desto grösser ist das Gesichtsfeld des Instrumentes. Da es häufig der Vereinigung von Strahlen innerhalb des Gesichtsfeldes bedarf, welche unter sehr divergirenden Richtungen durch den Krystall gegangen sind, so hat zuerst Nörremberg jede der beiden Linsen n und o durch ein System mehrerer planconvexer, einander fast berührender Gläser ersetzt, welche zusammen wie eine Linse von sehr kurzer Brennweite wirken. In dieser, jetzt allgemein gebräuchlichen Form construirt, heisst der Apparat deswegen häufig »das Nörremberg'sche Polarisationsinstrument«.

§. 16. Interferenzerscheinungen einaxiger Krystallplatten.

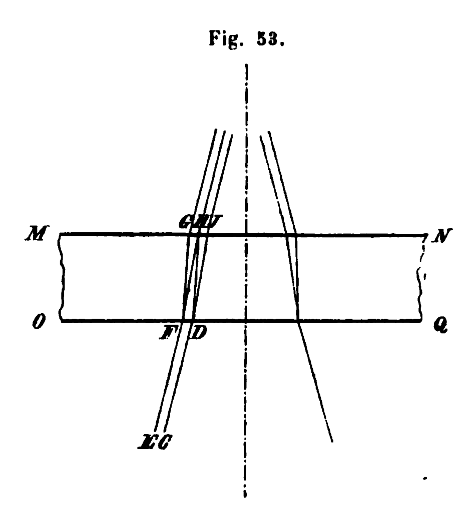
1) Platten, von zwei parallelen, senkrecht zur optischen Axe stehenden, natürlichen oder künstlichen ebenen Flächen begrenzt, zeigen, im Polorisationsapparat untersucht, folgende Erscheinungen:

a) im parallelen Lichte gehen durch die Platte, wenn dieselbe horizontal auf den Krystallträger aufgelegt wird, nur Lichtstrahlen in verticaler Richtung, also parallel der optischen Axe der Krystallplatte, hindurch. Dies ist aber die Richtung ohne Doppelbrechung, in welcher ein einaxiger Krystall sich verhält wie ein isotroper Körper. Die Platte ändert demnach an der Polarisation des durchgehenden Strahles nicht das Geringste, sie erscheint ebenso dunkel, wie das übrige Gesichtsfeld, wenn die Hauptschnitte der beiden Nicols des Instrumentes unter einem rechten Winkel gekreuzt sind, ebenso hell bei paralleler Stellung der Nicols.

b) Im convergenten Licht werden wir die Erscheinungen, welche eine einaxige Krystallplatte, senkrecht zur Axe geschnitten, zeigt, beobachten, wenn wir dieselbe auf den Krystallträger des Polarisationsinstrumentes Fig. 52 so auflegen, dass die optische Axe parallel der verticalen Axe des ganzen Apparates ist, und dass der Punkt f sich innerhalb des Krystalls

befindet. Dann durchsetzen den letzteren unendlich viele Bündel, deren jedes aus unter einander parallelen Strahlen besteht, in allen möglichen Richtungen, welche innerhalb des Kegels, zwischen *f* und der sogenannten Sammellinse *n*, liegen. Einer dieser Strahlencylinder, nämlich derjenige, welcher vom Punkte *c* ausgeht und daher im Bilde genau in der Mitte des Gesichtsfeldes erscheint, geht parallel der optischen Axe des Krystalls durch denselben hindurch. Um die Veränderungen, welche alle diese verschieden gerichteten Strahlenbündel in der Platte erfahren, abzuleiten, betrachten wir zunächst diejenigen, welche in einer verticalen, durch die optische Axe des Krystalls gehenden Ebene liegen. Eine solche nannten wir einen Hauptschnitt des einaxigen Krystalls, und dieser soll in Fig. 53 durch *MNOQ* dargestellt sein. Setzen wir nun noch den Fall, dass die beiden Nicol'schen Prismen des Instrumentes parallel seien, dass ihre Polarisationsebenen mit dem Hauptschnitt *MNOQ* Winkel von 45° bildeten, und dass einfarbiges Licht durch den Apparat hindurchginge. Die der optischen Axe des Krystalls, der Richtung *AB* parallelen Lichtstrahlen werden nicht doppelt gebrochen, gehen unverändert durch den Krystall, die Mitte des Bildes erscheint also hell, genau so, wie das ganze Gesichtsfeld bei parallelen Nicols erscheinen würde, wenn keine Krystallplatte vorhanden wäre. Betrachten wir aber nun einen der Strahlencylinder, welche eine geringe Neigung gegen die Axe besitzen, so wird es unter diesen einen geben, z. B. derjenige, zu welchem der Strahl *CD* gehört, für welchen das Folgende gilt: Derselbe wird im Krystall zerlegt in zwei Strahlen *DH* und *DJ* von verschiedener Geschwindigkeit, deren einer im Hauptschnitt *MNOQ*, der andere senkrecht dazu schwingt; ein anderer Strahl desselben Cylinders, also parallel dem vorigen, *EF*, zerfällt ebenso in einen ordinären und einen extraordinären, *FG* und *FH*. Von *H* aus gehen also zwei Strahlen in derselben Bahn weiter, aus derselben Lichtquelle, welche linear polarisirtes Licht aussandte (der betreffende Punkt der hellen Oeffnung *de* in Fig. 52), herstammend, und senkrecht zu einander polarisirt; von diesen Schwingungen wird vom oberen Nicol nur je die auf dessen Schwingungsebene entfallende Componente hindurchgelassen, und zwar ist diese von beiden gleich gross, da ihre Richtungen mit jener Ebene nach beiden Seiten Winkel von 45° einschliessen; die beiden Strahlen, nunmehr auf eine Schwingungsrichtung zurückgeführt, interferiren also (weil diese Schwingungsrichtung auch die des eintreten-

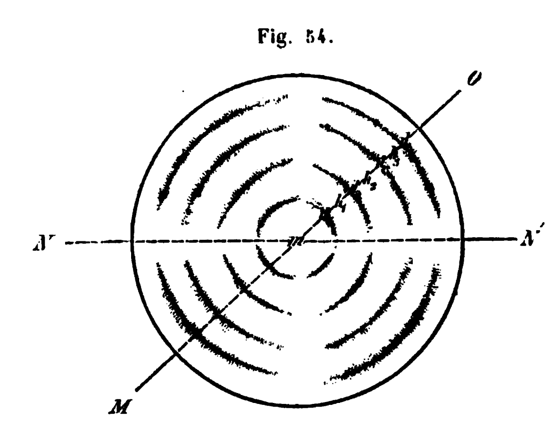
Fig. 53.



den polarisirten Lichtes war) mit derjenigen Phasendifferenz, welche sie im Krystall erhalten haben, d. h. um wie viel wegen der verschiedenen Fortpflanzungsgeschwindigkeit des ordinären und des extraordinären Strahls der eine gegen den andern zurückgeblieben ist; diese Phasendifferenz sei für die Lichtstrahlen DH und FH gerade gleich einer halben Wellenlänge derjenigen Farbe, mit welcher das Instrument beleuchtet ist, so werden sich diese Strahlen durch die Interferenz vollkommen vernichten. Da unter den parallelen Strahlen, welche den Krystall in derselben Richtung durchsetzen, zu jedem einzelnen ein zweiter zu finden ist, welcher zu ihm in dem Verhältniss steht, dass der ordinäre des einen mit dem extraordinären des andern in derselben Weise interferirt, so wird an dem Punkte des im Polarisationsinstrument sichtbaren Bildes, in welchem sich alle diese Strahlen vereinigen und der etwas von der Mitte des Bildes entfernt ist, kein Licht erscheinen können, dieser Punkt des Gesichtsfeldes wird dunkel. Stelle Fig. 54 das im Polarisationsapparate gesehene Bild dar, sei NN' die Schwingungsrichtung der beiden parallel gestellten Nicols, MO die Richtung des Hauptschnittes $MNOQ$ der vorigen Figur, so ist m die helle Mitte des Bildes, d_1 die dunkle Stelle, an welcher sich die zuletzt besprochenen Strahlen vereinigen. Die Stellen zwischen m und d_1 entsprechen den Vereinigungspunkten von Strahlencylindern, welche eine geringere Neigung gegen die optische Axe besitzen, so dass die im Krystall erhaltene Phasendifferenz weniger als $\frac{1}{2}\lambda$ ist; diese werden sich bei der Interferenz zusammensetzen zu einer Wellenbewegung von anderer Phase, deren Intensität kleiner sein muss, als die Summe der Intensitäten der einzelnen Strahlen (s. S. 11), und zwar um so kleiner, je näher wir d_1 kommen, d. h. je weniger sich die Phasendifferenz von $\frac{1}{2}\lambda$ unterscheidet. Die Helligkeit muss also von der Mitte aus nach d_1, wo sie gleich 0 ist, allmälig abnehmen. Strahlen in dem Hauptschnitt MO, welche einen grösseren Winkel mit der optischen Axe des Krystalls, als die in d_1 sich vereinigenden, bilden, zerfallen durch die Doppelbrechung in zwei Strahlen, deren Geschwindigkeitsdifferenz eine grössere als bei jenen ist, da der ausserordentliche Strahl nach S. 47 eine um so mehr von derjenigen des ordentlichen abweichende Fortpflanzungsgeschwindigkeit besitzt, je mehr er gegen die Axe geneigt ist. Es werden sich also in einem Punkte h_1, auf der Geraden MO weiter von der Mitte entfernt, alle Strahlen vereinigen, deren Richtung im Krystall so lag, dass der aus jedem entstehende ordinäre und extraordinäre eine Phasendifferenz von λ erfuhren. Diese beiden Schwingungen zweier verschiedener Strahlen, und ebenso aller andern paarweise, werden sich also zusammensetzen zu einer Wellenbewegung, deren Intensität gleich der Summe der Intensitäten der Einzelbewegungen ist. Der Punkt h_1 wird also dieselbe Helligkeit besitzen, wie die Mitte m, und zwar wird die Helligkeit von d_1 nach h_1 allmälig zunehmen, jenseits desselben aber wieder sich vermindern, da der Punkt d_2 der Vereinigung derjenigen Strahlen entspricht, welche so geneigt durch den Krystall hindurchgingen,

dass die Phasendifferenz der beiden durch die Doppelbrechung entstehenden Strahlen $= \frac{3}{2}\lambda$ ist, also ebenfalls eine vollständige Vernichtung des Lichtes bei der Interferenz stattfindet. Dasselbe ist der Fall bei d_3, wo die Phasendifferenz $= \frac{5}{2}\lambda$ ist u. s. f. Wenn wir also, von der Mitte m des Bildes ausgehend, die Intensität des Lichtes auf der Geraden MO betrachten, so beobachten wir einen fortwährenden Wechsel von hell und dunkel, wobei die Entfernung der Licht-Minima und -Maxima mit der Entfernung von der Mitte immer kleiner wird,

Fig. 54.



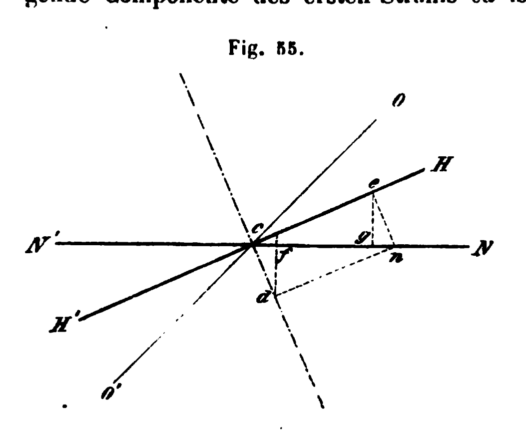
weil bei grösserer Schiefe gegen die optische Axe nicht nur die Geschwindigkeitsdifferenz der beiden interferirenden Strahlen, sondern auch die Länge Weges wächst, welchen sie im Krystall zurückzulegen haben, so dass derselben Differenz in der Neigung eine grössere Verschiedenheit in der Verzögerung des einen Strahls bei denjenigen entspricht, welche einen grösseren Winkel, als bei solchen Strahlen, welche einen kleineren Winkel mit der optischen Axe bilden.

Da die optisch einaxigen Krystalle sich gegen alle Lichtstrahlen vollkommen gleich verhalten, welche denselben Winkel mit der optischen Axe einschliessen, so müssten dieselben Maxima und Minima des Lichtes nach allen Seiten in demselben Abstand von der Mitte des Bildes aus vorhanden sein, denn was für den Hauptschnitt MO Fig. 54 gilt, muss ganz ebenso für jeden andern Hauptschnitt, welcher mit NN' einen beliebigen andern Winkel bildet, gelten. Es müssten demnach genau kreisförmige helle und dunkle Ringe die Mitte des Gesichtsfeldes umgeben. Die dunklen Ringe können indess nicht auf allen Stellen gleiche Intensität besitzen, wie aus der folgenden Betrachtung hervorgeht:

Die beiden Strahlen, welche an der Stelle d_1 (Fig. 54) des ersten dunklen Ringes zur Interferenz gelangten, mussten sich, wie wir sahen, vollständig vernichten, da sie im Krystall in zwei gleich helle Strahlen zerlegt wurden, deren Componenten bei der Zerlegung durch den obern Nicol wieder gleich gross waren, weil ihre Schwingungsrichtungen mit NN' denselben Winkel, nämlich 45°, bildeten. Betrachten wir dagegen einen Punkt desselben ersten dunkeln Ringes, welcher näher an NN' liegt, so entspricht er Lichtstrahlen eines Hauptschnittes, welcher mit NN' einen kleineren Winkel einschliesst. Sei cn Fig. 55 die halbe Amplitude des durch den Polarisator in den Krystall gesandten Lichtes mit der Schwingungsrichtung NN', HH' die Richtung jenes Hauptschnittes (gesehen von oben parallel zur Axe, wie

bei Fig. 54), so wird diese Schwingung nach dem Parallelogramm der Kräfte in zwei, eine parallel dem Hauptschnitt, die andere senkrecht zu demselben, zerlegt; deren halbe Amplituden müssen demnach *cd* und *ce*, also nunmehr ungleich gross sein. Jede dieser beiden Wellenbewegungen erleidet im Analysator eine erneute Theilung in zwei Componenten, deren eine nach *NN'*, die andere senkrecht dazu gerichtet ist, von denen jedoch nur die erstere den oberen Nicol passiren kann. Diese nach *NN'* schwingende Componente des ersten Strahls *cd* ist offenbar *cf*, die des zweiten *ce* ist *cg*. Es interferiren also zwei Strahlen derselben Schwingungsrichtung, aber von verschiedener Amplitude oder Intensität; diese können einander nicht vollkommen vernichten, sondern es muss eine Lichtbewegung von der Phase der grösseren Componente resultiren, deren Amplitude die Differenz beider ist. Man sieht leicht, dass diese Differenz um so kleiner ist, die Vernichtung eine um so vollständigere, je weniger der Winkel zwischen den Richtungen *HH'* und *NN'* sich von 45° unterscheidet. Je mehr sich aber derselbe Winkel der Null nähert, desto kleiner wird *cd*, also auch *cf*, desto grösser dagegen *ce* und *cg*; um so weniger vollständige Auslöschung des Lichtes kann also eintreten. Betrachten wir denjenigen Hauptschnitt des Krystalls, welcher parallel *NN'* ist, und speciell die Strahlen, welche sich da vereinigen, wo der erste dunkle Ring von der Linie *NN'* Fig. 54 durchschnitten wird, so werden diese, aus dem Polarisator mit der Schwingungsrichtung *NN'* austretend, je in zwei Componenten zerlegt, deren eine, parallel dem Hauptschnitt, die ganze Amplitude, die andere, senkrecht dazu, = 0 ist. Dasselbe findet bei der Zurückführung auf eine Schwingungsebene statt, und das Licht geht folglich mit derselben Intensität hindurch, wie die in der Mitte sich vereinigenden Strahlen. Ebenso ist die eine der beiden durch die Doppelbrechung entstehenden Componenten gleich Null für alle Strahlen, welche sich in demjenigen Hauptschnitt des Krystalls fortpflanzen, welcher senkrecht zur Schwingungsrichtung *NN'* des eintretenden Lichtes steht, dieselben mögen eine Neigung gegen die Axe haben, welche sie wollen.

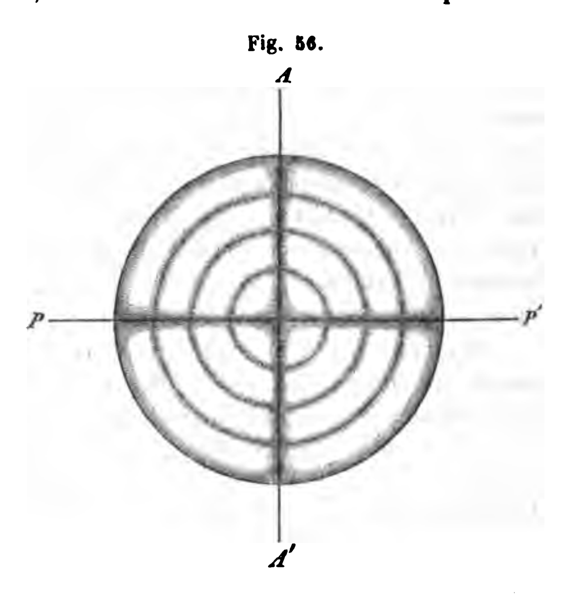
Fig. 55.



Hieraus ersehen wir, dass die dunklen Ringe, welche wir zwischen parallelen Nicols im convergenten Lichte sehen, nur an den 4 Stellen vollkommen dunkel sein können, welche 45° mit der Schwingungsrichtung der Nicols bilden und von da ab nach beiden Seiten zunehmende Helligkeit zeigen müssen, d. h. dass ein helles Kreuz dieselben durchschneiden muss, so wie es in Fig. 54 dargestellt ist.

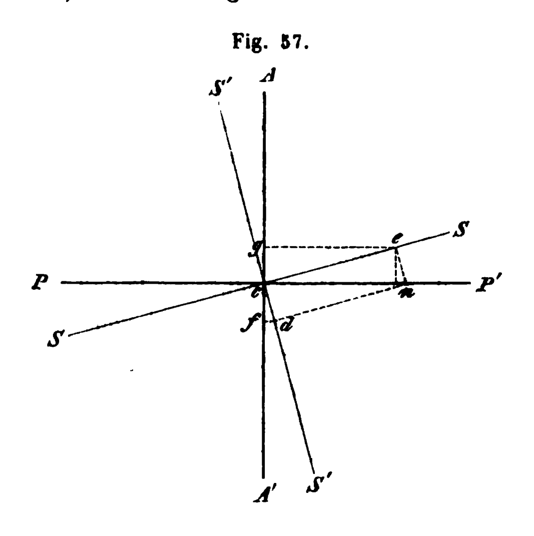
Drehen wir jetzt den Analysator des Instrumentes um 90°, so findet bekanntlich jede Interferenz mit der entgegengesetzten Phase statt. Es wird demnach in dem nunmehr sichtbaren Interferenzbild jede Stelle, welche im vorigen ein Lichtmaximum zeigt, vollkommen dunkel sein, und umgekehrt. In der That muss zunächst die Mitte des Bildes dunkel sein, denn hier vereinigen sich ja die Strahlen, welche den Krystall parallel zur Axe durchsetzen, welche also keine Veränderung in demselben erleiden, demnach zwischen gekreuzten Nicols vollkommen vernichtet werden müssen. Alle Strahlen in dem Hauptschnitt, welcher parallel der Schwingungsrichtung des unteren Nicol *PP'* Fig. 56 ist, gehen unzerlegt mit derselben Schwingungsrichtung durch den Krystall, weil deren Componente senkrecht zum Hauptschnitt gleich Null, sie werden also durch den obern Nicol vollständig ausgelöscht; dasselbe ist der Fall mit allen in demjenigen Hauptschnitt, welcher parallel der Schwingungsrichtung des oberen Nicol *AA'* ist, denn diese gehen unzerlegt in derselben Schwingungsrichtung, wie die vorigen, durch den Krystall, weil ihre Componente parallel dem Hauptschnitt gleich Null ist. Das helle Kreuz des Bildes bei parallelen Nicols muss sich also in ein dunkles Kreuz verwandeln, s. Fig. 56, wenn die Nicols gekreuzt sind. Da, wo sich bei parallelen Nicols der innerste dunkle Ring befand, kamen die Strahlen zur Interferenz, welche im Krystall um $\frac{1}{2}\lambda$ gegen einander verzögert worden waren; die beiden interferirenden Componenten waren gleich gross in der Geraden, welche mit der Schwingungsrichtung der Nicols 45° bildet, in einer anderen verschieden; in letzterem Falle kommen von der eintretenden Bewegung *cn* Fig. 57, welche im Krystall in *cd* und *ce* zerlegt wird, nur die Componenten *cg* und *cf* zur Interferenz; diese sind aber stets gleich gross, welchen Winkel auch *ce* mit *PP'* und *AA'* bilden; dagegen wird jeder derselben, also auch ihre Summe, um so kleiner, je mehr sich *ce* einer jener beiden Richtungen nähert. Bei gekreuzten Nicols interferiren nun diese Strahlen mit der entgegengesetzten Phasendifferenz von derjenigen, welche sie im Krystall erhalten haben, in diesem Falle also mit gleicher Phase. Da das hindurchgelangende Licht der Summe der beiden Elongationen *cf* und *cg* entspricht, und diese ein Maximum in 45° Abstand von den Hauptschnitten der Nicols

Fig. 56.



hat, so wird an der Stelle des dunklen Ringes nunmehr ein heller erscheinen, dessen Helligkeit von dem bezeichneten Punkte aus, nach den Armen des dunklen Kreuzes zu, allmälig abnimmt, s. Fig. 56.

Fig. 57.



In dem Abstande von der Mitte, wo bei parallelen Nicols ein heller Ring auftritt, interferirten die Strahlen, welche aus dem Krystall mit gleicher Phase austraten, jetzt also mit entgegengesetzter Phase; da ihre Amplituden *cf* und *cg* Fig. 57 stets gleich gross sind, so vernichten sie einander vollkommen: auf dem ganzen Umfange jenes Ringes muss also gleichmässige Dunkelheit vorhanden sein. Fig. 56 stellt demnach das bei gekreuzten Nicols entstehende Interferenzbild dar, welches entsteht, wenn wir das Instrument mit einfarbigem Licht beleuchten.

Wählen wir jedoch zur Beleuchtung Licht von einer andern Farbe, z. B. mit grösserer Wellenlänge, so wird offenbar eine grössere Neigung der Strahlen gegen die optische Axe nöthig sein, um denselben eine Phasendifferenz von einer ganzen, nunmehr grösseren Wellenlänge zu verleihen, als vorher; der Abstand des ersten dunkeln Ringes von der Mitte, und ebenso der folgenden vom ersten, wird also grösser sein, als bei der früheren Farbe. Je kleiner die Wellenlänge des zur Beleuchtung benutzten Lichtes ist, desto enger werden die Ringe sein, welche wir im Polarisationsinstrument erblicken, je grösser dagegen jene ist, desto weiter werden diese sein.

Benutzen wir nun statt des einfarbigen Lichtes gewöhnliches weisses, indem wir durch den Spiegel des Polarisationsinstrumentes das Licht einer hellerleuchteten Stelle des Himmels in das Innere desselben reflectiren lassen, so werden diejenigen Strahlen, welche den Krystall in einer bestimmten Neigung zu seiner Axe durchsetzen, derartig interferiren, dass für eine bestimmte Farbe die Phasendifferenz genau $\frac{1}{2}\lambda$ beträgt, diese also zwischen gekreuzten Nicols ausgelöscht wird, während die andern um so weniger geschwächt werden, je mehr ihre Wellenlänge von jener abweicht. Das an der betreffenden Stelle des Bildes erscheinende Licht wird also nach der Vernichtung einer gewissen Farbe nicht mehr Weiss, sondern eine Mischfarbe zeigen. Diese Farbe wird für alle Strahlen, welche gleiche Neigung gegen die optische Axe des Krystalls haben, gleich sein, demnach werden alle Punkte des Interferenzbildes gleiche Farbe zeigen, welche gleich weit vom

Centrum entfernt sind; dagegen alle von verschiedener Entfernung verschiedene Farbe. Bei gekreuzten Nicols erscheinen also farbige Ringe, von einem schwarzen Kreuz durchschnitten (Fig. 1. Taf. I.), bei parallelen Nicols ebenfalls, aber mit weissem Kreuz. Im letzten Falle ist in jedem einzelnen Abstand von der Mitte gerade diejenige Farbe verlöscht, welche im ersteren Falle im Maximum ist (weil die Strahlen bei gekreuzten Nicols mit entgegengesetzter Phase interferiren), es erscheint also an jeder Stelle in dem einen Bilde eine Mischfarbe, in dem andern die gleichsam entgegengesetzte, welche aus Weiss entsteht, wenn grade die Farben vernichtet oder geschwächt werden, welche bei der ersteren im Maximum waren. Solche entgegengesetzte Mischfarben nennt man supplementär; die farbigen Ringe des Interferenzbildes mit schwarzem Kreuz sind demnach bei gleichem Durchmesser genau supplementär denen des Bildes mit weissem Kreuz gefärbt. Die krummen Linien eines Interferenzbildes, welche in allen ihren Punkten die gleiche Farbe zeigen, nennt man »isochromatische Curven«; diejenigen einer optisch einaxigen Platte, senkrecht zur Axe, sind also genaue Kreise, deren gemeinschaftliches Centrum der Richtung der Axe entspricht. Dadurch, dass wir durch zwei parallele Flächen eines Krystalls hindurch die kreisförmigen isochromatischen Curven mit dem dunkeln Kreuz (bei ⊥ Nicols) sehen, ist der Krystall, da nur optisch einaxige diese Erscheinung zeigen, nicht nur als ein solcher erkannt, sondern auch die Richtung seiner optischen Axe, als normal zu jenem Flächenpaar, bestimmt.

Bisher ist ein Umstand noch ausser Acht gelassen, nämlich die Dicke der Krystallplatte. Nehmen wir statt der bisher betrachteten Platte, welche wir immer gleich dick voraussetzten, eine andere von derselben optisch einaxigen Substanz, ebenfalls senkrecht zur Axe, aber nur von halber Dicke, so werden in dieser die beiden durch die Doppelbrechung aus einem entstehenden Strahlen bei derselben Neigung gegen die Axe nur einen halb so langen Weg im Krystall zurücklegen, also auch der eine nur halb so viel gegen den andern verzögert werden, als vorher. Dieselbe Verzögerung, welche dieselbe Interferenz bedingt, kann also erst für Strahlen eintreten, welche eine weit grössere Neigung gegen die Axe besitzen, es kann also z. B. in einfarbigem Licht der erste dunkle Ring des Interferenzbildes erst in viel grösserem Abstand von der Mitte entstehen, ebenso bei weissem Licht jeder Ring von gleicher Farbe. Die isochromatischen Curven, die ein einaxiger Krystall zeigt, sind demnach um so weiter von einander abstehend, je dünner die untersuchte Platte ist, um so enger, je dicker dieselbe gewählt wird.

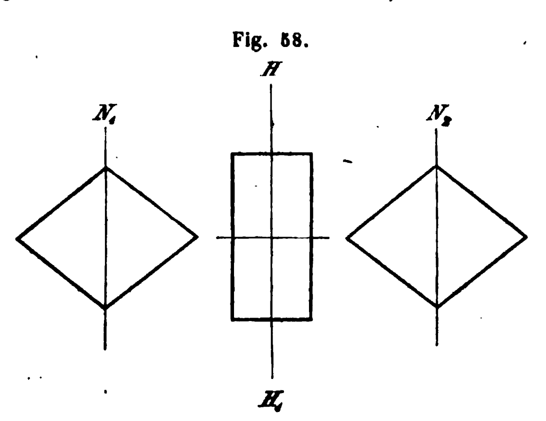
Vergleichen wir endlich noch die Farbenringe, welche gleich dicke Platten verschiedener Substanzen zeigen, so finden wir sie an Weite verschieden. Die Ursache hiervon ist die, dass die Differenz der Geschwindigkeit des ordentlichen und des ausserordentlichen Strahls bei verschiedenen Körpern sehr verschieden ist, dass sie, wie man es zu bezeichnen pflegt, sehr verschiedene Stärke der Doppelbrechung haben. In einem Kry-

stall von schwächerer Doppelbrechung, in welchem jene Differenz kleiner ist, werden die Strahlen stärker gegen die optische Axe geneigt sein müssen, um $\frac{1}{2}\lambda$ Phasendifferenz zu erhalten, also die Farbenringe des Interferenzbildes weiter sein müssen, als in einem Krystall von stärkerer Doppelbrechung bei gleicher Dicke. Als ein Beispiel einer Substanz, welche sehr starke Doppelbrechung besitzt, deren Platten demnach, wenn sie nicht sehr dünn sind, stets sehr enge Farbenringe zeigen, dient der Kalkspath. Dagegen giebt es eine Varietät eines Minerals, des Apophyllit, deren Krystalle so geringe Doppelbrechung haben, dass sie für die Farben, welche das eine Ende des Spectrums bilden, positiv, für die des andern Endes negativ doppelbrechend sind, in den ersteren sich der ordinäre, in den letzteren der extraordinäre Strahl schneller fortpflanzt, so dass es eine Farbe dazwischen giebt, für welche sie einfach brechend sind, ohne deshalb zu den isotropen Krystallen zu gehören, da diese alle Farben einfach brechen, jene aber für alle übrigen Farben wirklich einaxig sind.

2) Blickt man im Polarisationsinstrument durch ein paralleles Flächenpaar eines Krystalls, welches parallel der optischen Axe oder schräg dagegen geneigt ist, so zeigen sich folgende Erscheinungen:

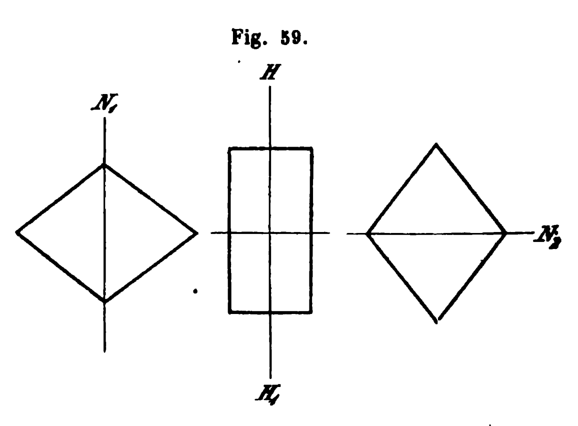
a) Bei der Beobachtung im parallelen Licht wird eine Platte, welche so dünn ist, dass die beiden senkrecht zu einander polarisirten Strahlen, welche darin entstehen, genau eine halbe Wellenlänge von dem Licht einer bestimmten Farbe Phasendifferenz beim Austritt besitzen, wenn dieselbe mit Licht von der in Rede stehenden Farbe beleuchtet wird, hell oder dunkel erscheinen je nach ihrer Lage zu den Nicols und deren relativer Stellung. Seien die Letzteren parallel, in Fig. 58 durch N_1 und N_2 neben einander (statt der eine vor dem andern) mit der Richtung ihrer Schwingungsebene angedeutet, dazwischen die Platte, deren Hauptschnitt parallel HH_1 und senkrecht zur Zeichnungsebene sein möge, so wird jeder in die Platte eintretende Strahl in einen parallel HH_1 und einen senkrecht dazu schwingenden zerlegt. Steht der Hauptschnitt der Platte, wie in Fig. 58, parallel denen beider Nicols, so geht der aus N_1 austretende Strahl vollständig als extraordinärer durch den Krystall, ebenso durch N_2, also erscheint die Platte hell. Wird dieselbe indess in ihrer eignen Ebene gedreht, so dass ihr Hauptschnitt einen Winkel nach rechts oder links mit dem Hauptschnitt der Nicols bildet, so entstehen nunmehr zwei Strahlen

Fig. 58.



im Krystall, welche beim Austritt entgegengesetzte Phase haben, also durch N_2 auf eine Polarisationsebene zurückgeführt, auch mit entgegengesetzter Phase interferiren. Ist die mit der Krystallplatte vorgenommene Drehung geringer, als 45°, so ist der extraordinäre Strahl von beiden der intensivere, die Componenten beider nach dem Hauptschnitt von N_2 also nicht gleich gross, es kann demnach keine vollständige Vernichtung bei der Interferenz eintreten, die Platte erscheint nur weniger hell. Bei einer Drehung von 45° dagegen sind jene beiden Componenten genau gleich gross, also müssen sie, mit $\frac{1}{2}\lambda$ Phasendifferenz interferirend, sich vollständig auslöschen; die Platte erscheint, mit der betreffenden Farbe beleuchtet, dunkel. Bei weiterer Drehung erscheint sie wieder heller, am hellsten bei 90°, ebenso bei 180° und 270° Drehung, während sie bei 135°, 225° und 315° dunkel wird. Seien die beiden Nicols N_1 und N_2 Fig. 59 in gekreuzter Stellung und die Platte von derselben Dicke, wie oben angegeben, mit ihrem Hauptschnitt HH_1 parallel demjenigen von N_1, so geht das aus letzterem austretende Licht ungeändert als extraordinärer Strahl hindurch, wird aber durch den zweiten Nicol, dessen Schwingungsrichtung zu der seinigen genau senkrecht steht, vollständig ausgelöscht; die Platte erscheint in dieser Stellung dunkel. Drehen wir dieselbe, wie vorhin, um einen kleinen Winkel,

Fig. 59.



so entstehen zwei Strahlen in derselben, von denen indess der ordinäre nur eine kleine Amplitude besitzen kann, diese liefern jeder im zweiten Nicol zwei Componenten, von denen nur die eine durchgelassen wird, von dem ordinären eine relativ grosse, von dem extraordinären aber nur eine kleine; beide interferiren mit gleicher Phase, da die entgegengesetzte, mit der sie aus dem Krystall austreten, durch die gekreuzte Stellung der Nicols wieder aufgehoben wird. Sie setzen sich also zusammen, da sie aber beide von geringer Intensität sind, so erscheint die Platte nur wenig erhellt. Die beiden sich addirenden Componenten wachsen aber mit der Drehung; bei 45° haben sie ihren grössten Werth, die Platte erscheint am hellsten; bei 90° wieder dunkel u. s. f. jedesmal dunkel, wenn ihr Hauptschnitt parallel demjenigen eines der beiden gekreuzten Nicols ist.

Wird eine derartige Platte, statt in Licht von derjenigen Farbe, dessen Wellenlänge doppelt so gross ist als die Wegdifferenz der beiden sie durchsetzenden Strahlen, in weissem Licht beobachtet, während die Nicols des Instrumentes gekreuzt sind, so wird sie, wie im homogenen Licht, dunkel

in den vier Stellungen, in denen ihr Hauptschnitt parallel der Schwingungsebene eines der Nicols ist. In den Zwischenstellungen wird jene Farbe im Maximum ihrer Intensität sein, deren halbe Wellenlänge der Phasendifferenz der beiden Strahlen gleich ist, die anderen Farben werden, da für sie die Interferenz nicht mit gleicher Phase eintritt, mehr oder weniger geschwächt erscheinen. Die Gesammtwirkung kann also nicht Weiss sein, sondern eine Mischfarbe, welche durch das Vorwalten jener Farbe und Schwächung der übrigen entsteht. Die Platte wird also beim Drehen um 360° vier mal dunkel und in den Zwischenstellungen mit einer Mischfarbe gefärbt, welche ihr Maximum an Helligkeit erreicht, wenn der Hauptschnitt des Krystalls 45° mit denen der Nicols bildet.

Ist die Krystallplatte so dick, dass sie für eine bestimmte Farbe den beiden Strahlen eine ganze Wellenlänge Phasendifferenz verleiht, so wird diese Farbe bei gekreuzten Nicols, wo also die Interferenz mit entgegengesetzter Phase stattfindet, theilweise und bei 45° vollständig ausgelöscht; die Platte zeigt demnach vier mal dunkel und dazwischen eine Mischfarbe (aus Weiss entstehend durch Wegnahme obiger Farbe), welche am reinsten erscheint, wenn der Hauptschnitt des Krystalls 45° mit denen der Nicols bildet. Ist die Dicke der Krystallplatte eine andere, so wird eine von jener verschiedene Farbe in den Zwischenstellungen ausgelöscht, es erscheint demzufolge eine andere Mischfarbe. Da die Grösse der Lichtwellen eine sehr geringe, so bedarf es nur einer sehr kleinen Differenz der Dicke, um eine andere Farbe hervorzubringen; wenn die Platte also nicht ganz genau gleichen Durchmesser an allen Stellen besitzt, zeigt sie nicht überall die gleiche Interferenzfarbe. Das Erscheinen derselben Farbe auf der ganzen Platte ist also ein sehr genaues Mittel zur Controle über die Gleichheit ihrer Dicke an allen Stellen. Bei parallelen Nicols erscheint die sogenannte Complementärfarbe der bei gekreuzten Nicols entstehenden Interferenzfarbe.

Bei einer gewissen grösseren Dicke werden mehrere Farben in den Zwischenstellungen ausgelöscht, z. B. die eine, weil sie $\frac{7}{2}\lambda$, die andere, weil sie mit $\frac{9}{2}\lambda$ Phasendifferenz interferirt; die Mischfarben, welche entstehen, unterscheiden sich immer weniger von Weiss, je mehr Farben durch die Interferenz vernichtet werden, d. h. je dicker die Platte ist. Ueber eine gewisse Dicke hinaus werden so viele Lichtarten des Spectrums ausgelöscht, dass die übrigen zusammen wieder den Eindruck des Weiss auf das Auge machen, es entsteht das Weiss der höheren Ordnung; die Platte wird alsdann beim Drehen vier mal einfach hell und dunkel. Die Dicke, bei welcher im weissen Lichte diese Erscheinung eintritt, hängt selbstverständlich von der Stärke der Doppelbrechung im Krystall ab.

Diese Erscheinungen können nun dazu dienen, in mikroskopischen Präparaten einaxige Krystalle als solche zu erkennen. Bestehe ein solches Präparat z. B. aus einer ausserordentlich dünngeschliffenen Platte eines Gesteins, welches in einer Grundmasse ausgeschiedene Krystalle enthält, von denen

geprüft werden soll, ob sie optisch einaxige sind. Diese sind durch die Fläche des Schliffes in verschiedenen Richtungen getroffen worden, so dass man im Gesichtsfelde des Mikroskops neben einander dünne Platten, in den mannigfaltigsten Richtungen aus den Krystallen geschnitten, vor sich hat. Bringt man jetzt einen Polarisator und, damit gekreuzt, einen Analysator an das Mikroskop an, dreht den Schliff in seiner eigenen Ebene um 360°, und beobachtet, dass einige Durchschnitte bei jeder Stellung dunkel bleiben, während die Mehrzahl vier mal zwischen hell und dunkel (farbig und dunkel bei sehr geringer Dicke) wechselt, so hat man die Krystalle als optisch einaxig zu betrachten, falls alle anderen Kennzeichen für die Identität der dunkelbleibenden und der hellwerdenden Krystalle sprechen. Die dunkelbleibenden Querschnitte sind alsdann diejenigen, deren Schnittebene nahezu senkrecht zur optischen Axe steht. Wenn alle Querschnitte beim Drehen dunkel bleiben, sind die Krystalle natürlich isotrop.

b) Bei der Beobachtung im convergenten Licht werden, wenn dasselbe weiss ist, nach dem Vorigen nur sehr dünne Platten Farbenerscheinungen liefern können. Eine solche Platte wird in der Mitte des Gesichtsfeldes dieselbe Farbe erzeugen, welche man im parallelen Licht durch dieselbe beobachtet hat; die Strahlen, welche dagegen die Platte in geneigter Richtung durchsetzen, werden zwar sämmtlich eine wachsende Wegdifferenz im Krystall erfahren, aber nicht eine gleichartig wachsende Phasendifferenz, da nach gewissen Richtungen hin, wenn sie sich nämlich der optischen Axe nähern, der Unterschied der Geschwindigkeit der beiden Strahlen fortwährend abnimmt, also trotz zunehmender Dicke auch die Phasendifferenz sich vermindert. In senkrecht zu diesen geneigten Richtungen wird sich die Geschwindigkeitsdifferenz nicht ändern, also mit wachsender Neigung, wobei die Dicke der durchstrahlten Schicht zunimmt, auch die Phasendifferenz wachsen. In dazwischen liegenden Richtungen werden beide Wirkungen sich aufheben und die Phasendifferenz für alle Neigungen dieselbe bleiben. Es entstehen so im homogenen Licht dunkle und helle, im weissen Licht farbige Streifensysteme, welche im Allgemeinen hyperbolische Form haben, und in letzterem Falle nur bei sehr geringer Dicke der Platte sichtbar sind. Von besonderem praktischen Interesse für die Krystallographie ist nur die Erscheinung, welche eine nicht sehr schief, nicht über 25—30° gegen die normal zur optischen Axe stehende Ebene geneigte, geschliffene Platte zeigt; bei einer solchen werden nämlich im convergenten Licht bei grossem Gesichtsfeld des Polarisationsinstrumentes noch solche Strahlen innerhalb desselben vereinigt werden, welche in der Richtung der Axe durch den Krystall gehen. Man wird demnach nahe dem Rande des Gesichtsfeldes das Interferenzbild der Axe, das schwarze Kreuz mit den Farbenringen (wenn auch letztere nicht mehr genau kreisförmig) erblicken. Nach dieser Richtung hin, unter spitzem Winkel gegen die Normale zur Platte geneigt, befindet sich demnach diejenige der optischen Axe, zu deren Auffindung jene Erscheinung dienen kann.

§. 17. **Circularpolarisation.** Stellt man die Nicols eines Polarisationsinstrumentes gekreuzt und fügt, indem man mit einfarbigem und parallelem Licht beleuchtet, eine senkrecht zur Axe geschnittene Quarzplatte*) ein, so erscheint diese nicht dunkel, wie eine andere einaxige Platte, sondern hell, und man muss den oberen Nicol um einen bestimmten Winkel drehen, um das aus derselben austretende Licht auszulöschen. Während also sonst einaxige Krystalle die Polarisation eines in der Richtung der Axe sie durchsetzenden Strahles nicht um das Geringste ändern, ist der parallel der optischen Axe durch Quarz gegangene Strahl zwar auch noch einheitlich linear polarisirt, denn er wird vom oberen Nicol vollständig ausgelöscht, aber er hat beim Austritt eine andere Schwingungsrichtung als beim Eintritt in jenen Krystall; seine Polarisationsebene ist in demselben gedreht worden, um denselben Winkel, um welchen man den Nicol aus der gekreuzten Stellung drehen muss, um die Platte wieder dunkel erscheinen zu lassen. Solche, die Polarisationsebene des hindurchgehenden Lichtes drehende Substanzen nennt man circularpolarisirende, die Erscheinung Circularpolarisation.

Betrachten wir eine Anzahl gleich dicker Quarzplatten von angegebener Richtung im parallelen polarisirten Licht, aber stets bei derselben einfachen Farbe, so werden wir finden, dass wir bei einem Theil derselben den oberen Nicol stets um denselben Winkel nach Rechts (wie der Zeiger der Uhr sich bewegt) drehen müssen, um Auslöschung hervorzubringen, während wir bei den übrigen, und zwar um genau denselben Winkel, den Nicol links herum drehen müssen, um das Gleiche zu erzielen. Daraus ersehen wir, 1) dass alle Quarzplatten von gleicher Dicke die Polarisationsebene derselben Lichtart gleich stark drehen, 2) dass ein Theil jedoch dieselbe nach rechts, der andere sie nach links dreht. Rechts- und linksdrehende Quarzkrystalle unterscheiden sich weder chemisch, noch durch ihre äusseren Eigenschaften, mit Ausnahme gewisser, später zu besprechender Differenzen in der Krystallform.

Bestimmt man die Stärke der Drehung bei Quarzplatten von verschiedener Dicke, so findet man, dass dieselbe mit der Dicke der Platte proportional wächst. Man kennt also die Drehung, welche die Polarisationsebene eines Strahls von bestimmter Farbe erfährt, für jede beliebige Dicke, wenn man diejenige für eine bestimmte, z. B. 1 Millim. Dicke, gemessen hat. Das Drehungsvermögen verschiedener Substanzen ist daher auch nur bei derselben Dicke zu vergleichen.

Wenden wir nun statt der zuerst benutzten Farbe das Licht von anderen an, so beobachten wir bei einer und derselben Platte sehr verschiedene Drehungen und zwar um so grössere, je kleiner die Wellenlänge des angewandten Lichtes ist. So dreht nach den Messungen von Biot eine

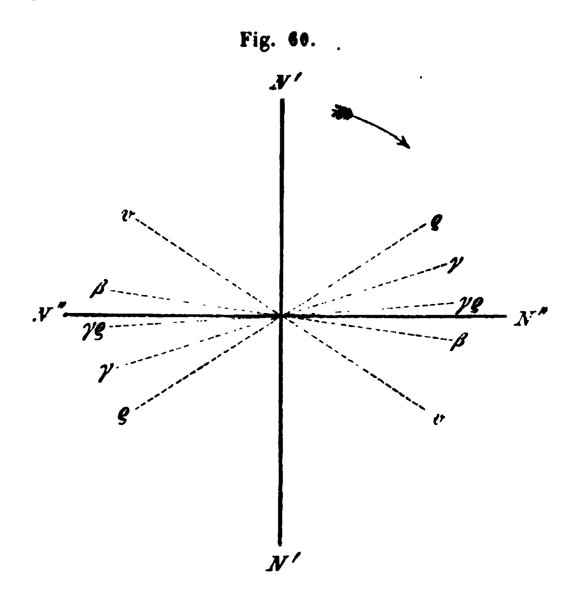
*) Quarz oder Bergkrystall, SiO^2, ist optisch einaxig.

Quarzplatte von 1 Millim. Dicke die Strahlen der verschiedenen Farben des Spectrums um folgende Winkel:

Aeusserstes	Roth	17°,5
Mittleres	Roth	19,0
,,	Orange	21,4
,,	Gelb	24,0
,,	Grün	27,8
,,	Blau	32,3
,,	Indigo	36,1
,,	Violett	40,8
Aeusserstes	Violett	44,1.

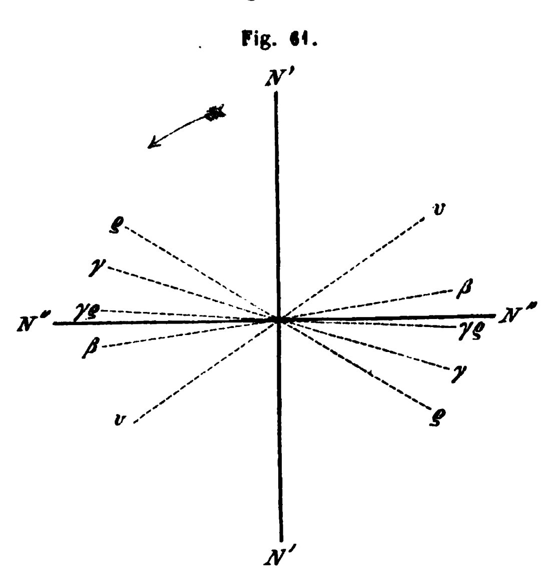
Die grosse Verschiedenheit der Drehung, welche demnach die verschieden gefärbten Strahlen erleiden, ist die Ursache, dass wir im weissen Licht bei keiner Drehung des Analysators Dunkelheit der Platte hervorbringen können, da die Strahlen verschiedener Farben in ganz verschiedenen Ebenen schwingen, also auch nicht alle zugleich durch den Nicol ausgelöscht werden können. Sei Fig. 60 $N'N'$ die Schwingungsebene der parallelen, in eine rechtsdrehende Quarzplatte von etwa drei Millim. Dicke eintretenden weissen Lichtstrahlen, so werden die darin enthaltenen rothen Strahlen in dem Quarz die geringste Drehung erleiden, ihre Schwingungsrichtung wird etwa $\varrho\varrho$, diejenige der gelben Strahlen $\gamma\gamma$, der grünen $\gamma\varrho$-$\gamma\varrho$, der blauen $\beta\beta$, der violetten vv sein. Steht der Analysator senkrecht zum Polarisator, ist die Schwingungsebene des durch den ersteren hindurchgehenden Lichtes parallel $N''N''$, so wird derselbe nur diejenigen aus dem Quarz austretenden Strahlen ganz ungeschwächt hindurchlassen, welche parallel $N''N''$ schwingen; dies sind die grünen. Alle Strahlen der andern Farben werden im Nicol in zwei Componenten zerlegt, von denen eine vernichtet wird, und diese letztere ist um so grösser, je grösser der Winkel ist, welchen ihre Schwingungsrichtung mit $N''N''$ macht. Es werden also alle andern Farben geschwächt, um so mehr, je grösseren Winkel ihre Vibrationsrichtung mit der des Analysators $N''N''$ einschliesst. Der Gesammteindruck aller dieser Farben nach ihrer Zurückführung auf eine Polarisationsebene

Fig. 60.



kann demnach nicht mehr Weiss sein, sondern muss der einer Mischfarbe sein, in welcher das Grün über die andern Farben vorherrscht. Im weissen parallelen Licht beobachtet, wird also eine solche Platte bei gekreuzten Nicols grün erscheinen. Eine Drehung der Platte in ihrer eignen Ebene wird an dieser Erscheinung nicht das Geringste ändern, da ja hierbei die Richtung, in welcher die Strahlen die Platte durchsetzen, also auch die Drehung ihrer Polarisationsebene stets dieselbe bleibt, wohl aber eine solche des einen Nicols gegen den andern. Drehen wir z. B. den Analysator aus der Stellung $N''N''$ Fig. 60 nach rechts (wie der Pfeil in der Figur andeutet, so wird seine Schwingungsrichtung parallel derjenigen des blauen Lichtes, dies wird also in der entstehenden Mischfarbe im Maximum, die anderen Farben geschwächt sein; die Platte wird blau erscheinen. Bei weiterer Drehung in derselben Richtung fällt $N''N''$ mit der Schwingungsrichtung vv des violetten Lichtes zusammen; die Platte erscheint violett. Drehen wir über $N'N'$ hinaus, bis $N''N''$ parallel $\varrho\varrho$ wird, so ist die Platte mit einer Mischfarbe gefärbt, in welcher Roth vorherrscht, also sehen wir sie roth, bei weiterer Drehung gelb, wiederum grün, blau, violett. Drehen wir demnach den Analysator nach Rechts, so erscheint die Platte stets farbig, aber ihre Farbe ändert sich in der Weise, dass die verschiedenen Farben des Spectrums in der Reihenfolge ihrer Brechbarkeit (von dem am wenigsten brechbaren Roth bis zum Violett, welches am stärksten gebrochen wird) erscheinen. Man sieht leicht ein, dass bei umgekehrter Drehung die Farbenfolge die entgegengesetzte sein wird.

Fig. 61.



Nehmen wir nun statt der rechtsdrehenden eine linksdrehende Quarzplatte von derselben Dicke, und sei wieder $N'N'$ Fig. 61 die Schwingungsrichtung des in dieselbe eintretenden weissen Lichtes, so werden die Schwingungsrichtungen der rothen, gelben, grünen, blauen und violetten Strahlen nach ihrem Austritt aus der Platte jetzt resp. $\varrho\varrho$, $\gamma\gamma$, $\gamma\varrho\,\gamma\varrho$, $\beta\beta$, vv sein. Es wird also, wie bei dem rechtsdrehenden Quarz, bei keiner Stellung der Nicols Dunkelheit eintreten, sondern die Platte zeigt stets eine Mischfarbe. Bei gekreuzter Stellung des Analysators, wenn dessen Schwingungsrichtung $N''N''$, erscheint auch diesmal die Platte grün; wird der obere Nicol jedoch

rechts herumgedreht, so erscheint jetzt zunächst gelb, dann roth u. s. f.; bei derselben Drehung des Nicols, bei welcher wir mittelst einer rechtsdrehenden Quarzplatte die Farben in der Reihenfolge ihrer Brechbarkeit erhielten, resultiren dieselben bei einer linksdrehenden Platte in umgekehrter Reihenfolge, d. h. wir müssen in entgegengesetztem Sinne drehen (wie der Pfeil angiebt), um dieselbe Farbenfolge zu erhalten.

Hieraus folgt, dass eine rechts- und eine linksdrehende Quarzplatte, zwischen zwei Nicols von derselben Stellung zu einander, z. B. senkrecht gekreuzte, gebracht, dieselbe Farbe zeigen, beide sich aber dadurch unterscheiden, dass bei einer Drehung des Analysators die Farben in der Reihenfolge: Roth, Orange, Gelb, Grün, Blau, Violett erscheinen, wenn die Platte rechtsdrehend ist, bei rechter Drehung des Analysators (wie der Zeiger der Uhr sich bewegt); wenn sie linksdrehend ist, bei entgegengesetzter Drehung jenes Nicols.

Legen wir eine dickere Quarzplatte zwischen zwei gekreuzte Nicols, so muss dieselbe eine andere Farbe zeigen, als die vorige zwischen denselben Nicols, weil sie proportional ihrer Dicke stärker dreht, also die Schwingungsrichtungen der verschiedenen Farben beim Austritt aus derselben ganz andere (stärker gedrehte) Lage haben, folglich durch den Analysator nicht dieselbe Farbe ausgelöscht wird, als vorher.

Da die Circularpolarisation nur in der Richtung der optischen Axe der Quarzkrystalle auftritt, während dieselben sich in allen andern Richtungen ebenso, wie andere optisch einaxige Krystalle verhalten, so muss eine Quarzplatte, welche senkrecht zur Axe geschliffen ist, im convergenten Licht betrachtet, gleichfalls das schwarze Kreuz mit den kreisförmigen Farbenringen zeigen, wenn die Nicols des Polarisationsinstrumentes gekreuzt sind; nur diejenige Stelle des Gesichtsfeldes, in welcher sich die den Krystall parallel zur Axe durchsetzenden Strahlen vereinigen, d. i. die Mitte, kann nicht dunkel erscheinen, weil die Polarisationsebene grade dieser Strahlen gedreht wird. Die Mitte der Ringe muss also dieselbe Farbe zeigen*), welche die ganze Platte im parallelen Lichte zeigt, d. h. bei anderer Dicke eine andere. Ebenso muss diese Farbe sich ändern, wenn der Analysator gedreht wird, und aus der Reihenfolge der auftretenden Farben und dem Sinn der Drehung wird man ebenso, wie im parallelen Licht, bestimmen können, ob die Platte rechts- oder linksdrehend ist.

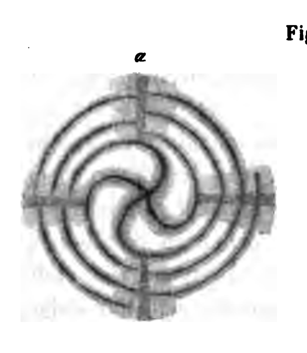
Legt man eine rechts- und eine linksdrehende Quarzplatte von gleicher Dicke auf einander, und bringt beide in das Polarisationsinstrument mit convergentem Licht und gekreuzten Nicols, so muss die Mitte des Interferenzbildes dunkel bleiben, weil die Drehungen der Schwingungsrichtungen durch beide Platten einander genau aufheben. Von der dunkeln Mitte des entstehenden Interferenzbildes gehen aber keine gradlinigen schwarzen Kreuzesarme aus, sondern spiralartig gewundene Curven, nach ihrem Entdecker

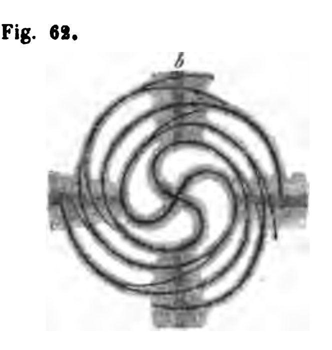
---

*) s. Fig. 2, Taf. I.

die Airy'schen Spiralen genannt, deren Windungsrichtung zugleich angiebt, in welchen von den beiden entgegengesetzt drehenden Krystallen die Lichtstrahlen zuerst eintreten. Fig. 62 *a* stellt die Erscheinung in dem Falle vor, dass das Licht zuerst durch die linksdrehende, Fig. 62 *b* in dem, dass es zuerst durch die rechtsdrehende Platte geht*).

Fig. 62.





Alles hier Gesagte gilt nun für die übrigen Substanzen, deren Krystalle Circularpolarisation zeigen, nur mit dem Unterschied, dass das Drehungsvermögen derselben ein anderes ist, bei einigen stärker, bei den meisten schwächer, als das des Quarzes. Die Fähigkeit, die Polarisationsebene des Lichtes zu drehen, besitzen, ausser gewissen Flüssigkeiten, nur Krystalle, welche entweder keine Doppelbrechung besitzen, isotrope, oder einaxige in derjenigen Richtung, in welcher sie einfach brechend sind, d. h. parallel der optischen Axe. Bis jetzt hat man diese Fähigkeit an folgenden chemischen Verbindungen gefunden:

a) Isotrope, welche die Polarisationsebene des Lichtes in allen Richtungen, und zwar gleich stark, drehen:

Chlorsaures Natrium,
Bromsaures Natrium,
Essigsaures Uranylnatrium.

b) Einaxige, welche nur in der Richtung der optischen Axe Drehungsvermögen besitzen:

Schwefelsaures Strychnin,
Schwefelsaures Aethylendiamin,
Kohlensaures Guanidin,
Quarz,
Zinnober,
Ueberjodsaures Natrium,
Unterschwefelsaures Blei,
Unterschwefelsaures Kalium,
Unterschwefelsaures Calcium,
Unterschwefelsaures Strontium,
Benzil,
Maticokampher.

*) Unter den in der Natur vorkommenden Krystallen des Quarzes finden sich solche, welche aus Schichten von Rechts- und Links-Quarz zusammengesetzt sind, und dies ist dann oft nur durch das Auftreten der Airy'schen Spiralen zu erkennen.

§. 18. Doppelbrechung in zweiaxigen Krystallen. Bei den optisch einaxigen Krystallen ist zwar die Elasticität des Aethers nach den verschiedenen Richtungen verschieden, jedoch symmetrisch zur Axe, so dass sie gleich ist für alle Richtungen rings um die Axe, welche gleichen Winkel mit derselben einschliessen. Bei der letzten, jetzt zu betrachtenden Klasse von Krystallen jedoch giebt es keine Richtung, von welcher ausgehend sich die Elasticität nach allen Richtungen gleichartig ändert; es ist vielmehr, von welcher Richtung wir auch ausgehen mögen, diese Aenderung stets eine andere, wenn wir uns nach einer andern Seite hin von jener Ausgangsrichtung entfernen. Die optischen Verhältnisse sind daher bei dieser Klasse von Krystallen ungleich complicirter, und zwar in solchem Grade, dass man die Gesetze der Aenderung der Elasticität des Aethers mit der Richtung nicht empirisch erforscht hat, sondern dieselben zuerst (von Fresnel) theoretisch aus den Grundsätzen der Undulationstheorie des Lichtes abgeleitet und dann mit den Beobachtungen verglichen worden sind, wobei sich eine Bestätigung jener durch diese gezeigt hat, wie sie vollkommener nicht gedacht werden kann. Die wichtigsten Resultate jener theoretischen Ableitung, wie sie sich zunächst nur beziehen auf Schwingungen von einer bestimmten Wellenlänge (Licht von einer bestimmten Farbe) sollen im Folgenden soweit mitgetheilt werden, als sie für die Krystallographie von praktischem Interesse sind.

Da die Elasticität des Aethers nach verschiedenen Richtungen verschieden anzunehmen ist, wird es eine Richtung im Krystall geben, in welcher jene ihren grössten, eine andere, in welcher sie ihren kleinsten Werth hat. Diese beiden Richtungen stehen auf einander senkrecht. Die Elasticität in der senkrecht zu beiden stehenden Richtung wird ihrem Werthe nach zwischen dem Maximum und dem Minimum stehen müssen, ohne indess gerade das arithmetische Mittel beider zu sein. Nennen wir diese drei, in optischer Beziehung wichtigsten, Richtungen die optischen Elasticitätsaxen des Krystalls, und unterscheiden sie als Axe der grössten (OA), kleinsten (OC) und mittleren (OB) Elasticität, so ergiebt die Theorie, dass die Elasticität nach einer beliebigen andern Richtung sich aus jenen drei herleiten lässt. Bezeichnen wir den Elasticitätscoëfficienten des Aethers parallel der Axe der grössten Elasticität mit e_a, so ist nach Früherem die Geschwindigkeit der Fortpflanzung solcher Wellenbewegungen, deren Schwingungsrichtung $\parallel OA$, proportional $\sqrt{\frac{e_a}{d}}$, wenn d die Dichte des Aethers ist. Da e_a der grösste Werth der Elasticität im Krystall ist, so sind die nach OA schwingenden Strahlen diejenigen, welche sich am schnellsten fortpflanzen. Aus demselben Grunde ist, wenn e_c der Elasticitätscoëfficient nach der Axe der kleinsten Elasticität OC, diese die Schwingungsrichtung der sich am langsamsten fortpflanzenden Wellen, endlich, wenn e_b die mittlere Elasticität bedeutet, OB die Schwingungsrichtung der Strahlen mittlerer Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Die grösste, mittlere und kleinste

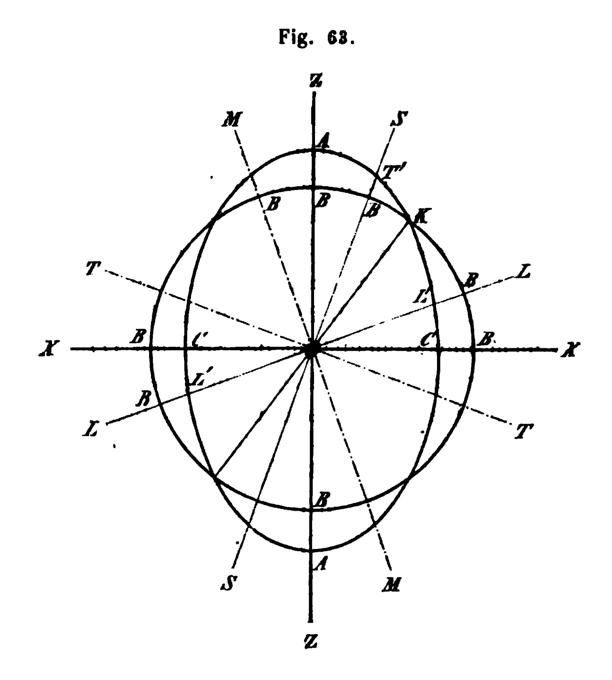
Lichtgeschwindigkeit im Krystall, mit v_a, v_b, v_c bezeichnet, stehen in folgendem Verhältniss:

$$v_a : v_b : v_c = \sqrt{\frac{e_a}{d}} : \sqrt{\frac{e_b}{d}} : \sqrt{\frac{e_c}{d}}$$
$$= \sqrt{e_a} : \sqrt{e_b} : \sqrt{e_c}$$

Das Verhältniss der grössten, mittleren und kleinsten Elasticität ist demnach bekannt, sobald das Verhältniss der grössten, mittleren und kleinsten Lichtgeschwindigkeit bestimmt worden ist. Wenn wir uns eine geschlossene krumme Oberfläche construiren, deren Radienvectoren proportional sind der Grösse der Fortpflanzungsgeschwindigkeit in der jedesmaligen Richtung eines jeden radius vector, so ist dies die Wellenfläche des betreffenden Krystalles, und die Tangentialebene an einem Punkt derselben stellt die Wellenebene derjenigen Strahlen dar, welche sich im Krystall parallel der Geraden vom Mittelpunkt zu jenem Berührungspunkte fortpflanzen. Die Wellenfläche der zweiaxigen Krystalle wird nun an einer beliebigen Stelle, wie die der einaxigen, aus zwei getrennten Schalen bestehen, die aber hier nicht aus einer Kugel und einem Rotationsellipsoid bestehen, sondern eine weit mehr verwickelte Form besitzen. Am leichtesten erhält man eine Vorstellung von der Gestalt dieser Wellenfläche, wenn man die Durchschnitte derselben nach den drei auf einander senkrecht stehenden Ebenen betrachtet, welche durch je zwei der Elasticitätsaxen gelegt werden können. Mögen diese Ebenen die Hauptschnitte der Wellenfläche heissen, so ist klar, dass diese sich in drei Richtungen schneiden, welche den Elasticitätsaxen parallel sind. Bezeichnen OX, OY und OZ die Richtungen der grössten, mittleren und kleinsten Elasticität und werde zuerst der Durchschnitt der Wellenfläche mit der Ebene der grössten und kleinsten Elasticität XOZ Fig. 63 betrachtet. Ein in dieser Ebene $\parallel OX$ sich fortpflanzender Strahl würde, wenn es ein solcher gewöhnlichen Lichtes wäre, seine Schwingungen in der senkrecht zu OX stehenden Ebene, und zwar in allen Azimuthen derselben, ausführen. Unter diesen Azimuthen befindet sich auch die Richtung OZ, die der kleinsten Elasticität, und senkrecht dazu OY (in der Figur nicht angegeben), die Axe der mittleren Elasticität; in den Richtungen zwischen beiden ist nach der theoretischen Herleitung der Elasticität auch diese eine dazwischen liegende. Folglich ist unter allen Richtungen in der Ebene ZOY, der Schwingungsebene des in OX sich bewegenden Strahles, OY diejenige mit der relativ grössten, OZ die mit der kleinsten Elasticität. Der Strahl OX muss also zerfallen in zwei senkrecht zu einander polarisirte Strahlen, von denen der eine in der Richtung OZ, der andere parallel OY schwingt. Der erstere hat die kleinste Lichtgeschwindigkeit; es möge die Bewegung in O begonnen und sich beiderseitig in der Richtung OX um die Strecke OC fortgepflanzt haben. Der andere, in derselben Richtung sich bewegende, aber $\parallel OY$ schwingende Strahl hat eine grössere Geschwindigkeit, er habe sich in derselben Zeit nach beiden Seiten bis BB fortgepflanzt. Die Wellenfläche muss also durch die Richtung OX auf jeder

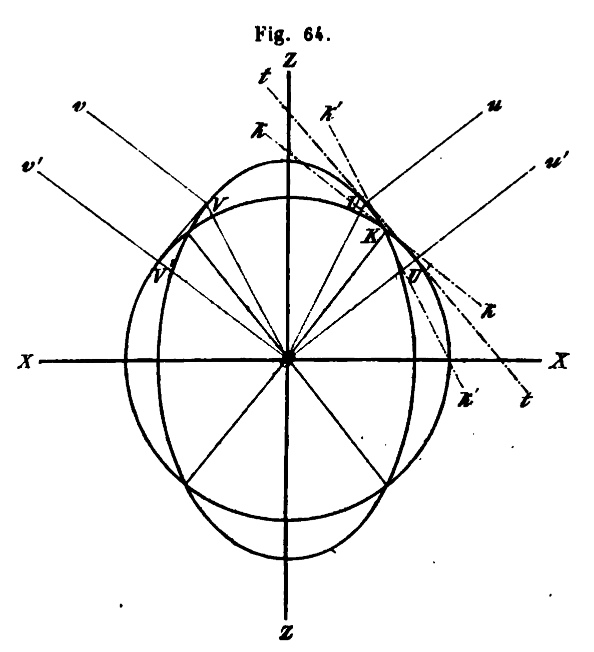
Seite in den beiden Punkten C und B durchschnitten werden. Betrachten wir nunmehr einen Strahl, in der Richtung OZ sich fortpflanzend. Die dazu normale Schwingungsebene ist XOY, in welcher OX die Richtung der grössten Elasticität ist, OY die der mittleren, also unter allen in dieser Ebene liegenden die relativ kleinste. Jener Strahl wird also in zwei, $\parallel OX$ und OY schwingende, zerlegt werden, von welchen der erste mit der grössten Lichtgeschwindigkeit beiderseits von O bis A, der zweite, der die mittlere Geschwindigkeit haben muss, bis B gelangt ist. Gehen wir nun über zu einem beliebigen anders gerichteten Strahl in dieser Ebene, z. B. OL, so ist dessen zum Strahl normale Schwingungsebene MOY; in dieser ist OY die Axe der mittleren Elasticität, OM hat einen zwischen der kleinsten und grössten liegenden Werth, da seine Richtung zwischen OX und OZ. Sei OM so nahe an OZ, dass seine Elasticität kleiner als die mittlere OY, so ist sie die relativ kleinste unter allen in der Ebene MOY liegenden Richtungen. Folglich wird sich der Strahl OL theilen in zwei Bewegungen mit den Schwingungsrichtungen OY und OM; die erstere hat die mittlere Fortpflanzungsgeschwindigkeit OB, die letztere eine zwischen der mittleren und kleinsten liegende OL'; es werden also die Punkte L' und B, bis zu welchen sich gleichzeitig die Bewegung auf OL fortgepflanzt hat, kleinere Entfernung von einander haben, als C und B auf OX, d. h. die beiden Kugelschalen nähern sich einander. Nimmt man dagegen einen Strahl OS, so ist dessen Schwingungsebene TOY, worin OY die Axe der mittleren, OT eine grössere Elasticität als die mittlere besitzt, weil sie näher an OX liegt. Folglich giebt es hier zwei Strahlen, nach OY und OT schwingend, wovon diesmal umgekehrt der erstere mit der mittleren Geschwindigkeit OB der langsamere ist, der zweite in derselben Zeit bis T' gelangt. Daraus ersehen wir, dass die Curven, in welchen die beiden Schalen der Wellenfläche von der Ebene XOZ geschnitten werden, von der Richtung OX ausgehend, sich einander nähern, z. B. in OL; näher an OZ dagegen umgekehrt liegen, die innere aussen, und sich um so mehr von

Fig. 63.



einander entfernen, je mehr die Richtung des Strahls sich OZ nähert. Dazwischen muss es folglich einen Punkt K geben, in welchem sich beide Curven schneiden, d. h. eine Richtung OK geben, in welcher ein Strahl sich fortpflanzt, dessen beide senkrecht zu einander schwingenden Componenten, $\parallel OY$ und senkrecht OK in der Ebene XOZ, gleiche Geschwindigkeit besitzen. Diese beiden Strahlen pflanzen sich zwar im Krystall in derselben Richtung OK fort, haben jedoch, wie aus Fig. 64 ersichtlich, verschiedene Wellenebenen, d. h. verschiedene Tangentialebenen durch den Punkt K an die beiden Schalen der Wellenfläche (kk und $k'k'$); diese beiden Strahlen werden also beim Austritt aus dem Krystall verschieden gebrochen. Dagegen besitzen alle Strahlen, welche auf dem Mantel eines (in Wirklichkeit stets äusserst spitzen) Kegels liegen, dessen Oeffnung UOU', z. B. die beiden Strahlen OU und OU' selbst, nur eine Wellenfläche, wenn U und U' diejenigen Punkte sind, in welchen die gemeinschaftliche Tangentialebene tt beide Schalen der Wellenfläche berührt. Diese Ebene ist nicht nur Wellenfläche der Strahlen OU und OU' sondern berührt beide Schalen rings um K in einem kleinen Kreis mit dem Durchmesser UU'; alle von O aus nach dem Umfange dieses Kreises gehenden Strahlen haben ebendieselbe Wellenebene, also kann sich in der Normale zu derselben Uu nur eine einzige Welle fortpflanzen. Die Strahlen jenes spitzen Kegelmantels treten als Strahlencylinder aus dem Krystall aus, und da alle Strahlen, welche sich im Krystall in der Richtung Uu oder $U'u'$ fortpflanzen, nur eine Wellenebene besitzen, so werden solche beim Austritt aus demselben auch keine Doppelbrechung erfahren können. Die Richtung, normal zu tt, in welcher sich die beim Austritt einfach gebrochenen Strahlen im Krystall fortpflanzen, nennen wir, wie früher, eine optische Axe.

Fig. 64.



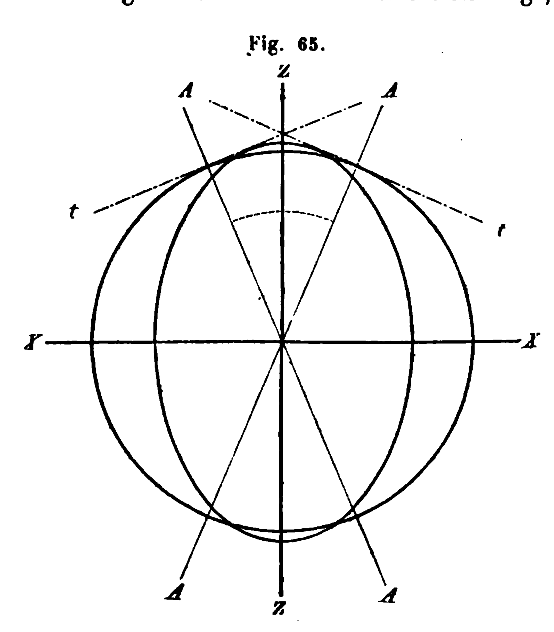
Suchen wir die Radien der Wellenfläche für Strahlen auf, deren Fortpflanzungsrichtung zwischen OX und OZ links oben und rechts unten, Fig. 64, fällt, so liefert die Theorie das Resultat, dass die Elasticität des

Aethers von OZ ausgehend, nach links ganz genau ebenso zunimmt bis zur Richtung OX, wie nach rechts. Demnach muss auch der doppelte Durchschnitt der Wellenfläche mit der Ebene XOZ auf beiden Seiten genau gleich und entgegengesetzt, nach der Geraden ZZ, ebenso nach XX symmetrisch sein. Es muss also auch links von OZ in gleichem Abstande ein Durchschnittspunkt beider Curven existiren. Die Tangentialebene VV', für welche alles über UU' ($= tt$) Gesagte ganz gleichmässig gelten muss, ist folglich gleichgeneigt mit UU' gegen OZ; die Normalen beider, vV und uU, bilden gleiche Winkel mit OZ. Parallel vV pflanzt sich ebenfalls, wie in uU, nur eine Welle durch den Krystall fort, jene Richtung ist also ebenfalls eine optische Axe. Ein derartiger Krystall besitzt demnach zwei optische Axen (daher optisch zweiaxig genannt), welche in der Ebene der grössten und kleinsten Elasticitätsaxe, die daher die optische Axenebene benannt wird, liegen und mit diesen beiden Richtungen gleiche Winkel einschliessen.

Die Gestalt der beiden Curven, welche den Durchschnitt der Wellenfläche mit der optischen Axenebene darstellen, ist für die eine sehr leicht zu bestimmen, sie ist nämlich ein Kreis. Ein Strahl in der Ebene XOZ mag eine Richtung haben, welche er wolle, wir sahen oben, dass der eine von den beiden daraus entstehenden polarisirten Wellen stets die (zur Zeichnungsebene normale) Axe der mittleren Elasticität OY zur Schwingungsrichtung habe, also sich stets mit derselben, der mittleren Geschwindigkeit, fortpflanzen muss. Dieser Strahl ist also nach Verlauf einer bestimmten Zeit auf dem Umfang eines Kreises angelangt; seine Geschwindigkeit ist unabhängig von seiner Richtung, es ist ein ordinärer Strahl, welcher dem Brechungsgesetz folgt. Anders ist es mit der zweiten, durch die Doppelbrechung entstehenden Lichtwelle. Ist die Fortpflanzungsrichtung eine andere, so ist es auch die Schwingungsrichtung, somit die Geschwindigkeit. In der Richtung OX pflanzt sich der zweite Strahl mit der kleinsten Geschwindigkeit, in OZ mit der grössten, in zwischenliegenden Richtungen mit einer Geschwindigkeit fort, welche ebenfalls zwischen jenen liegt und, wie die Theorie ergiebt, sich mit der Richtung ändert, wie die Halbmesser einer Ellipse, deren kleine und grosse Axe proportional der kleinsten und grössten Lichtgeschwindigkeit sind. Dieser letztere Strahl wird also nach Verlauf derselben Zeit auf dem Umfang einer Ellipse mit den erwähnten Axen angelangt sein. Der Durchschnitt der Wellenfläche mit der Ebene XOZ ist also eine Ellipse mit den Axen v_a und v_c (grösste und kleinste Lichtgeschwindigkeit) und ein Kreis mit dem Durchmesser v_b (mittlere Lichtgeschwindigkeit). Da v_b zwischen v_a und v_c liegt, so muss der Kreis die Ellipse vier mal schneiden; legt man an allen 4 Seiten an beide Curven die gemeinschaftliche Tangente tt Fig. 65 und zieht die Normalen dazu durch die Mitte, so hat man die Richtungen der beiden optischen Axen. Was den Winkel, der von diesen eingeschlossen wird, betrifft, so sieht man aus Fig. 65, dass die Durchschnittspunkte von Kreis und Ellipse weniger

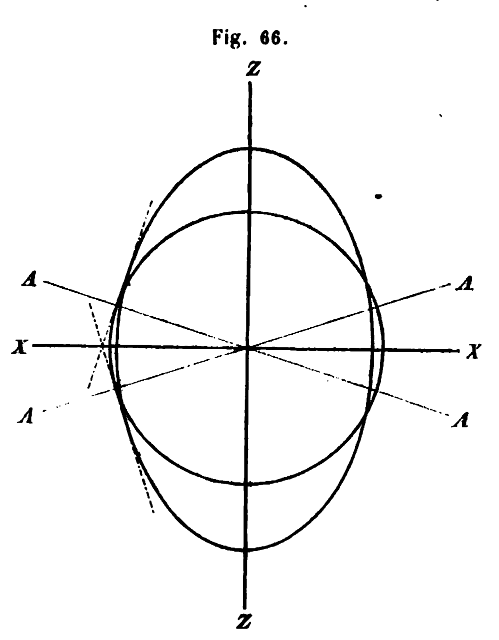
von OZ abstehen als von OX, wenn die mittlere Lichtgeschwindigkeit näher an der grössten als an der kleinsten liegt; die Halbirende des spitzen Axenwinkels, welche man die erste Mittellinie oder kurz die Mittellinie nennt, ist in diesem Falle die Axe der kleinsten Elasticität OZ, während OX den stumpfen Winkel der Axen halbirt; solche Krystalle heissen positive. Liegt dagegen die mittlere Lichtgeschwindigkeit näher an der kleinsten als an der grössten, d. h. ist der Halbmesser des Kreises wenig verschieden von der halben kleinen Axe der Ellipse, so liegen die Durchschnittspunkte der beiden Curven näher an OX (s. Fig. 66); die Axe der grössten Elasticität ist erste Mittellinie der optischen Axen, die der kleinsten zweite Mittellinie (oder Supplementarlinie), d. h. sie halbirt den stumpfen Winkel.

Fig. 65.



Diese zweite Klasse der zweiaxigen heissen negative Krystalle. Es zeigt sich somit, dass die Grösse des Winkels der optischen Axen nur davon abhängt, ob v_b näher an v_a oder an v_c liegt, also bestimmt ist, sobald man das Verhältniss $v_a : v_b : v_c$ kennt. Die Gleichung, durch welche man ihn aus den Geschwindigkeiten zu berechnen hat, wird weiterhin angegeben werden.

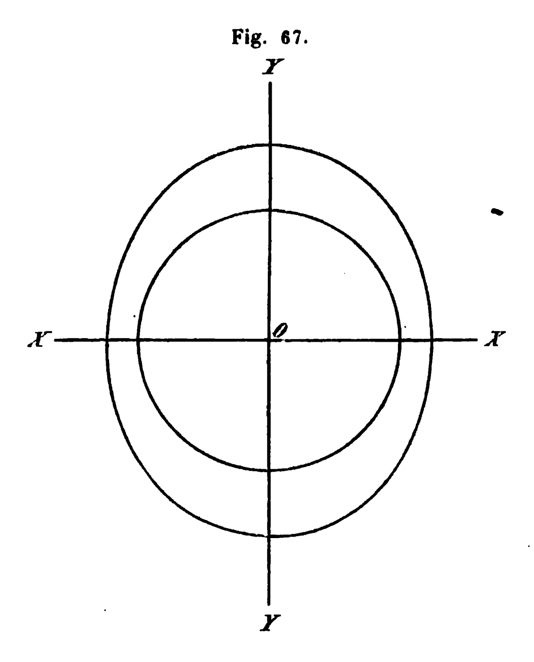
Fig. 66.



Hiermit wäre nun die Durchschnittsfigur der Wellenfläche erst mit einem Hauptschnitt, der Axenebene XOZ, gegeben, und nunmehr diejenige mit den beiden anderen, dazu senkrechten aufzusuchen. Betrachten wir zunächst den Hauptschnitt XOY, in welchem die Axe der grössten und der

mittleren Elasticität liegen. Auch hier liefert die Theorie das Resultat, dass die Elasticitätsverhältnisse gegen diese Ebene sich symmetrisch ändern und somit ein in derselben sich fortpflanzender Strahl stets in zwei zerfällt, deren einer im Hauptschnitt XOZ, deren anderer senkrecht dazu schwingt. Die Schwingungsrichtung des letzteren ist also stets dieselbe, von seiner Richtung gegen OX und OY unabhängig, und zwar ist sie die Axe der kleinsten Elasticität, also pflanzt sich dieser, der ordinäre Strahl, mit constanter Geschwindigkeit, welche gleich der kleinsten Lichtgeschwindigkeit im Krystall ist, fort. Nach Verlauf einer bestimmten Zeit wird er also bis zum Umfange eines Kreises gelangt sein, dessen Durchmesser proportional der kleinsten Lichtgeschwindigkeit v_c ist. Die andere, durch die Doppelbrechung entstehende Vibration, deren Schwingungsrichtung in den Hauptschnitt fällt, muss, da diese Richtung stets senkrecht zum Strahl steht, also mit dessen Lage gegen OX und OY wechselt, nach verschiedenen Richtungen verschieden schnell sich fortpflanzen; es ist dies ein extraordinärer Strahl. Ist die Richtung seiner Fortpflanzung OX, so ist die seiner Schwingungen OY, seine Geschwindigkeit also die mittlere; ist die erste Richtung OY, so ist die der Vibration $\parallel OX$, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit also die grösste. Da sich hier die Geschwindigkeit mit der Richtung nach einem analogen Gesetz ändert, als im ersten Hauptschnitt, so ist die Curve, bis zu deren Umfang die extraordinäre Lichtbewegung in obiger Zeit gelangt ist, eine Ellipse, deren grosse und kleine Axe proportional der grössten und mittleren Lichtgeschwindigkeit ist. Die Durchschnittsfigur der Wellenfläche mit dem Hauptschnitt XOY ist also diese Ellipse, welche den Kreis mit dem Durchmesser v_c völlig einschliesst, Fig. 67.

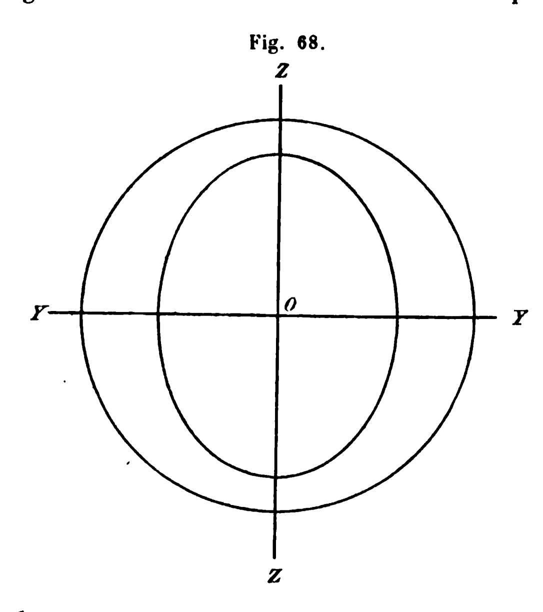
Fig. 67.



Im dritten Hauptschnitt YOZ endlich liefern alle Strahlen irgend welcher Richtung eine ordentliche Welle, welche senkrecht zum Hauptschnitt, also parallel OX, schwingt, folglich sich nach allen Seiten mit der grössten Lichtgeschwindigkeit fortpflanzt, d. h. bis zu einem Kreise, dessen Durchmesser proportional v_a. Die ausserordentliche, im Hauptschnitt schwingende Welle hat die Schwingungsrichtung OZ, wenn sie sich $\parallel OY$ fortpflanzt, also die kleinste Lichtgeschwindigkeit v_c; die nach OZ sich fortpflanzende schwingt

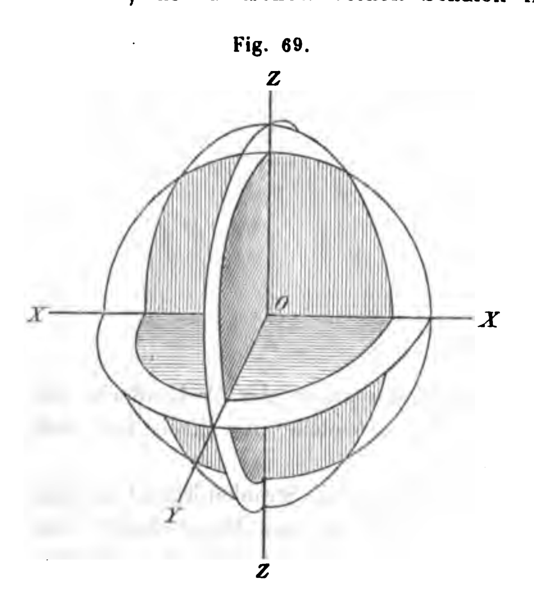
parallel OY, hat also die mittlere Geschwindigkeit v_b. Die Durchschnittsfigur der Wellenfläche mit dem dritten Hauptschnitt ist also ein Kreis, dessen Durchmesser $= v_a$, und eine Ellipse, deren grosse und kleine Axe v_b und v_c sind, welche also gänzlich innerhalb des Kreises liegt, s. Fig. 68.

Fig. 68.



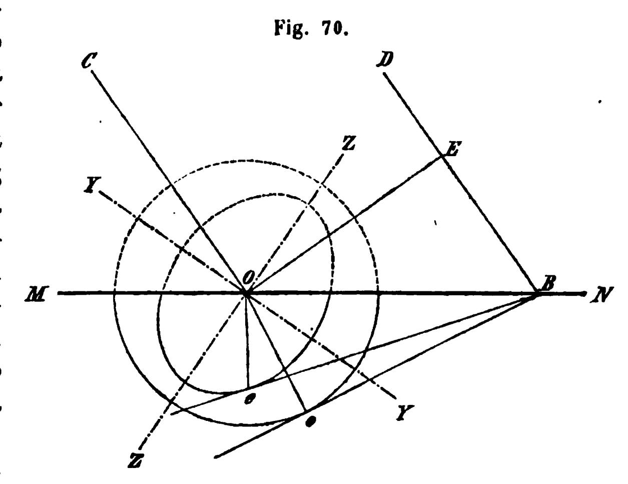
Um einen mehr zusammenhängenden Eindruck (soweit dies ohne ein Modell möglich ist) von der aus der Theorie abgeleiteten Gestalt der ganzen Wellenfläche zu geben, bis zu welcher sich also nach einer bestimmten Zeit eine in der Mitte beginnende Lichtbewegung von einer bestimmten Wellenlänge fortgepflanzt hat, möge das perspectivische Bild Fig. 69 dienen, in welchem der innerhalb der innersten Schale liegende Raum schraffirt, der zwischen beiden Schalen liegende dagegen weiss gelassen ist. Die Gestalt der Wellenfläche ist vollständig bestimmt, wenn man die grösste, mittlere und kleinste Lichtgeschwindigkeit und deren Richtungen im Krystall kennt. Deren Bestimmung vorausgesetzt (die Methode derselben wird unten besprochen), können wir die Richtung, in welcher jeder beliebig gerichtete, in den Krystall eintretende Strahl gebrochen wird, vermittelst der Huyghens'schen Construction ebenso bestimmen, wie dies S. 49 f. für einaxige Krystalle geschehen ist. Führt man die Construction aus für einen Strahl, dessen Einfallsebene einer der drei Hauptschnitte parallel ist, z. B. für die parallelen Strahlen DB bis CO (deren Wellenebene OE ist), Fig. 70, und deren Einfallsebene $\parallel YOZ$ ist, so werden die Wellenebenen

Fig. 69.



der beiden durch Doppelbrechung entstehenden Lichtbewegungen im Moment, in welchem DB in den Krystall eindringt, die Tangentialebenen von B aus an die beiden Schalen der Wellenfläche sein, und man sieht leicht, dass wegen der symmetrischen Gestalt der letzteren in Bezug auf den Hauptschnitt YOZ, die beiden Berührungspunkte o und e in demselben Hauptschnitt liegen, also auch die beiden Strahlen Oo und Oe zwar abgelenkt werden, aber den Hauptschnitt YOZ nicht verlassen. Ist jedoch die Einfallsebene keinem der drei Hauptschnitte parallel, so wird bei analoger Construction wie vorher der ihr parallele Durchschnitt der Wellenfläche diese in ungleiche Hälften theilen, so dass die vor und hinter der Ebene der Zeichnung liegenden Hälften nicht symmetrisch zu dieser Ebene liegen. Die Punkte, in welchen die Tangentialebenen, welche die gebrochenen Wellenebenen darstellen, die beiden Schalen der Wellenfläche berühren, liegen alsdann nicht mehr in der Zeichnungsebene, sondern vor oder hinter dieser. Die gebrochenen Strahlen sind demnach beide aus der Einfallsebene abgelenkt, d. h. keiner derselben folgt mehr dem Brechungsgesetz für gewöhnliches Licht, beide sind extraordinär. Einen ordinären Strahl (neben einem ausserordentlichen) erhalten wir also nur dann, wenn die Einfallsebene einem der drei Hauptschnitte parallel ist. Da man mittelst des Brechungsexponenten, der auf dem Brechungsgesetz beruht, die Lichtgeschwindigkeit nur von solchen Strahlen bestimmen kann, welche jenem Gesetze folgen, also von ordentlichen, so ist durch die soeben dargelegte Eigenschaft der zweiaxigen Krystalle zugleich die Methode angegeben, in einem solchen die Lichtgeschwindigkeit zu bestimmen.

Fig. 70.



Schleift man aus dem Krystall ein Prisma, dessen brechende Kante parallel der Axe der grössten Elasticität ist, und lässt, wie es bei der Bestimmung von Brechungsquotienten üblich, Strahlen auf die eine Fläche desselben fallen, deren Einfallsebene senkrecht zur brechenden Kante steht, so ist diese Ebene parallel dem Hauptschnitt YOZ, es tritt demnach hier der Fall ein, dass die beiden im Prisma sich fortpflanzenden Strahlen im Hauptschnitt bleiben, und zwar der eine von ihnen als ordentlicher hindurchgeht; dieser schwingt nach S. 83 f. senkrecht zum Hauptschnitt YOZ, also parallel der Axe der grössten Elasticität, er bewegt sich also mit der grössten Lichtgeschwindigkeit $= v_a$. Stellen wir das Prisma so, dass dieser

Strahl das Minimum der Ablenkung erfährt, so giebt uns letztere nebst dem brechenden Winkel des Prismas den Brechungsexponenten α desselben, d. h. das Verhältniss der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in Luft $(= v)$ zu der grössten Lichtgeschwindigkeit im Krystall:

$$\alpha = \frac{v}{v_a}$$

Schleifen wir dagegen ein Prisma, dessen brechende Kante parallel der Axe der mittleren Elasticität ist, so wird dies in gleicher Weise einen ordinären Strahl liefern, der parallel der brechenden Kante schwingt, sich also mit mittlerer Geschwindigkeit $(= v_b)$ durch das Prisma fortpflanzt. Dessen Brechungsexponent ist

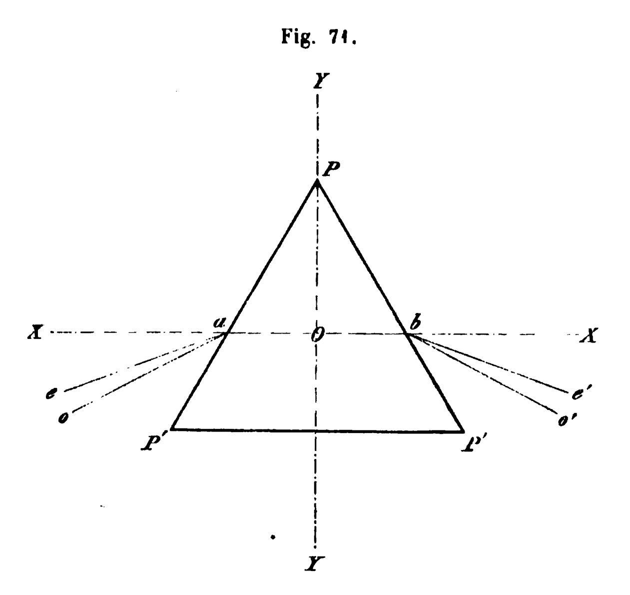
$$\beta = \frac{v}{v_b}$$

Endlich liefert uns ein drittes Prisma, dessen Kante parallel der Axe der kleinsten Elasticität ist, den Brechungsexponent γ des ordentlichen Strahls mit der Schwingungsrichtung OZ, also:

$$\gamma = \frac{v}{v_c}.$$

Die drei Brechungsindices α, β, γ der Strahlen, deren Schwingungsrichtung parallel der Axe der grössten, mittleren und kleinsten Elasticität ist, heissen die Hauptbrechungsquotienten, von denen selbstverständlich α der kleinste, γ der grösste ist. Da durch die Bestimmung dieser drei Werthe das Verhältniss der grössten, mittleren und kleinsten Lichtgeschwindigkeit im Krystall gegeben ist, so ist die Wellenfläche und damit die Geschwindigkeit jedes anderen Lichtstrahles bekannt.

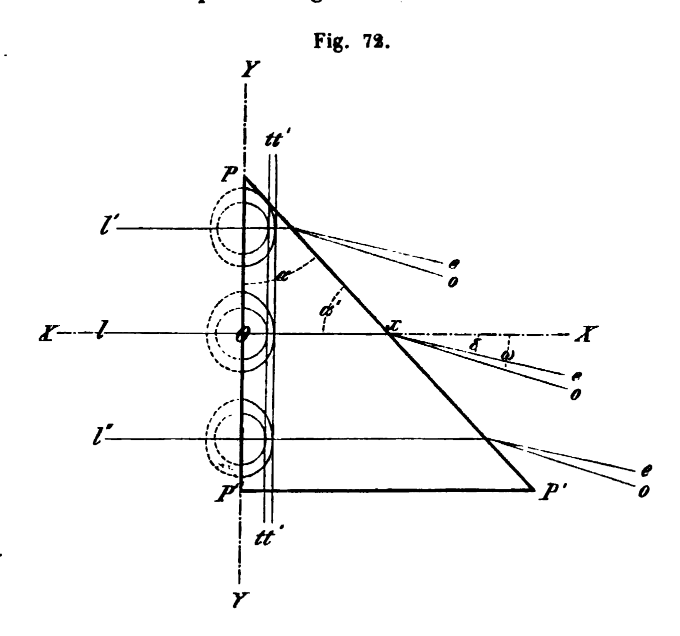
Fig. 71.



Die Bestimmung der drei Hauptbrechungsindices ist indess auch möglich mit Hülfe nur zweier Prismen, deren Kante ebenfalls je einer Elasticitätsaxe parallel, welche aber ausserdem noch so geschliffen sein müssen, dass der brechende Winkel von einem optischen Hauptschnitt des Krystalls genau halbirt wird. Sei z. B. $PP'P'$ Fig. 71 ein solches Prisma, dessen brechende Kante, senkrecht zur Zeichnungsebene, parallel der Axe der

kleinsten Elasticität OZ ist, und dessen Seiten gleiche Winkel mit dem Hauptschnitt YOZ bilden. Ist die Einfallsebene des Lichtes die Ebene der Zeichnung, also der Hauptschnitt XOY, so pflanzen sich beide Strahlen in derselben Ebene fort; der ordinäre mit der senkrecht dazu stehenden Schwingungsrichtung OZ erfährt das Minimum der Ablenkung, wenn er im Prisma von a nach b läuft; er tritt in der Richtung oa ein und in derjenigen bo' aus dem Prisma aus. Drehen wir das Prisma so, oder ändern wir den Ort der Lichtquelle derart, dass der extraordinäre Strahl seinerseits das Minimum der Ablenkung (welches in diesem Falle grösser ist als beim ordinären) erleidet, so tritt er in der Richtung ea in das Prisma und parallel be' aus demselben, also durchläuft er es in derselben Richtung ab, wie vorher der ordentliche Strahl, d. h. in der Richtung XX. Alsdann ist aber seine Schwingungsrichtung offenbar $\| OY$, also seine Geschwindigkeit die mittlere v_b; wenn wir also für diese Stellung die Ablenkung messen und den zugehörigen Brechungsexponent berechnen, so ist dieser genau $= \beta$. Da der ordentliche Strahl uns γ giebt (weil er die Schwingungsrichtung OZ hat), so erhalten wir mit Hülfe dieses einen Prismas zwei der Hauptbrechungsquotienten. Fügen wir hierzu die Untersuchung eines zweiten Prismas, dessen Flächen parallel OY und gleichgeneigt gegen YOZ, so liefert dies in gleicher Weise β und γ; ein drittes, ebenso symmetrisches, dessen Kante $\| OX$, α und β. Es sind demnach nur zwei derartiger Prismen nöthig, um alle drei Hauptbrechungsindices zu bestimmen.

Fig. 72.



Dasselbe ist übrigens auch der Fall, wenn die Prismen noch in einer andern Richtung geschliffen sind, wenn nämlich eine der Seitenflächen zusammenfällt mit einem optischen Hauptschnitt des Krystalls. Sei $PP'P'$

Fig. 72 ein solches Prisma mit dem brechenden Winkel α, dessen Kante parallel OZ und dessen linke Fläche $\parallel$ dem Hauptschnitt YOZ. Lässt man nun parallele Lichtstrahlen l, l', l'' u. s. f. genau senkrecht auf diese Fläche, also parallel XX, auffallen, so sind die im Prisma sich fortpflanzenden beiden Wellenebenen die Tangentialebenen tt und $t't'$ an die Wellenflächen, die von jedem Eintrittspunkt aus alle von gleichen Dimensionen zu construiren sind, weil die auffallende ebene Welle sie sämmtlich gleichzeitig trifft. Aus der Construction und der symmetrischen Gestalt der Wellenflächen zu den Hauptschnitten folgt unmittelbar, dass die beiden Tangentialebenen genau senkrecht zur Zeichnungsebene und einander, sowie der Eintrittsfläche des Lichtes genau parallel sind. Die beiden Strahlen erfahren also gar keine Ablenkung, sondern pflanzen sich beide $\parallel OX$ fort, wie in dem Prisma Fig. 71, folglich der eine mit der Geschwindigkeit v_c, der andere mit der v_b, und werden bei ihrem Austritt in x demnach verschieden gebrochen, der eine nach o, der andere nach e. Bestimmt man die Ablenkungen beider aus ihrer ursprünglichen Richtung und bezeichnet diese mit ω und ε, so ist die erstere gleich dem Winkel Xxo, die zweite gleich Xxe; sei ferner $\alpha' = OxP =$ dem Complement des brechenden Winkels α, so ist

$$\frac{\sin\omega}{\sin\alpha'} = \frac{v}{v_c} = \gamma \text{ und}$$
$$\frac{\sin\varepsilon}{\sin\alpha'} = \frac{v}{v_b} = \beta.$$

Es sind also durch ein solches Prisma zwei Hauptbrechungsindices zu bestimmen; durch zwei verschiedene, deren eine Seite je einem andern Hauptschnitt parallel, alle drei.

Durch die Kenntniss der drei Hauptbrechungsquotienten ist das Verhältniss der grössten, kleinsten und mittleren Lichtgeschwindigkeit gegeben, und somit die Gestalt der Wellenfläche, d. h. auch der Winkel der optischen Axen, da dieser nur von dem Verhältniss $v_a : v_b : v_c$ abhängt. Da

$$\frac{v}{v_a} : \frac{v}{v_b} : \frac{v}{v_c} = \alpha : \beta : \gamma,$$

so ist

$$v_a : v_b : v_c = \frac{1}{\alpha} : \frac{1}{\beta} : \frac{1}{\gamma},$$

und da die Geschwindigkeit der Fortpflanzung einer Welle proportional $\sqrt{\frac{e}{d}}$ ist, wenn e_a, e_b und e_c die grösste, mittlere und kleinste Elasticität bedeutet

$$\sqrt{\frac{e_a}{d}} : \sqrt{\frac{e_b}{d}} : \sqrt{\frac{e_c}{d}} = \frac{1}{\alpha} : \frac{1}{\beta} : \frac{1}{\gamma}$$
$$e_a : e_b : e_c = \frac{1}{\alpha^2} : \frac{1}{\beta^2} : \frac{1}{\gamma^2}$$

Für die Abhängigkeit des Winkels der optischen Axen von dem Verhältniss der grössten, mittleren und kleinsten Elasticität des Aethers im

Krystall folgt aus dem theoretisch hergeleiteten Gesetz der Aenderung der Elasticität mit der Dichte, die Gleichung

$$\cos V = \sqrt{\frac{e_b - e_c}{e_a - e_c}}$$

worin V den Winkel bedeutet, welchen eine optische Axe mit der Axe der kleinsten Elasticität einschliesst, so dass der Winkel der optischen Axen selbst $= 2V$ ist. Setzen wir in diese Gleichung die vorher entwickelten Werthe der drei Elasticitäten, in welchen sie durch die Hauptbrechungsindices ausgedrückt werden, ein, so erhalten wir

$$\cos V = \sqrt{\frac{\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\gamma^2}}{\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\gamma^2}}}$$

Aus dieser Gleichung finden wir demnach den optischen Axenwinkel, wenn α, β und γ bestimmt worden sind. Hat man dagegen V selbst auf eine weiterhin zu erörternde Weise gemessen und ausserdem nur zwei von den drei Hauptbrechungsquotienten (wenn z. B. die Ausbildung der Krystalle die Anfertigung von Prismen nur nach einer Richtung gestattet), so kann man mittelst derselben Gleichung den dritten Brechungsindex berechnen.

Wir nennen diejenigen Zahlen, durch welche die optischen Eigenschaften eines Krystalls vollständig gegeben sind, die optischen Constanten desselben; bei einem zweiaxigen Krystall sind dies: die Richtungen der drei Axen der grössten, mittleren und kleinsten Elasticität im Krystall und die Grösse der drei Hauptbrechungsexponenten. Die letzteren sind natürlich andre, wenn das benutzte Licht eine andere Farbe besitzt, die aus ihnen hergeleiteten Werthe der grössten, mittleren und kleinsten Lichtgeschwindigkeit stehen alsdann aber auch in einem anderen Verhältniss, d. h. die Wellenfläche hat für die letztere Farbe eine andere Gestalt, die optischen Axen haben einen andern Winkel, der bei einer Substanz mit der Wellenlänge des Lichtes wächst, bei einer andern abnimmt. Es sind die Brechungsindices α, β, γ daher stets für mehrere Farben zu bestimmen. Was die Lage der drei Hauptschwingungsrichtungen (die der Axen der grössten, mittleren und kleinsten Elasticität) im Krystall betrifft, so kann dieselbe für verschiedene Farben die gleiche oder eine verschiedene sein. Bestimmt wird dieselbe durch Interferenzerscheinungen, welche zweiaxige Krystallplatten in gewissen Richtungen zeigen, daher diese jetzt zunächst zu besprechen sind.

§. 19. Interferenzerscheinungen zweiaxiger Krystallplatten.

a) Interferenzerscheinungen in parallelem Licht. Eine planparallele Krystallplatte, welche genau senkrecht zu einer der beiden optischen Axen geschliffen ist, wird, im parallelen Licht zwischen gekreuzten Nicols betrachtet, bei jeder Drehung dunkel bleiben, da sie nur von Strahlen durchsetzt wird, welche einer Axe parallel gehen, also keine Doppelbrechung erleiden. Dagegen wird eine Platte, nach irgend einer anderen Richtung

geschliffen, stets jeden einfallenden Strahl in zwei senkrecht zu einander schwingende zerlegen. Da im vorliegenden Falle der Strahl stets senkrecht einfällt, so werden die Schwingungsrichtungen der beiden entstehenden Bewegungen parallel der Ebene der Platte sein. Sind nun die Nicols gekreuzt und dreht man die Platte in ihrer Ebene so weit, dass je eine solche Schwingungsrichtung der Polarisationsebene eines Nicols parallel ist (derartiger Stellungen giebt es offenbar v i e r, vergl. die ganz analoge Erscheinung bei einaxigen Krystallen S. 68 f.), so erscheint die Platte dunkel. Kennt man nun die Richtung der Polarisationsebenen der beiden Nicols, so sind auch die Schwingungsrichtungen*) der beiden Strahlen in der Platte gegeben, denn sie sind in der Stellung, in welcher die Platte dunkel erscheint, jenen parallel. Da offenbar die S. 68 f. über die Erscheinungen bei einer schräg gegen die Axe geschnittenen einaxigen Platte angestellten Betrachtungen hier ebenfalls gelten, so wird die in Rede stehende zweiaxige beim Drehen um 360° v i e r m a l dunkel erscheinen, in den Zwischenstellungen farbig, wenn sie sehr dünn ist; diese Farbe wird sich mit der Dicke ändern und wird bei einer Platte von bestimmter Dicke in das Weiss der höheren Ordnung übergehen. Da die Stelle, bei welcher dies stattfindet, abhängt von der Geschwindigkeitsdifferenz der beiden im Krystall senkrecht zu einander polarisirten Strahlen, so muss es bei einer andern Dicke eintreten, wenn die Richtung der Platte eine andere ist. Während die Erscheinung bei den einaxigen Krystallen mit derselben Dicke eintritt für alle Platten, welche gleichen Winkel mit der Axe einschliessen, ist hier diese Regelmässigkeit nicht mehr vorhanden. Ebenso wenig zeigen natürlich zwei Platten von gleicher Dicke, aber verschiedener Richtung, gleiche Farbe. Da die Phasendifferenz der beiden durch die Doppelbrechung entstehenden Strahlen am grössten ist, wenn der eine parallel der Axe der grössten, der andere parallel der Axe der kleinsten Elasticität schwingt, so wird bei einer Platte, bei welcher dies stattfindet, nämlich einer der optischen Axenebene parallelen, die geringste Dicke nöthig sein, um das Weiss der höheren Ordnung hervorzubringen.

b) I n t e r f e r e n z e r s c h e i n u n g e n i m c o n v e r g e n t e n L i c h t. Dünne Platten zweiaxiger Krystalle werden, wie schräg gegen die Axe geschliffene einaxige, im einfarbigen Licht Curven gleicher Helligkeit, im weissen solche gleicher Farbe (isochromatische), zeigen, bei Ueberschreitung einer gewissen Dicke das Weiss der höheren Ordnung. Platten, senkrecht zu einer optischen Axe, werden bei gekreuzten Nicols helle und dunkle Ringe, welche aber nicht kreisförmig, sondern elliptisch sind, die Mitte des Gesichtsfeldes umgebend, zeigen.

Von praktischer Wichtigkeit sind hier nur diejenigen Interferenzerscheinungen, welche eine Platte zeigt, deren Ebene senkrecht zur ersten Mittel-

---

*) Eine genaue, hierauf beruhende Methode (die stauroskopische) zur Bestimmung der Schwingungsrichtungen soll an einer spätern Stelle auseinandergesetzt werden.

linie (der Halbirenden des spitzen Winkels der optischen Axen) steht. Betrachten wir dieselbe in homogenem Licht bei gekreuzten Nicols in einer Stellung, bei welcher ihre optische Axenebene parallel der Polarisationsebene eines der beiden Nicols ist, so erblicken wir folgende Erscheinung Fig. 73. Durch die Mitte des Gesichtsfeldes geht ein schwarzes Kreuz, dessen zwei gegenüberliegende Arme, welche der Axenebene parallel sind, ungleich schmäler und schärfer begrenzt erscheinen, als die senkrecht dazu stehenden, mehr verwaschenen. Die beiden, beiderseits gleichweit von der Mitte des Gesichtsfeldes abstehenden Punkte, wo die in der Richtung je einer optischen Axe durch den Krystall gehenden Strahlen sich vereinigen, sind umgeben von ovalen dunklen und hellen Ringen, welche weiter davon entfernt zusammenstossend die Form einer 8 besitzen, und in noch grösserem Abstand die Gestalt der äussersten in Fig. 73 dargestellten Curven haben. Diese krummen Linien, in diesem Falle solche gleicher Helligkeit, werden Lemniscaten genannt. Lässt man die gekreuzte Stellung der Nicols ungeändert, dreht aber die Krystallplatte in ihrer eignen Ebene, so ändern sich die Ringe gar nicht, sie drehen sich nur einfach mit der Platte, dagegen verwandeln sich die vorher gradlinigen Kreuzesarme in zwei Hyperbeln, welche bei geringer Drehung wie Fig. 74, bei 45° Drehung wie Fig. 75, erscheinen, dabei aber immer durch die beiden Mittelpunkte der Ringsysteme gehen.

Fig. 73.

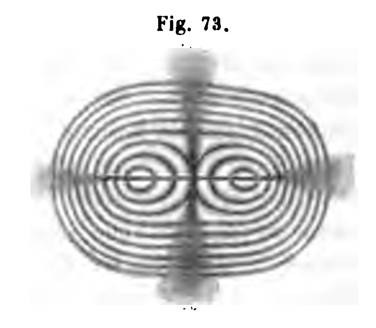


Fig. 74.

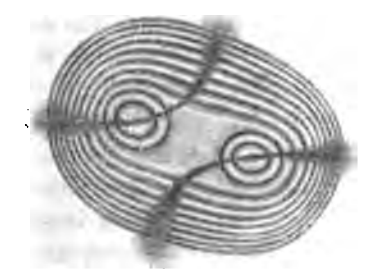


Fig. 75.



Diese Interferenzerscheinungen erklären sich in ganz ähnlicher Weise, wie bei den einaxigen Krystallen. Alle Strahlen, welche parallel der einen oder der andern optischen Axe durch den Krystall gehen, welche also in den Polpunkten der beiden Ringsysteme sich vereinigen, erleiden in der Platte keine Doppelbrechung, also müssen jene beiden Punkte dunkel sein. Dieselben sind um so näher an der Mitte des Gesichtsfeldes, je kleiner der Winkel der optischen Axen, um so näher dem Rande, je grösser derselbe ist. Ihr Abstand von einander ist ein Maass jenes Winkels. Da der optische

Axenwinkel (für eine bestimmte Farbe) bei allen Krystallen einer Substanz derselbe ist, so bleibt auch der Abstand der Mittelpunkte der beiden Ringsysteme derselbe, mag die Platte dick oder dünn sein, wenn sie nur aus demselben Material besteht. Die senkrecht zur Platte durch die Verbindungsgerade der beiden Axenpunkte gelegte Ebene ist derjenige Hauptschnitt, welchen wir die optische Axenebene genannt haben. Alle in dieser Ebene den Krystall durchsetzenden Strahlen werden in zwei zerlegt, von denen einer im Hauptschnitt, der andere senkrecht dazu schwingt. Steht nun die Polarisationsebene des einen Nicols parallel diesem Hauptschnitt, die des andern senkrecht dazu, so wird von jenen beiden durch die Doppelbrechung entstehenden Strahlen, wegen des Polarisators nur einer zu Stande kommen, derselbe aber von dem Analysator vollständig verlöscht werden, folglich muss in diesem Falle durch die Mitten der beiden Ringsysteme ein gradliniger, scharf begrenzter, horizontaler (Fig. 73) dunkler Balken gehen. Ebenso erklärt sich der zweite, verticale schwarze Balken, auf welchem sich alle die Strahlen vereinigen, welche den Krystall durchsetzen in der Ebene, senkrecht zur Platte und zur Axenebene, also in dem zweiten Hauptschnitt. Gehen wir von dem Mittelpunkt eines der beiden Ringsysteme, in welchen keine Interferenz stattfindet, nach einer Richtung, welche nicht der optischen Axenebene parallel ist, aus, so werden in einem bestimmten Abstand diejenigen Strahlen sich vereinigen, welche mit $\frac{1}{2}\lambda$ Phasendifferenz interferiren, in grösserem Abstand die mit λ Phasendifferenz interferirenden u. s. f.; in dieser Richtung fortschreitend, muss man auf dem Interferenzbilde abwechselnd Minima und Maxima der Helligkeit treffen. Aendert man aber jetzt die Richtung, in der man von der Mitte ausgeht, so ändert sich damit auch die Differenz der Geschwindigkeit der beiden entstehenden Strahlen bei demselben Abstande, man erhält somit dieselbe Phasendifferenz, also dasselbe Minimum oder Maximum, bei einem andern Abstande von der Mitte. Während also bei einem einaxigen Krystall die Punkte gleicher Helligkeit auf K r e i s e n liegen, weil die Aenderung der Elasticität mit der Neigung nach allen Richtungen rings um die Axe gleichartig stattfindet, — müssen hier ovale Curven gleicher Helligkeit entstehen; da aber die Aenderung der Elasticität mit der Richtung symmetrisch stattfindet zu beiden Seiten eines jeden der drei Hauptschnitte des Krystalls, so müssen auch diese Ovale symmetrisch halbirt werden von der optischen Axenebene und dem senkrecht dazu stehenden Hauptschnitt, d. h. von den Richtungen der beiden schwarzen Balken. In der That ergiebt die Theorie in Uebereinstimmung mit der Beobachtung, dass die dunklen und hellen Curven die Form von sogenannten L e m n i s c a t e n, welche jene Bedingung erfüllen, besitzen. Drehen wir nun die Platte in ihrer Ebene, so müssen sich die Lemniscatensysteme ebenfalls drehen, da das Zustandekommen derselben ja an bestimmte Richtungen im Krystall geknüpft ist und die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte immer parallel der optischen Axenebene desselben bleiben muss. Die Punkte des Interferenzbildes jedoch, in denen sich die Strahlen ver-

einigen, deren Schwingungsrichtungen parallel der Polarisationsebene eines Nicols sind und welche daher vollkommen vernichtet werden, liegen nun nicht mehr auf zwei sich rechtwinkelig kreuzenden Geraden, sondern auf zwei Hyperbelzweigen, welche natürlich je durch einen Mittelpunkt der Ringsysteme gehen müssen.

Wenden wir, bei unveränderter Farbe des benutzten Lichtes, eine dickere Platte derselben Substanz an, so müssen das schwarze Kreuz oder die Hyperbeln, sowie der Abstand der beiden Ringcentren, nach dem Bisherigen ganz unverändert bleiben. In einem bestimmten Abstand von der Mitte eines Ringsystems wird zwar die Geschwindigkeitsdifferenz der beiden Strahlen dieselbe, wie vorher, aber wegen des längeren Weges im Krystall ihre Phasendifferenz grösser; an der Stelle, wo bei Anwendung der dünneren Platte also der erste dunkle Ring erschien, tritt bei der dickeren bereits der zweite oder dritte auf. Es wird also die Weite der Ringe um so kleiner sein, je dicker die Platte, um so grösser, je dünner letztere ist. Es wird demnach bei einer bestimmten geringen Dicke einer Platte, deren optischer Axenwinkel klein ist, der Fall eintreten, dass auch die innerste Lemniscate nicht mehr aus zwei getrennten Ovalen besteht, sondern in einer Ellipsen ähnlichen Form beide Centren umgiebt, wie eine der äussersten Lemniscaten bei dicker Platte. Fig. 76 *b* stellt das Interferenzbild einer so dünnen Platte dar, verglichen mit dem einer dickeren von derselben Substanz Fig. 76 *a*, beide unter Parallelismus der Axenebene mit einem Nicol, während in Fig. 77 *a* und *b* das Interferenzbild bei einer Drehung derselben Platten um 45⁰ erscheint.

Fig. 76.

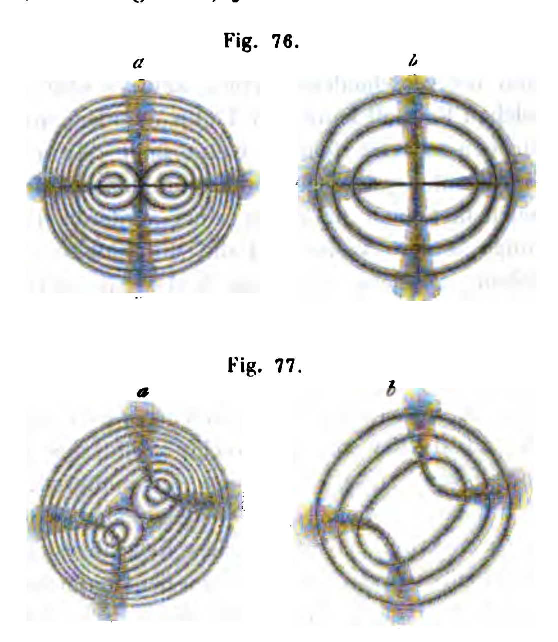


Fig. 77.

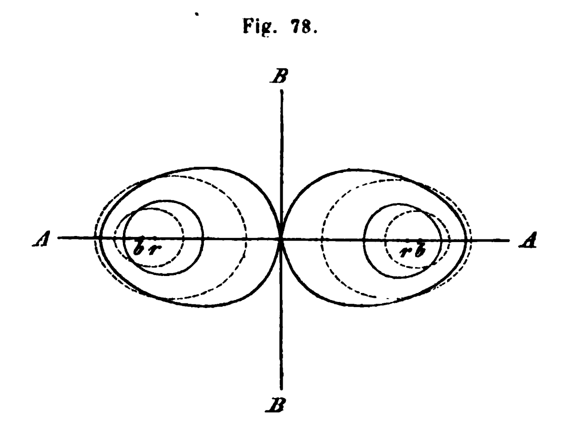
Da die Weite der Ringe von der Differenz der Geschwindigkeit, mit welcher sich die beiden durch die Doppelbrechung entstehenden Strahlen im Krystall fortpflanzen, abhängt, so ist dieselbe, ebenso wie bei den optisch einaxigen, auch bei derselben Dicke verschieden bei verschiedenen Substanzen, d. h. abhängig von der Stärke der Doppelbrechung. Die Ringe sind weiter bei einer Platte, welche aus einer Substanz von geringer Doppelbrechung besteht, als diejenigen, welche eine gleich dicke Platte eines mit stärkerer Doppelbrechung begabten Körpers zeigt.

Endlich hängt die Weite der Ringe, wie aus ihrer Entstehung hervorgeht, noch ab von der Wellenlänge des angewandten Lichtes, ist diese grösser, so sind sie weiter von einander abstehend, und umgekehrt. Aus diesem Grunde fallen die dunklen Ringe für die verschiedenen Farben an verschiedene Stellen; wird die Platte also im weissen Licht untersucht, so werden farbige Ringe entstehen, deren Erklärung ganz dieselbe ist, wie bei den einaxigen Krystallen. Während aber bei letzteren die dunklen Ringe für die verschiedenen Farben sich einfach als concentrische Kreise übereinanderschieben, demnach die isochromatischen Curven wieder Kreise mit demselben Mittelpunkt (dem Ort der optischen Axe) sind, fallen bei den zweiaxigen die Mittelpunkte der Ringsysteme für die verschiedenen Farben nicht zusammen, weil die denselben entsprechenden Winkel der optischen Axen nicht gleich sind. Dadurch sind die Farbenerscheinungen complicirtere, dies aber wieder in verschiedenem Grade, je nachdem die Richtungen der grössten, kleinsten und mittleren Lichtgeschwindigkeit im Krystall für die verschiedenen Farben zusammenfallen oder nicht. Bei denjenigen zweiaxigen Krystallen, bei denen diese drei Richtungen verschiedene sind für verschiedene Farben, sind es also auch die Axenebenen; bei einem solchen Krystall kann eine Platte demnach nur senkrecht zur ersten Mittellinie für eine Farbe stehen; wenn man diese allein benutzt, wird also das Lemniscatensystem genau die Mitte des Gesichtsfeldes zum Mittelpunkt haben, beleuchtet man aber mit einer anderen Farbe, so werden nicht nur die Ringe andere Weite und die Mittelpunkte derselben einen anderen Abstand haben, sondern das ganze Bild wird im Gesichtsfeld verschoben sein. Im weissen Licht werden also Farbencurven entstehen, welche zwar den Lemniscaten ähnlich sind, wenn die Abweichung der optischen Mittellinien für verschiedene Farben höchstens einige Grade beträgt, wie das gewöhnlich der Fall ist, in welchem aber die Farbenfolge im Einzelnen eine unsymmetrische ist, so dass weder die rechte Seite des Interferenzbildes symmetrisch ist zur linken, noch die obere zur unteren. Die verschiedenen Fälle von Asymmetrie, welche hier möglich sind, können erst später (s. monosymmetrisches und asymmetrisches Krystallsystem) erörtert werden.

Bleiben wir zunächst bei dem einfachsten Falle stehen, dass die drei Elasticitätsaxen, folglich auch die optische Axenebene, für alle Farben gleiche Richtung haben, so ist für jede einzelne Farbe das Interferenzbild symmetrisch zu halbiren durch die Gerade, welche die beiden optischen Axenpunkte verbindet, sowie durch die Gerade, welche jene im Mittelpunkt des Gesichtsfeldes senkrecht schneidet, d. h. durch die beiden schwarzen Balken, welche erscheinen, wenn die Axenebene einem Nicol parallel ist. Da diese Symmetrielinien für alle Farben zusammenfallen, so erscheint im weissen Licht ein Interferenzbild, welches ebenfalls durch dieselben Geraden symmetrisch halbirt wird, d. h. dessen obere Hälfte genau gleich der unteren (in umgekehrter Lage), dessen rechte Seite ebenso gleich der linken ist, s. Fig. 3. Taf. I. Vergleichen wir in diesem Bilde die verschiedenen Stellen

einer Lemniscate, z. B. des ersten, die eine optische Axe umgebenden, Farbenringes, so sehen wir, dass sie nicht gleich gefärbt sind, dass die nach der Mitte des Gesichtsfeldes zugekehrte Seite (auch der folgenden Ringe) eine andere Farbenfolge besitzt, als die nach aussen gekehrte, während die obere Hälfte genau gleich und entgegengesetzt der unteren ist. Dies erklärt sich einfach durch den Umstand, dass die Mitte der Ringsysteme für die verschiedenen Farben nicht zusammenfallen. Sei z. B. *AA* Fig. 78 die Richtung der Axenebene (für alle Farben), *BB* die des senkrecht dazu stehenden Hauptschnittes und *rr* die beiden Axenpunkte für Roth, *bb* für Blau, wobei natürlich der Abstand *rb* zu beiden Seiten gleich gross sein muss, weil die Mittellinien der Axen für beide Farben in *M* zusammenfallen, so mögen die ausgezogenen Curven die dunklen Lemniscaten für Roth, die punktirten diejenigen für Blau sein. Geht man nun von der Mitte eines der beiden Ringsysteme aus, so zeigt die Figur, wenn man nach der Mitte *M* hin sich bewegt, dass zuerst Blau vernichtet wird, erst in grösserem Abstande Roth; dass dagegen, wenn man nach aussen geht, die Auslöschung in umgekehrter Reihenfolge stattfindet. Im weissen Lichte muss also bei einem derartigen Krystall die Farbenfolge des innersten Ringes nach diesen beiden Seiten hin gerade entgegengesetzt sein; ist die Entfernung (Dispersion) der Axen, *rb*, nicht so gross, so muss jene Farbenfolge wenigstens eine verschiedene sein. Die Fig. 78 zeigt ferner, dass die obere Hälfte der Farbenringe genau gleich und entgegengesetzt der unteren sein muss, weil die Verschiebung genau in der Geraden *AA* stattfindet, und dass das rechte Ringsystem ebenso gleich und entgegengesetzt dem linken sein muss, weil die gegenseitige Verschiebung der Ringe zu beiden Seiten der Geraden *BB* stets gleichartig vor sich gehen muss, so dass diese letztere die Systeme für alle Farben genau halbirt. Die Erscheinungen müssen sich demnach so zeigen, wie es die Fig. 3 Taf. I. darstellt, auf der die einander zugewandten (inneren) Seiten zweier entsprechender Farbenringe gleich, die nach aussen gewandten ebenfalls gleich, aber mit anderer Farbe, gefärbt sind.

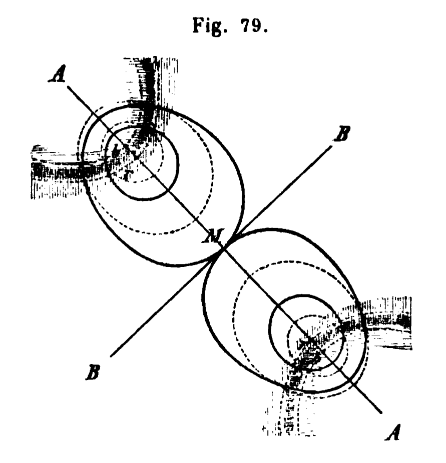
Fig. 78.



Dreht man die Krystallplatte so in ihrer Ebene, dass die Axenebene 45° mit den Nicols bildet, so erscheinen bekanntlich die schwarzen hyperbolischen Büschel, welche durch die Axenpunkte gehen. Sei, wie in Fig. 78, so auch in der dieser Stellung entsprechenden Fig. 79 *AA* die Axenebene, *rr* und *bb* die Axenpunkte für Roth und Blau, die ausgezogenen

und die punktirten Curven die dunklen Lemniscaten für dieselben Farben, so sieht man, dass die im Weiss entstehenden Farbenringe ganz dieselben sein müssen, als die in der vorigen Stellung der Platte. Betrachten wir dagegen die dunklen Hyperbeln, so können diese nicht zusammenfallen, da sie für jede Farbe durch die Axenpunkte gehen müssen. In der Fig. sind die beiden im einfachen rothen Licht erscheinenden Hyperbeln vertical, die für Blau horizontal schraffirt angegeben, und daraus sogleich zu ersehen, dass dieselben sich für die verschiedenen Farben, da die für die übrigen Farben zwischen jenen liegen, theilweise decken. und zwar um so mehr, je kleiner der Abstand *rb* ist, d. h. je weniger die optischen Axenwinkel für die verschiedenen Farben von einander abweichen. Da, wo die Hyperbeln für alle Farben auf einander fallen, also in der Mitte der hyperbolischen Streifen, wird vollständige Dunkelheit entstehen. nicht so jedoch an beiden Rändern, wo die Auslöschung nur für einen Theil der Farben stattfindet. Die Ränder müssen daher farbig gesäumt erscheinen, wie aus Fig. 4 Taf. I. zu ersehen, während die schwarzen Balken bei der ersten Stellung Fig. 3 Taf. I. Nichts dergleichen zeigen können. Die Farbensäume der dunkeln Hyperbeln sind um so breiter und um so lebhafter gefärbt, je weniger Farben es sind, für welche an einer Stelle die Hyperbeln noch übereinander fallen, d. h. je grösser die Dispersion der Axen, die Verschiedenheit der Axenwinkel für die verschiedenen Farben, ist. Erreicht diese eine solche Grösse, dass auch in der Mitte der hyperbolischen Streifen diese sich nicht mehr für alle Farben decken, so erscheint auch dort kein Schwarz, die Hyperbeln bestehen nur aus Farbenstreifen in bestimmter Reihenfolge von innen nach aussen. Diese Folge muss zugleich den Sinn der Dispersion der Axen erkennen lassen, d. h. ob deren Winkel für die Strahlen des rothen Endes im Spectrum kleiner ist, als für die des violetten Theiles (abgekürzt bezeichnet $\varrho < v$), oder umgekehrt ($\varrho > v$). In Fig. 79 und Fig. 4 Taf. I ist das Interferenzbild eines Krystalls der ersteren Art dargestellt; in diesem erscheint das rothe Licht vollständig ausgelöscht auf den beiden durch die Punkte *rr* gehenden Hyperbeln, ebenso die dem Roth benachbarten Theile des Spectrums (oder wenigstens sehr an Intensität geschwächt), nicht aber die Farben vom andern Ende des Spectrums, nämlich Blau und Violett, welche erst an den mit *bb* bezeichneten Stellen ausgelöscht werden; diese Farben werden also auf den der Geraden *BB* zuge-

Fig. 79.



wandten Seiten der beiden Hyperbeln als Saum derselben auftreten, an der nach aussen gewendeten concaven dagegen wird ein rother Saum erscheinen, weil hier die blauen Strahlen vollkommen vernichtet werden. Diese Farbensäume treten stets am deutlichsten hervor an dem innerhalb des innersten Farbenringes liegenden Theile der Hyperbeln, wo dieselben am schärfsten begrenzt erscheinen. Beobachtet man daselbst, dass die Innenseite (d. h. die nach der Mitte des Gesichtsfeldes gewendete Seite) der Hyperbeln blau, die Aussenseite roth gefärbt erscheint (s. Fig. 4 Taf. I), so hat man es mit einem Krystall zu thun, dessen optischer Axenwinkel für Roth kleiner ist, als für Blau (Sinn der Dispersion $\varrho < v$), ist dagegen die Innenseite roth, die Aussenseite blau, so ist der Sinn der Dispersion $\varrho > v$, der Axenwinkel für Roth grösser, als für Blau. Je lebhafter und je breiter die Farbensäume sind, desto grösser ist die Stärke der Dispersion. Da der optische Axenwinkel für dieselbe Farbe bei allen Krystallen einer und derselben Substanz gleich ist, so gilt dies auch sowohl für den Sinn, als für die Stärke der Dispersion.

Es giebt Krystalle (Brookit = TiO^2, mellithsaures Ammon u. a.), deren drei Hauptbrechungsindices sich mit der Farbe so ungleich ändern, dass für eine bestimmte Farbe z. B. der vorher kleinste gleich dem mittleren wird, und für noch mehr abweichende Wellenlängen diese beiden ihre Rollen tauschen. In Krystallen mit so starker Dispersion muss die Axenebene für einen Theil des Spectrums ein Hauptschnitt, für den andern Theil einer der beiden andern, also senkrecht dazu stehen, für eine bestimmte dazwischenliegende Farbe muss der Krystall einaxig*) sein. Fällt die erste Mittellinie für alle Farben in eine Richtung zusammen, und bringt man eine zu dieser senkrechte Platte in convergentes polarisirtes Licht, so sieht man im rothen Licht ein gewöhnliches Interferenzbild, im blauen Licht ebenfalls, aber mit senkrecht dazu stehenden Axenbildern, dagegen im weissen Licht ein vollkommen abweichendes Farbenbild, welches in Fig. 5 Taf. I dargestellt ist.

Man ersieht aus Fig. 79 unmittelbar, dass die Lebhaftigkeit und die Reihenfolge der Farben von Innen nach Aussen absolut die gleichen sein müssen bei beiden Hyperbeln, sobald die Halbirenden des optischen Axenwinkels für alle Farben absolut zusammenfallen in dem Mittelpunkt M. Ist dieses jedoch nicht der Fall, besitzt der Krystall auch noch eine Dispersion der Mittellinien, so können die Farbensäume der Hyperbeln nicht

*) Ein solcher Krystall ist trotzdem nicht als ein Mittelding zwischen einem einaxigen und einem zweiaxigen, sondern als vollkommen zur letzteren Klasse gehörig, zu betrachten, denn es geht ihm offenbar die Haupteigenschaft der einaxigen Krystalle ab, nämlich nach allen Richtungen, welche normal zur Axe stehen, optisch gleichbeschaffen zu sein. Die zweiaxigen Krystalle unterscheiden sich von jenen dadurch, dass sie in den verschiedenen Richtungen, welche senkrecht zur grössten oder kleinsten Elasticitätsaxe stehen, optisch ungleich beschaffen sind; zwischen gleich und ungleich giebt es aber kein Mittelding.

mehr gleich sein, und diese Ungleichheit derselben bietet gerade das empfindlichste Mittel dar, eine solche Dispersion der Elasticitätsaxen zu erkennen. Die hierbei auftretenden Farbenerscheinungen werden an einer späteren Stelle eingehend besprochen werden, hier sei nur bemerkt, dass bei derartigen Krystallen eine Platte, senkrecht zur ersten Mittellinie, natürlich nur für eine bestimmte Farbe die richtige Lage der Flächen hat; mit einer solchen Platte ist man nun, wie sogleich gezeigt werden soll, im Stande. den Winkel der optischen Axen zu bestimmen, in diesem Falle also nur für jene Farbe. Da indess die Dispersion der Mittellinien meist nur eine sehr kleine ist, so steht eine Platte, welche senkrecht zur ersten Mittellinie für Gelb geschliffen ist, auch gewöhnlich sehr nahe senkrecht zur ersten Mittellinie für die übrigen Farben, kann also, wenn nicht die höchste Genauigkeit gefordert wird, auch zur Bestimmung des Axenwinkels für Roth. Blau u. s. w. dienen. Ganz genau ist dies natürlich nur der Fall bei denjenigen zweiaxigen Krystallen, bei welchen die Elasticitätsaxen für die verschiedenen Farben zusammenfallen.

Die im Vorhergehenden beschriebenen Interferenzerscheinungen, welche eine Platte senkrecht zur Halbirenden des spitzen Axenwinkels zeigt*), können nun dazu dienen, zunächst an einem zweiaxigen Krystall die Lage der drei Elasticitätsaxen aufzusuchen. Erblickt man nämlich durch ein paralleles Paar natürlich oder künstlich hergestellter Flächen des Krystalls die Axenbilder symmetrisch im Gesichtsfeld, so ist damit die Richtung einer Elasticitätsaxe, als der Normalen zu dem betreffenden Flächenpaar gegeben, ebenso die Lage der optischen Axenebene, deren Normale die Axe der mittleren Elasticität ist, endlich auch die Richtung der dritten Elasticitätsaxe, welche auf den beiden andern senkrecht steht. Mit der Kenntniss der Lage der drei Hauptschwingungsrichtungen ist nach S. 85 f. die Möglichkeit der Bestimmung der drei Hauptbrechungsindices gegeben, also diejenige der vollständigen Bestimmung der optischen Constanten des Krystalls. Aus diesen kann man, wie S. 89 gezeigt worden ist, zwar den optischen Axenwinkel herleiten, man kann denselben indess auch direct bestimmen durch Methoden, welche in dem folgenden § auseinander gesetzt werden sollen.

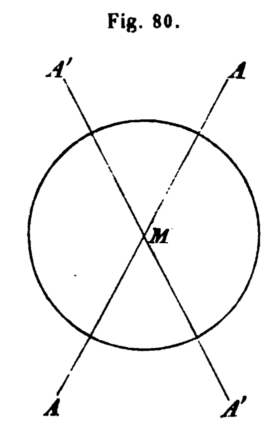
§. 20. **Bestimmung des optischen Axenwinkels.** Die Strahlen, welche sich in der Richtung einer optischen Axe in einem Krystall fortpflanzen, bilden mit denjenigen, welche parallel der zweiten optischen Axe den Krystall durchsetzen, nach dem Austritte beider in die Luft, nur dann denselben Winkel, wie im Krystall, wenn sie beim Austritt keine Brechung

---

*) Es ist unschwer einzusehen, dass eine Platte, deren Flächen senkrecht zur Halbirenden des stumpfen Axenwinkels stehen, ganz analoge Interferenzerscheinungen, d. h. Lemniscatensysteme zeigen muss, dass aber die den beiden Axen entsprechenden Centren derselben meist so weit von einander abstehen werden, dass sie nicht mehr in das Gesichtsfeld des Instrumentes fallen. Ist dies jedoch der Fall, so müssen die Farbensäume der dunklen Hyperbel natürlich den entgegengesetzten Sinn der Dispersion anzeigen, als bei der zur ersten Mittellinie senkrechten Platte.

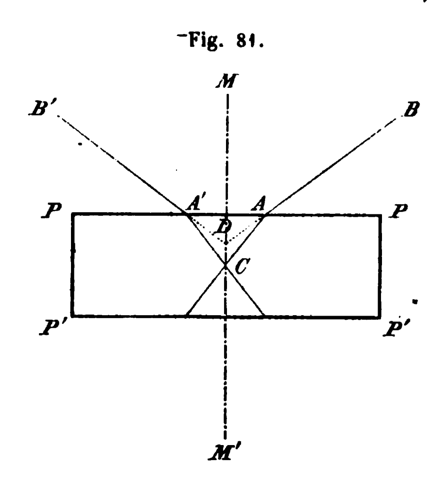
erleiden, d. h. wenn die Fläche, an welcher die ersteren austreten, genau senkrecht zur ersten Axe, die Austrittsfläche der letzteren senkrecht zur zweiten Axe wäre. Solche Ebenen sind aber nicht herzustellen, ohne den Winkel der Axen zu kennen, dessen Bestimmung erst der Zweck der Methode ist Dagegen treten die in Rede stehenden Strahlen völlig unabgelenkt aus dem Krystall aus, wenn man denselben zu einer Kugel oder zu einem Cylinder abschleift, dessen Axe parallel derjenigen der mittleren Elasticität ist. Diejenigen Strahlen AA und $A'A'$ Fig. 80, welche genau durch die Mitte der Kugel oder des Cylinders gehen, und zwar parallel den beiden Axen, treffen deren Oberfläche stets in einem Punkte, in welchem dieselbe senkrecht zu jenen steht, werden also nicht gebrochen. Wenn die Kugel also um eine Axe, senkrecht gegen die Zeichnungsebene von Fig. 80 und durch die Mitte gehend, drehbar wäre, so könnte man mittelst Einstellens des Axenbildes A und desjenigen von A' in einem festen Polarisationsapparat, durch die hierzu erforderliche Drehung den Winkel AMA' messen. Wegen der Schwierigkeit der Herstellung einer so vollkommenen Kugel oder eines solchen Cylinders bestimmt man jedoch den Winkel der optischen Axen auf andere Weise, nämlich mittelst einer ebenen planparallelen Platte, welche senkrecht zur Halbirenden des spitzen Axenwinkels geschliffen ist.

Fig. 80.



Sei $PPP'P'$ Fig. 81 der Durchschnitt einer solchen Platte mit der optischen Axenebene, die Normale zur Platte MM' die erste Mittellinie der Axen, so werden die den beiden Axen parallelen Strahlensysteme die Oberfläche unter gleichen, aber entgegengesetzt liegenden Winkeln treffen, also eine gleiche Brechung nach der entgegengesetzten Richtung erleiden. Während sie im Krystall den Winkel ACA', den wahren Winkel der optischen Axen, bilden, schliessen sie nach ihrem Austritt einen grösseren, den sogenannten scheinbaren Axenwinkel BDB' ein, welcher ebenso, wie ACA', von MM halbirt wird. Den scheinbaren Axenwinkel kann man nun auf folgende Art messen:

Fig. 81.



Man bringe die Platte ($PPP'P'$ Fig. 82 sei ihr Durchschnitt, wie oben) zwischen Sammellinse und Objectiv des Polarisationsinstrumentes so an, dass

sie drehbar ist um eine Axe, welche genau senkrecht zur optischen Axenebene, und ungefähr durch die Mitte der Platte geht. In Fig. 82 sind nur die benachbarten Theile des Instrumentes im Durchschnitt angegeben, und die Platte in der Stellung, in welcher sie das Interferenzbild symmetrisch zeigt, da die erste Mittellinie mit der Axe des Instrumentes zusammenfällt. Jene Drehung erzielt man nun dadurch, dass man oberhalb der Zeichnungsebene einen getheilten Kreis fest mit dem Instrument verbindet, durch dessen Mitte eine drehbare Axe hindurchgeht, welche normal zur Zeichnungsebene steht und in eine Pincette endigend die Platte trägt. Die perspectivische Ansicht Fig. 83 wird die Anordnung dieses Apparates und die Möglichkeit, mittelst desselben eine Drehung der Platte zu messen, unmittelbar erkennen lassen. Wird nun jene Axe und somit die Krystallplatte soweit gedreht, dass die Strahlen, welche sie in der Richtung einer optischen Axe durchsetzen, genau parallel der Fernrohraxe in das Objectiv eintreten Fig. 84, so werden diese in der Mitte des

Fig. 82.

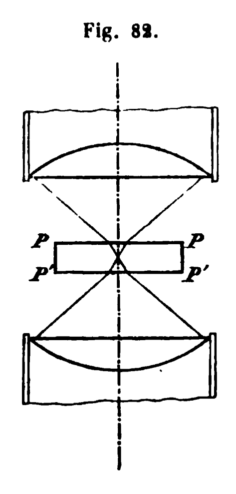


Fig. 83.

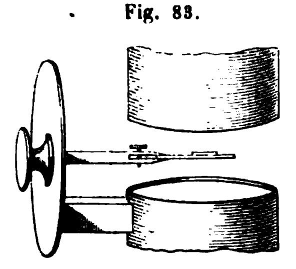
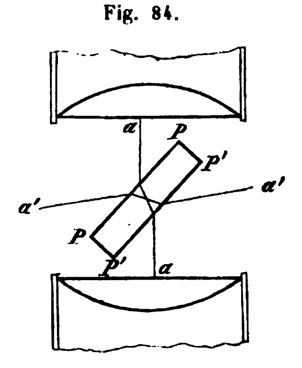


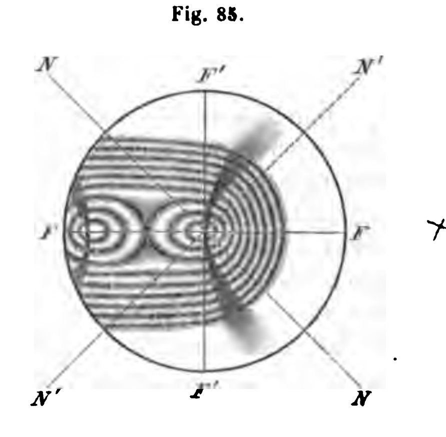
Fig. 84.



Gesichtsfeldes vereinigt werden, der Mittelpunkt des einen Ringsystems wird also genau in der Mitte des Gesichtsfeldes erscheinen. Diesen Punkt kann man mittelst eines Fadenkreuzes in der Bildebene des Fernrohrs markiren, und die Einstellung des Axenbildes auf den Kreuzpunkt der Fäden gelingt dann besonders genau, wenn man das Interferenzbild mit den Hyperbeln benuzt, also die gekreuzten Nicols des Instrumentes 45° mit der Axenebene der Platte bilden lässt. Da die Einstellung einer optischen Axe stets nur für eine bestimmte Farbe geschehen kann, so muss natürlich der Apparat durch homogenes Licht, z. B. eine Natriumflamme, erleuchtet werden. Das Interferenzbild stellt sich alsdann so dar, wie es in Fig. 85 abgebildet ist, worin FF und $F'F'$ das Fadenkreuz des Fernrohrs, NN und $N'N'$ die

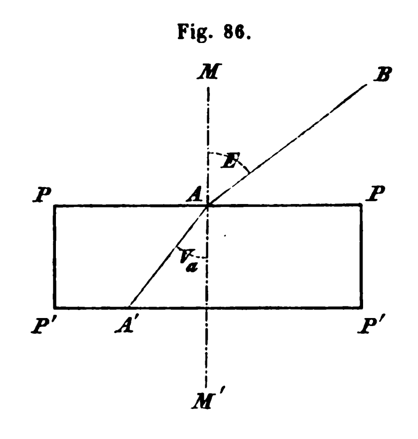
Schwingungsrichtungen der beiden Nicols bezeichnen. Hat man die Platte soweit gedreht, dass die Mitte der schwarzen Hyperbel und der Verticalfaden absolut zusammenfallen, wie es die Fig. zeigt, so hat jene genau die in Fig. 84 bezeichnete Stellung. Dreht man nun zurück bis zur anfänglichen Lage, und ebenso weit nach der andern Seite, bis das zweite Axenbild genau in derselben Weise in der Mitte des Gesichtsfeldes ist, d. h. $a'a'$ Fig. 84 mit der Axe des Instrumentes zusammenfällt, so hat man zwischen diesen beiden Einstellungen der einen und der andern optischen Axe auf die Mitte, offenbar genau um so viel drehen müssen, als der Winkel der Axen nach dem Austritt in Luft beträgt. Die am Kreise abzulesende Drehung giebt also unmittelbar den scheinbaren Axenwinkel für die benutzte Farbe. Beleuchtet man nun das Instrument mit Licht von anderer Farbe, so erhält man wegen der Dispersion der Axen andere Ablesungen für beide Einstellungen und somit einen grösseren oder kleineren Axenwinkel.

Fig. 85.



Es ist nunmehr das Verhältniss zu bestimmen, in welchem der scheinbare Axenwinkel zum wirklichen steht. Sei $PPP'P'$ Fig. 86 wieder der Durchschnitt der Krystallplatte mit der optischen Axenebene, MM' die erste Mittellinie und zugleich Normale zur Platte, AA' die Richtung einer optischen Axe, so ist offenbar $V_a = A'AM'$ der halbe wahre Axenwinkel, $E = BAM$ der halbe scheinbare, so dass der wahre (innere) und der scheinbare Winkel der Axen $2V_a$, resp. $2E$ sind. Irgend ein Strahl, der sich im Hauptschnitt $PPP'P'$ fortpflanzt, zerfällt im Krystall in zwei, von denen einer, senkrecht zu jener Ebene, also parallel der mittleren Elasticitätsaxe, schwingend, stets dieselbe Geschwindigkeit hat, während der andere verschiedene hat je nach seiner Richtung. Parallel AA' hat Letzterer jedoch genau dieselbe Geschwindigkeit, wie der erstere, d. h. die mittlere, und da eben deshalb hier gar keine Doppelbrechung eintritt, so hat jeder irgendwie schwingende Strahl, wenn er sich in der Richtung AA' fortpflanzt, die mittlere Lichtgeschwindigkeit, er wird also im Punkte A so gebrochen werden, dass sein Brechungsexponent aus Luft in den Krystall gleich dem

Fig. 86.



mittleren Hauptbrechungsquotienten β ist. Wenn der Strahl $A'A$ gebrochen in die Luft austritt, so ist sein Einfallswinkel V_a, sein Brechungswinkel E, also

$$\frac{\sin V_a}{\sin E} = \frac{1}{\beta}$$
$$\sin E = \beta \cdot \sin V_a$$

Durch diese Gleichung ist das Verhältniss zwischen dem wahren und dem scheinbaren Axenwinkel in Luft bestimmt. Hat man also sämmtliche drei Hauptbrechungsindices für verschiedene Farben gemessen und daraus den wahren Axenwinkel für dieselben Farben abgeleitet, so ergiebt sich aus obiger Gleichung der scheinbare; bestimmt man nun diesen direct auf die beschriebene Art, so liefert die Vergleichung desselben mit dem nur aus den Brechungsexponenten berechneten Werthe einen Maassstab zur Beurtheilung der Genauigkeit, mit welcher letztere bestimmt worden sind, um so mehr, als die Genauigkeit der Messung der Axenwinkel in den meisten Fällen, wenn man nämlich nur kleine Krystalle zur Anfertigung von Prismen und Platten zur Verfügung hat, grösser ist, als diejenige der Messung der Brechungsindices. Noch wichtiger ist aber die Bestimmung des scheinbaren Axenwinkels in denjenigen Fällen, in denen die Ausbildung der Krystalle die Anfertigung von Prismen nur nach einer Richtung gestattet, also höchstens zwei der Hauptbrechungsquotienten bestimmt werden können. Sind diese beiden nicht α und γ, sondern α und β, oder β und γ, so vermag man mittelst β aus dem scheinbaren Axenwinkel den wahren, und aus diesem und den beiden gemessenen Brechungsexponenten den dritten zu berechnen, wie dies S. 89 gezeigt worden ist.

Wenn der Winkel der optischen Axen eine bestimmte Grösse überschreitet, können die ihnen parallelen Strahlen in Luft nicht mehr austreten. Denn wenn $\sin V_a = \frac{1}{\beta}$, so ist $\sin E = 1$, also der scheinbare Axenwinkel 180°, von dieser Grösse für V_a ab tritt totale Reflexion jener Strahlen ein, welche Grösse abhängt von dem mittleren Brechungsexponenten des Lichtes beim Uebergang aus dem Krystall in Luft. Würde man den ersteren, statt mit Luft, mit einer Flüssigkeit umgeben, deren optische Dichte weniger von der des Krystalls abweicht, so würden die den optischen Axen entsprechenden Strahlen an der Grenze beider weniger abgelenkt werden, und wäre dieses Mittel optisch dichter, als der Krystall, so würden sie dem Lothe zu gebrochen, d. h. die scheinbaren optischen Axen in diesem Mittel bildeten einen kleineren Winkel, als die wahren. Sei Fig. 87 $PPP'P'$ die Krystallplatte, HH die derselben parallele Grenzfläche des umgebenden Mediums gegen die Luft, so wird ein Strahl $A'A$, parallel einer optischen Axe, in A, wenn MM' das Einfallsloth, gebrochen werden; und zwar wird, wenn man $A'AM' = V_a$ (wie bisher, der halbe Axenwinkel), $MAB = H_a$ (da MM' die Mittellinie, so ist dies der halbe scheinbare Axenwinkel in dem umgebenden Medium), endlich die Geschwindigkeit des Lichtes im Krystall

$= v_b$, in dem umgebenden Mittel $= v_h$, in der Luft $= v$ setzt:

$$\frac{\sin V_a}{\sin H_a} = \frac{v_b}{v_h}$$

oder, was damit identisch gleich:

$$\frac{\sin V_a}{\sin H_a} = \frac{v_b}{v} \cdot \frac{v}{v_h},$$

und, da $\frac{v}{v_b}$ gleich dem mittleren Brechungsexponenten β, $\frac{v}{v_h}$ gleich dem Brechungsindex aus Luft in das umhüllende Medium, welchen wir n nennen wollen, ist, so folgt

$$\frac{\sin V_a}{\sin H_a} = \frac{1}{\beta} \cdot n$$

$$(1) \qquad \sin V_a = \frac{n}{\beta} \cdot \sin H_a \, ^{*})$$

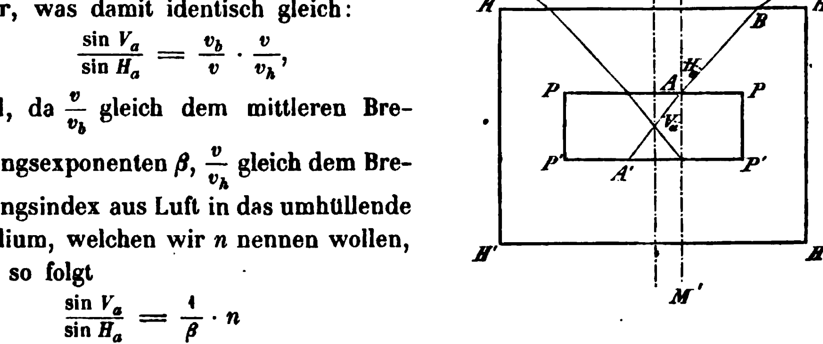


Fig. 87.

Hiernach können wir den wahren Axenwinkel auch in einem solchen Falle berechnen, dass die Axen nicht mehr in Luft austreten, wenn wir den Krystall, dessen mittleren Brechungsexponenten wir kennen, mit einem stark brechenden Medium, dessen Brechungsindex n für die benutzte Farbe ebenfalls bekannt ist, umgeben, und den Winkel H_a, welchen die Axen in diesem bilden, bestimmen. Dies letztere geschieht auf folgende Weise:

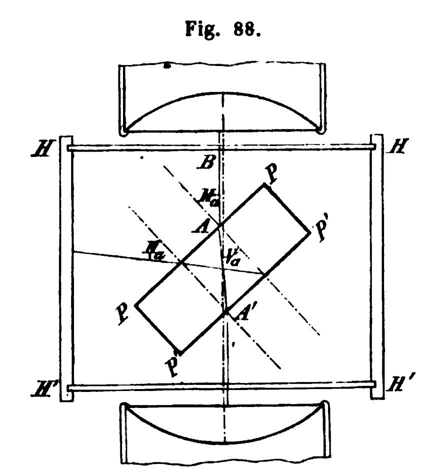


Fig. 88.

Man umgiebt die Krystallplatte mit einem Glasgefäss $HHH'H'$, Fig. 88, dessen Vorder- und Hinterwand, HH und $H'H'$, aus planparallelen Glasplatten besteht, und füllt dasselbe mit einem durchsichtigen ungefärbten Oel, dessen Brechungsexponent bekannt ist, an, so dass die Platte sich ganz in demselben befindet, während sie mit dem Apparat zum Messen der Axenwinkel ganz ebenso verbunden ist, als wenn der scheinbare Winkel in Luft

*) Da $\sin E = \beta \cdot \sin V_a$, so ist, wenn man in obige Gleichung für $\sin V_a$ seinen Werth $\frac{\sin E}{\beta}$ einsetzt:

$$n = \frac{\sin E}{\sin H_a}$$

Hiernach kann man den Brechungsexponenten n des umgebenden Mediums bestimmen durch Messung des scheinbaren Axenwinkels in Luft und in jener Flüssigkeit mittelst einer und derselben Krystallplatte.

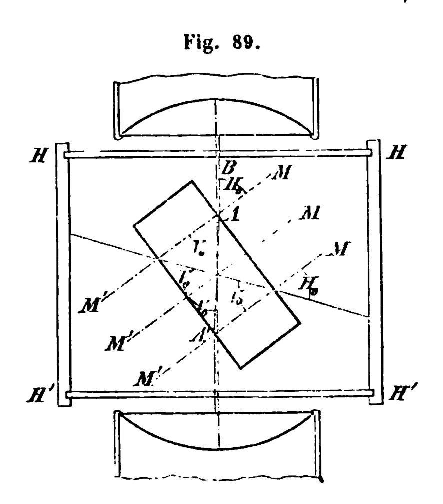
bestimmt werden sollte. Dreht man nun die Platte so weit, bis diejenigen Strahlen AB (die Bezeichnungen sind ganz dieselben wie in der vorigen Figur), welche im Krystall sich einer optischen Axe parallel bewegen, der Axe des Polarisationsinstrumentes parallel sind, so erleiden sie weder an der Grenze des Oels gegen die umschliessende Glasplatte HH, noch durch letztere eine Ablenkung, da dieselbe senkrecht zur Axe des Instrumentes steht, es ist diese Stellung also ganz ebenso zu finden, wie bei der Messung des scheinbaren Axenwinkels in Luft, nämlich durch Einstellung der dunklen Hyperbel auf die Mitte des Fadenkreuzes im Gesichtsfeld des Polarisationsinstrumentes. Dreht man nun zurück und nach der entgegengesetzten Seite, bis das zweite Axenbild in gleicher Weise im Gesichtsfeld centrirt erscheint, so ist die ganze hierzu nöthige Drehung offenbar $2\,H_a$, d. h. der scheinbare Axenwinkel im Oel. Wenn also β und n bekannt sind, so ergiebt sich aus dem so gemessenen H_a nach der oben abgeleiteten Gleichung

$$\sin V_a = \frac{n}{\beta} \cdot \sin H_a$$

der wahre Axenwinkel.

Denselben kann man endlich sogar finden, ohne β und n zu kennen, nämlich mittelst einer zweiten Krystallplatte, deren Flächen senkrecht zur Halbirenden des stumpfen Winkels, der sogenannten zweiten Mittellinie der optischen Axen, geschliffen sind. Bei einer solchen werden die beiden Axen im Allgemeinen nicht mehr in die Luft austreten, wohl aber in Oel, selbst wenn der stumpfe Axenwinkel sehr gross ist, sobald nur der Brechungsexponent des Oels mindestens ebenso gross ist als der des Krystalls. Sei in Fig. 89 eine solche Platte im Oelgefäss dargestellt, ebenfalls drehbar um die Axe der mittleren Elasticität, sei $A'A$ ein Strahl, welcher im Krystall einer optischen Axe parallel läuft, der im Oel in der Richtung AB sich fortpflanzt, so ist, wenn MM' die Normale zur Platte, d. h. die zweite Mittellinie der Axen, $A'AM' = V_0$ die Hälfte des stumpfen wahren Axenwinkels, $MAB = H_0$ die Hälfte des scheinbaren stumpfen Axenwinkels in Oel. Die Messung dieses letzteren geschieht nun ganz so, wie bei der vorigen Platte, durch Drehung und aufeinanderfolgendes Einstellen der beiden Axenbilder. Wenn man dieselben Bezeichnungen für die Lichtgeschwindigkeit und die Brechungsexponenten beibehält, wie oben beim spitzen Axenwinkel, so folgt hier ganz ebenso wie dort:

Fig. 89.



$$\frac{\sin V_o}{\sin H_o} = \frac{v_b}{v_h} = \frac{1}{\beta} \cdot n$$

$$(2) \qquad \sin V_o = \frac{n}{\beta} \cdot \sin H_o.$$

Mittelst dieser Gleichung kann man also, wenn man den scheinbaren stumpfen Axenwinkel in Oel bestimmt hat, den wahren berechnen, ebenso wie durch die vorher entwickelte Gleichung aus dem scheinbaren spitzen. Beide Berechnungen setzen aber die Kenntniss des mittleren Brechungsexponenten des Krystalls und desjenigen des Oels voraus. Da die Summe des spitzen und stumpfen Axenwinkels jedoch für dieselbe Farbe stets 180° sein muss, so ist $V_a + V_o = 90°$, also $\sin V_o = \cos V_a$. Setzt man diesen Werth in die Gleichung (2) ein und dividirt die für den spitzen Axenwinkel entwickelte Gleichung (1) durch jene:

$$(1) \qquad \sin V_a = \frac{n}{\beta} \cdot \sin H_a$$

$$(2) \qquad \cos V_a = \frac{n}{\beta} \cdot \sin H_o$$

so folgt:

$$\operatorname{tang} V_a = \frac{\sin H_a}{\sin H_o},$$

d. h. man kann den wahren Winkel der optischen Axen eines Krystalls bestimmen, ohne irgend einen Brechungsexponenten zu kennen. Man schleift nämlich aus demselben zwei Platten, eine senkrecht zur ersten, eine senkrecht zur zweiten Mittellinie, bestimmt auf die beschriebene Art bei beiden den scheinbaren Axenwinkel in Oel; der Quotient der Sinus dieser Winkel ist die Tangente des halben gesuchten inneren Axenwinkels. Diese Art der Bestimmung desselben ist deshalb besonders wichtig, weil zur Anfertigung der Prismen, mit denen die Brechungsindices gemessen werden, durchsichtige Krystalle von einer Grösse gehören, wie man sie bei weitem nicht von allen Substanzen besitzt, während die planparallelen Platten für diese Methode fast beliebig klein sein können, und auch leichter in genügender Genauigkeit angefertigt werden können, als richtig orientirte Prismen. Hat man also nur sehr kleine Krystalle zur Verfügung, so begnügt man sich mit der Bestimmung des wahren Axenwinkels nach der beschriebenen Methode, und erhält übrigens auch noch den mittleren Hauptbrechungsexponenten β, wenn man mittelst der zur ersten Mittellinie senkrechten Platte den scheinbaren Axenwinkel $2E$ in der Luft bestimmt, nach der Gleichung (s. S. 102)

$$\sin E = \beta \cdot \sin V_a$$

$$\beta = \frac{\sin V_a}{\sin E}$$

Bestimmt man die optischen Axenwinkel eines zweiaxigen Krystalls, sei es durch vollständige Messung der optischen Constanten (der drei Hauptbrechungsquotienten), sei es durch directe Bestimmung derselben, für verschiedene Farben, so findet man dieselben verschieden, und zwar steigt oder fällt die Grösse des Winkels der Axen stetig mit der Wellenlänge des Lichtes, auf welches sie sich beziehen. Da jeder der drei Hauptbrechungsindices

sich mit der Farbe annähernd nach demselben Gesetz ändert, welches S. 28 als Cauchy'sche Dispersionsformel für einfach brechende Medien aufgestellt wurde, nur dass selbstverständlich die Constanten dieser Formel bei jedem derselben andere Werthe besitzen, so liegt die Vermuthung nahe, dass auch die Axenwinkel nach einem ähnlichen Gesetz sich mit der Farbe ändern. In der That entsprechen die Axenwinkel derjenigen Krystalle, bei welchen sie mit der Wellenlänge zunehmen (Sinn der Dispersion $\varrho > v$) ausserordentlich nahe der Formel:

$$V_a = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

derjenigen, deren Axenwinkel mit grösserer Wellenlänge des Lichtes abnimmt ($\varrho < v$):

$$V_a = A - \frac{B}{\lambda^2}$$

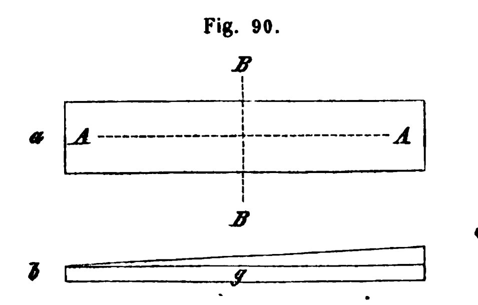
Hat man also den wahren Axenwinkel $2\,V_a$ einer Substanz für zwei Farben bestimmt, deren Wellenlänge bekannt ist, so kann man, diese Werthe in die betreffende der beiden obigen Gleichungen einsetzend, die Dispersionsconstanten A und B für den Körper und daraus den Axenwinkel für jede andere Wellenlänge ableiten.

§. 21. **Bestimmung des Zeichens der Doppelbrechung bei ein- und zweiaxigen Krystallen.** Wenn man eine einaxige Krystallplatte, welche parallel oder schräg zur optischen Axe geschliffen ist, oder eine zweiaxige, deren Flächen der optischen Axenebene parallel sind, im convergenten polarisirten Lichte betrachtet, so erblickt man bekanntlich keine Interferenzerscheinungen, wenn die Platte nicht äusserst dünn ist, weil die hyperbolischen Farbenstreifen sich so vielfach überdecken, dass das Weiss der höheren Ordnung erscheint. In einer solchen Platte zerfällt jeder vertical auf dieselbe auftreffende Lichtstrahl in zwei senkrecht zu einander polarisirte, deren Schwingungsrichtungen durch die Stellungen, in welchen die Platte zwischen gekreuzten Nicols dunkel erscheint, leicht ermittelt werden können. Kann man nun bestimmen, welche von diesen beiden Richtungen die grössere, welche die kleinere optische Elasticität besitzt, so hat man hierdurch ein Mittel, welches in vielen Fällen über den Charakter der Doppelbrechung entscheidet. So in dem Falle einer einaxigen Platte parallel zur Axe, welche positiv ist, wenn die Schwingungsrichtung parallel der Axe die kleinere, die senkrecht dazu die grössere Elasticität besitzt, welche im umgekehrten Falle negativ ist; so ferner bei einer zweiaxigen Platte parallel der Axenebene, welche positiv ist, wenn diejenige Schwingungsrichtung, welche den spitzen Winkel der optischen Axen halbirt, die kleinste ist. Jenes Mittel, durch welches man bei einer doppeltbrechenden Platte, welche das Weiss der höheren Ordnung zeigt, von den beiden Schwingungsrichtungen bestimmen kann, welche der grösseren Elasticität entspricht, besteht im Hinzufügen verschieden dicker Schichten eines Krystalls von bestimmtem optischen Charakter, welcher durch theilweises Compen-

siren der Phasendifferenz der ersten Krystallplatte so wirkt, als ob diese dünner wäre, und somit die hyperbolischen Interferenzstreifen entstehen lässt. Man verwendet hierzu einen aus Quarz gefertigten Keil, dessen eine Fläche der Axe AA parallel ist, s. Fig. 90 a Vorderansicht, b Längsschnitt. Derselbe ist gewöhnlich, um den dünnsten Theil weniger zerbrechlich zu machen, auf eine rectanguläre Glasplatte g aufgekittet.

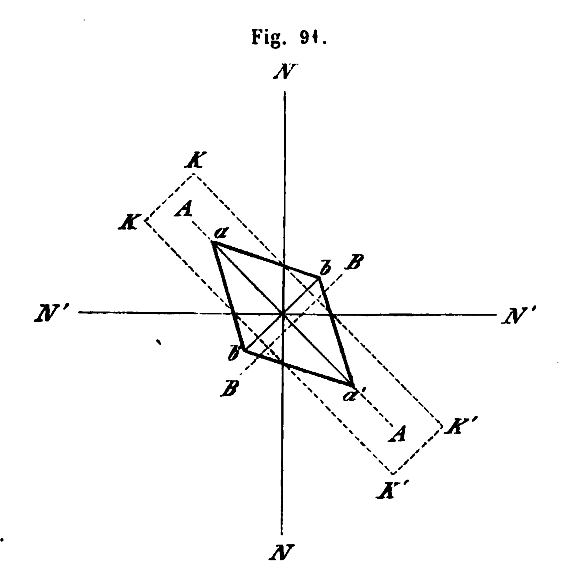
Der Quarz ist ein positiver Krystall, die Elasticität parallel seiner optischen Axe ist also am kleinsten, senkrecht dazu am grössten. Jeder in einen solchen Keil an irgend einer Stelle senkrecht auffallende Strahl wird sich demnach in zwei zerlegen, von denen der ordentliche, parallel BB schwingend, sich schneller, der ausserordentliche, parallel der Axe AA schwingend, sich langsamer fortpflanzt. Es ist folglich die Wellenlänge des ersteren grösser als die des letzteren, und da beide dieselbe Wegstrecke (die Dicke des Quarzkeils an der betreffenden Stelle) durchlaufen, der ordinäre Strahl aber mit weniger Wellen als der extraordinäre, so wird der erstere in seinem Schwingungszustand gegen den zweiten, gleichzeitig austretenden verzögert sein. Diese Verzögerung wächst nun offenbar mit der Dicke des Quarzes, man kann also durch Verschieben des Keils von Rechts nach Links dieselbe vergrössern,

Fig. 90.



da alsdann eine dickere Stelle des Keils zur Wirksamkeit gelangt. Bringt man nun eine doppeltbrechende Platte $aba'b'$ Fig. 91 so in das Polarisationsinstrument, dass ihre Schwingungsrichtungen 45° mit denen der beiden gekreuzten Nicols (NN und $N'N'$) bilden, und sei aa die Richtung der grössten Elasticität unter allen in der Ebene $aba'b'$ liegenden, bb' die der kleinsten, so werden die Vibrationen parallel aa' sich rascher im Krystall fortpflanzen als die parallel bb', demnach grössere Wellenlänge und beim gleichzeitigen Austritt eine Verzögerung gegen die letztere haben. Es sei für diejenigen Strahlen, welche in senkrechter Richtung

Fig. 91.



durch die Platte hindurchgehen, von denen jeder in zwei zerfällt, deren Weg im Krystall gleich lang ist, so dass ihre Phasendifferenz nur von dem Unterschied ihrer Geschwindigkeit abhängt, welche Strahlen sämmtlich in der Mitte des Gesichtsfeldes vereinigt werden, die entstehende Differenz ihres Schwingungszustandes $= n\lambda$ (wo n jede ganze oder gebrochene positive Zahl sein kann). Da bei einiger Dicke der Krystallplatte n bereits sehr gross ist, so wird eine Interferenz an derselben Stelle stattfinden für sehr verschiedene Farben, es werden im weissen Licht also keine Farbencurven auftreten, sondern nur Weiss. Schiebt man nun den Quarzkeil $KKK'K'$ so ein, dass seine optische Axe AA der Schwingungsrichtung aa' der Krystallplatte parallel ist, so werden zwei gleichzeitig mit derselben Phase eintretende Strahlen, von denen einer $\| aa'$, der andere $\| bb'$ schwingt, in dem Quarz eine Phasendifferenz, welche wir $= n'\lambda$ setzen wollen, erhalten, es wird aber hier der $\| bb'$ schwingende um den bezeichneten Betrag gegen den andern verzögert sein, weil ersterer im Quarz der ordentliche ist. Die Vibration $\| aa'$ wird also zuerst in der Krystallplatte um $n\lambda$ gegen die Vibration $\| bb'$ verzögert worden sein, alsdann wird aber letztere im Quarz gegen erstere um $n'\lambda$ verzögert, es ist also die Phasendifferenz der gleichzeitig austretenden Strahlen, nachdem sie beide durchlaufen haben, $= (n - n')\lambda$. Die Grösse $n - n'$ kann nun beliebig klein gemacht werden, sobald die Krystallplatte einigermassen dünn und der Quarzkeil dick genug ist, also durch Verschieben des letzteren parallel AA, so dass eine dickere Stelle in die Mitte kommt. Mit dieser verkleinerten Phasendifferenz treten denn nun die beiden Strahlen in den Analysator und ihr entsprechend interferiren sie nach der Zurückführung auf eine Schwingungsebene. Ist $n - n'$ sehr klein, so tritt ganz dasselbe ein, als ob die Krystallplatte selbst äusserst dünn und kein Quarzkeil vorhanden wäre, d. h. es erscheinen im weissen Licht die hyperbolischen farbigen Interferenzcurven.

Würde man hingegen den Quarzkeil so in das Polarisationsinstrument eingeschoben haben, dass AA parallel der Schwingungsrichtung bb' wäre, so würden dieselben Vibrationen $\| aa'$, welche im Krystall gegen die senkrecht dazu stehenden um $n\lambda$ verzögert wurden, auch im Quarz um $n'\lambda$ gegen letztere verzögert werden, also schliesslich eine Phasendifferenz von $(n + n')\lambda$ besitzen und dem entsprechend interferiren. In diesem Falle wirkt demnach der Quarzkeil so, als ob die Krystallplatte dicker geworden wäre, es können also noch weniger, als ohne denselben, Interferenzfarben auftreten.

Wäre nicht aa', wie wir angenommen haben, die Richtung der grössten Elasticität in der Krystallplatte, sondern bb', und aa' die der kleinsten, so wäre Alles umgekehrt, d. h. wir müssten den Quarzkeil, um die Interferenzstreifen zu erhalten, so einschieben, dass AA parallel bb' wird.

Daraus ergiebt sich das Verfahren zur Bestimmung der relativen optischen Elasticität nach den zwei Schwingungsrichtungen einer Platte folgender-

massen: Dieselbe wird in dem Polarisationsinstrument mit convergentem Licht so weit gedreht, bis sie das Maximum der Helligkeit zeigt (denn alsdann bilden ihre Schwingungsrichtungen 45° mit denen der gekreuzten Nicols), dann wird zwischen die Platte und den Analysator der Quarzkeil eingeschoben, einmal mit seiner Längsrichtung parallel der einen, das andere mal parallel der zweiten Schwingungsrichtung der Krystallplatte; diejenige von beiden, der seine Längsrichtung parallel ist, wenn in der Mitte des Gesichtsfeldes die hyperbolischen Farbencurven auftreten, ist die Richtung der grössten Elasticität unter allen der Platte parallelen, die senkrecht dazu stehende die der kleinsten.

Hat man eine optisch einaxige Krystallplatte, deren Flächen senkrecht zur optischen Axe stehen, zur Bestimmung ihres optischen Charakters zur Verfügung, so kann man diesen dadurch finden, dass man sie auf den Krystallträger des Polarisationsinstrumentes (mit convergentem Licht) und auf dieselbe eine zweite senkrecht zur Axe geschliffene Platte eines anderen einaxigen Krystalls, von welchem man das Zeichen der Doppelbrechung kennt, legt. Hat die zu untersuchende Platte denselben optischen Charakter, wie die letztere, so wird derselbe Strahl (von den beiden senkrecht zu einander schwingenden), welcher in der unteren verzögert wurde, es auch in der oberen, diese wirkt also gerade so, als ob die untere Platte dicker geworden wäre, d. h. die kreisförmigen Farbenringe werden enger sein, als sie erschienen, ehe die Platte von bekanntem optischen Charakter aufgelegt wurde. Ist dagegen die zu untersuchende Krystallplatte von entgegengesetztem optischen Charakter als die bekannte, so wird letztere so wirken, als ob erstere dünner geworden wäre, d. h. die Farbenringe werden weiter werden. Diese Erweiterung oder Verengerung der Farbenringe kann man dadurch sehr leicht erkennbar machen, dass man in der Bildebene des Polarisationsinstrumentes eine Glasplatte mit feinen eingerissenen Linien anbringt, welche man alsdann auf der Interferenzfigur erblickt und so ein Maass zur Bestimmung des Durchmessers der Farbenringe besitzt.

Eine weitere sehr bequeme Methode zur Bestimmung des optischen Charakters einer senkrecht zur Axe geschliffenen einaxigen Platte besteht in der Anwendung eines Viertelundulation-Glimmerblattes, d. h. einer so dünnen Spaltungslamelle von Glimmer, dass die aus einem senkrecht eintretenden Strahl entstehenden beiden Vibrationen nur um $\frac{1}{4}\lambda$ (für mittlere Farben) der eine gegen den anderen verzögert wird. Der Glimmer ist negativ zweiaxig, d. h. seine Axe der grössten Elasticität halbirt den spitzen Winkel der Axen, und senkrecht zu jener Richtung ist seine so äusserst vollkommene Spaltbarkeit. Schneidet man das Glimmerblatt in eine rectanguläre Form, so dass die Längsrichtung der optischen Axenebene entspricht, so sind die längeren Kanten desselben genau parallel der Axe der kleinsten, die kürzeren der der mittleren Elasticität, und dies sind zugleich die beiden Schwingungsrichtungen eines senkrecht zur Platte (parallel der Axe der grössten Elasticität) einfallenden Strahls.

Hat man nun die zu untersuchende, senkrecht zur Axe geschliffene einaxige Krystallplatte im convergenten Licht zwischen gekreuzten Nicols und fügt jene Glimmerplatte in den Gang der Lichtstrahlen ein und zwar zwischen der Platte und dem Analysator, so erhält man im homogenen Licht statt der kreisförmigen dunklen Ringe mit schwarzem Kreuz die in Fig. 92 dargestellte Interferenzfigur, wenn der Krystall positiv ist, dagegen die in Fig. 93 dargestellte, wenn er negativ ist, und wenn in beiden Fällen das Glimmerblatt die punktirt angedeutete Lage hat, d. h. seine Längsaxe in den beiden mit *II* und *IV* bezeichneten Quadranten 45° mit den Nicols bildet. Das erstere Interferenzbild unterscheidet sich dadurch von dem gewöhnlichen, dass die dunklen Ringe in den Quadranten *II* und *IV* um etwa ein Viertel des Abstandes zweier benachbarter verengert, diejenigen in den Quadranten *I* und *III* um ebenso viel erweitert, so dass an der Grenze zweier Quadranten stets ein heller an einen dunklen Ring stösst. Statt des schwarzen Kreuzes erscheinen nur zwei schwarze Flecken, deren Verbindungslinie senkrecht zur Längsrichtung des Glimmers steht. Würde das Glimmerblatt senkrecht zu der in der Figur angedeuteten Lage eingeschoben werden, so dass seine Längsrichtung mitten in die Quadranten *I* und *III* fiele, so würden deren Ringe verengert, die von *II* und *IV* erweitert und in letzteren auch die schwarzen Flecke erscheinen. Bei der das Interferenzbild eines negativen Krystalls darstellenden Fig. 93 liegt die gleiche Erweiterung der Ringe und die dunklen Flecke in denjenigen Quadranten, welche die Längsaxe des Glimmers halbirt, in *II* und *IV*, die Verengerung der Ringe geschieht dagegen in *I* und *III*. Würde das Glimmerblatt so eingeschoben worden

Fig. 92.

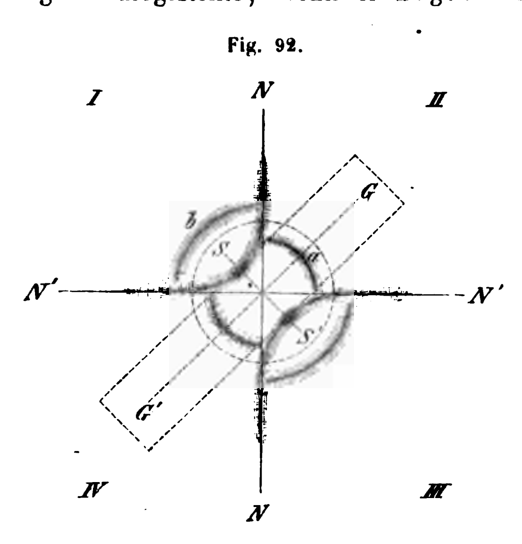
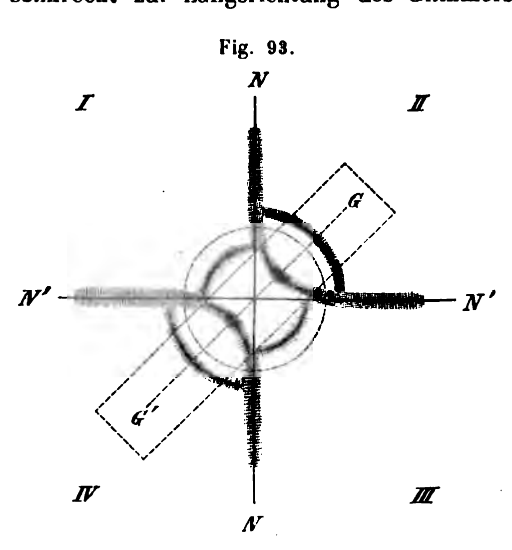


Fig. 93.



sein, dass es die Quadranten *I* und *III* halbirte, so würden in diesen die Erweiterung der Ringe und die dunklen Flecke, in *II* und *IV* die Verengerung eintreten. Was für die dunklen und hellen Ringe im homogenen Licht statt hat, gilt auch für die im weissen Licht erscheinenden Farbenringe, so dass also in letzterem Falle die Ringe gleicher Farbe in derselben Weise erweitert oder verengert werden; die schwarzen Flecke erscheinen ganz ebenso, wie im homogenen Licht.

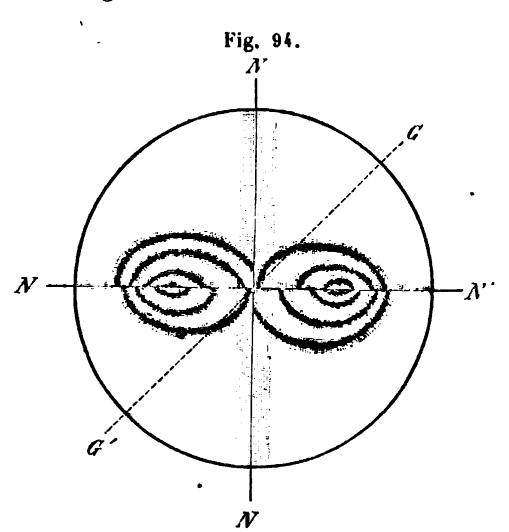
Zu einer Erklärung dieser Erscheinung, soweit eine solche hier möglich ist, bleiben wir bei dem einfacheren Fall des homogenen Lichtes stehen. Seien NN, $N'N'$, Fig. 92, wie vorher die Richtungen der Nicols, GG' die Längsrichtung des Glimmerblattes, so möge der punktirte Kreis den Ort des ersten dunklen Interferenzringes im Gesichtsfelde darstellen, welcher erscheinen würde, wenn keine Viertelundulationsplatte da wäre. Wenn die zu untersuchende Krystallplatte positiv einaxig ist, so entsteht nach dem Früheren dieser Ring dadurch, dass in der entsprechenden Richtung zwei Strahlen mit einander interferiren, von denen der eine, der ausserordentliche, im Hauptschnitt GG', der andere, der ordentliche, senkrecht dazu schwingt, sich aber um so viel schneller fortpflanzt, dass seine Wellenlänge die des anderen derart übertrifft, dass er beim Austritt genau um eine ganze Wellenlänge gegen jenen verzögert ist. Alsdann tritt nämlich, weil die Interferenz bei gekreuzten Nicols mit entgegengesetzter Phase stattfindet, vollständige Auslöschung ein. An einer Stelle a, wo, der Mitte des Gesichtsfeldes etwas näher, der schwarze Kreisquadrant angegeben ist, wird der ordentliche Strahl nur um $\frac{3}{4}\lambda$ gegen den ausserordentlichen verzögert sein; treten nun beide in das Glimmerblatt ein, so kommt zu dieser Verzögerung noch $\frac{1}{4}\lambda$ hinzu, denn der ausserordentliche, parallel der Axenebene GG' des Glimmers schwingende Strahl pflanzt sich in diesem ebenfalls schneller fort, als der senkrecht dazu vibrirende, da die Richtung GG' die Axe der kleinsten Elasticität, SS' die der mittleren des Glimmers ist. Die beiden interferirenden Strahlen haben also nach Hinzufügung der Viertelundulationsplatte schon in geringerem Abstand von der Mitte des Gesichtsfeldes eine ganze Wellenlänge Phasendifferenz, der erste dunkle Ring, welcher dieser Verzögerung entspricht, ist also um ebenso viel enger geworden. Betrachten wir nun denjenigen Punkt b, in welchem sich Strahlen vereinigen, deren Phasendifferenz $\frac{5}{4}\lambda$ ohne Glimmerblatt sein würde. Hier schwingt der ausserordentliche, sich langsamer fortpflanzende Strahl $\parallel SS'$ (im Hauptschnitt), der ordentliche, sich schneller fortpflanzende, $\parallel GG'$. Im Glimmer ist aber die Geschwindigkeit des letzteren die kleinere, die des ersten grösser. Die in der Krystallplatte entstandene Phasendifferenz $\frac{5}{4}\lambda$ wird also um $\frac{1}{4}\lambda$ verkleinert, folglich entsteht im Quadranten *I* der erste dunkle Ring erst in dem Abstande des Punktes b von der Mitte, er ist weiter geworden, als vorher. In ganz gleicher Weise kommt für jeden folgenden Ring in den Quadranten *II* und *IV* zur Phasendifferenz der Krystallplatte noch $\frac{1}{4}\lambda$ von Seiten des Glimmers hinzu, sie werden sämmtlich enger, während bei allen

Ringen in den Quadranten *I* und *III* die entstandene Phasendifferenz durch den Glimmer um $\frac{1}{4}\lambda$ verringert wird, die letzteren also erweitert werden. Bei den negativen Krystallen ist die Elasticität parallel der Axe am grössten, der ausserordentliche Strahl also der schnellere, bei derselben Stellung des Glimmers muss also in den Quadranten *II* und *IV* genau das Gleiche vor sich gehen, als bei positiven in den Quadranten *I* und *III*, und vice versa. Eine vollständige Erklärung des ganzen Interferenzbildes, namentlich der Umwandlung des dunklen Kreuzes in zwei schwarze Flecken, kann jedoch nicht gegeben werden, ohne auf eine besondere Art der Polarisation des Lichtes einzugehen, deren Betrachtung hier zu weit führen würde.

Das praktische Verfahren, um den Charakter der Doppelbrechung einer senkrecht zur Axe geschliffenen einaxigen Krystallplatte zu bestimmen, besteht demnach darin, dass man zwischen sie und den Analysator eine Viertelundulations-Glimmerplatte von angegebener Form so einschiebt, dass ihre Längsrichtung 45° mit den beiden Armen des schwarzen Kreuzes bildet. Es erscheinen alsdann statt desselben zwei schwarze Flecke; bildet deren Verbindungslinie mit der Längsrichtung des Glimmers ein Kreuz (+), d. h. steht sie senkrecht dazu, so ist der Krystall positiv (+), ist jene Verbindungslinie identisch mit der Längrichtung (—), so ist der einaxige Krystall negativ (—). Im ersteren Falle sind die Ringe erweitert in den Quadranten, durch welche die Längsrichtung des Glimmers nicht geht, im letzteren Falle in denjenigen, welche durch die Längsrichtung desselben halbirt werden.

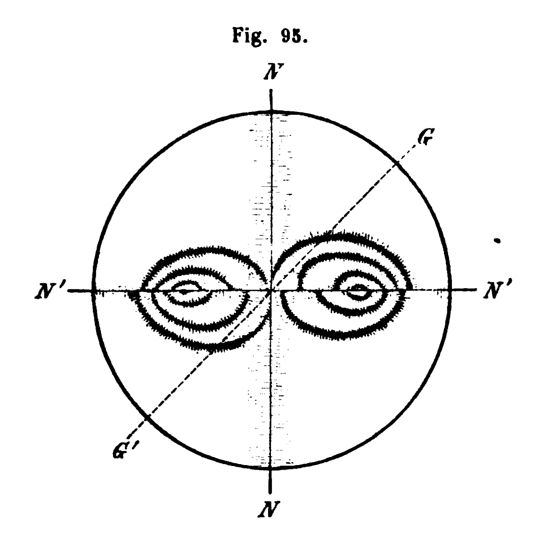
Dieselbe Glimmerplatte kann auch dazu dienen, das Zeichen der Doppelbrechung zu bestimmen bei einer zweiaxigen Krystallplatte, welche senkrecht zur ersten Mittellinie geschliffen ist und daher im convergenten Licht die beiden Axen zeigt. Man stellt zu diesem Zweck die Krystallplatte so im Instrument ein, dass ihre Axenebene dem einen Nicol parallel ist, dass sie also die Lemniscaten durchschnitten von einem schwarzen Kreuz zeigt. Alsdann fügt man zwischen dieselbe und den Analysator die Glimmerplatte ein und beobachtet, wenn der zu untersuchende Krystall positiv, d. h. wenn die erste Mittellinie die Axe der kleinsten Elasticität ist, das in Fig. 94 dargestellte Interferenzbild, in welchem die Farbenringe in den beiden Quadranten erweitert sind, durch welche das Glimmerblatt, dessen Längs-

Fig. 94.



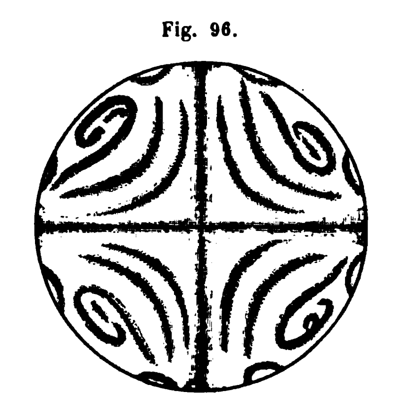
richtung durch die Linie GG' angedeutet ist, nicht geht. Ist der Krystall dagegen negativ, d. h. ist seine erste Mittellinie die Axe der grössten Elasticität, so erscheint bei derselben Lage das Bild Fig. 95, in welchem die Ringe derjenigen beiden Quadranten erweitert sind, welche von der Längsrichtung des Glimmers halbirt werden. Aus dieser Analogie der Erscheinungen mit derjenigen der einaxigen Krystalle ersieht man schon, dass die Erklärung ebenfalls eine jener analoge sein muss, wenn auch die Herleitung bei einem zweiaxigen Krystall eine weit complicirtere ist.

Fig. 95.



§. 22. **Herstellung einaxiger und circularpolarisirender Medien aus Combinationen zweiaxiger.** Wir haben in dem Glimmer eine Art zweiaxiger Krystalle kennen gelernt, von welchem man durch seine Spaltbarkeit Platten von jeder beliebigen Dicke herstellen kann, welche senkrecht zur ersten Mittellinie der optischen Axen sind. Legt man zwei einigermassen dicke Glimmertafeln so übereinander, dass ihre optischen Axenebenen 90° mit einander bilden, und bringt diese Combination in das Polarisationsinstrument mit convergirendem Lichte, so erblickt man vier Axenbilder mit nur wenig gestörten Lemniscaten; schichtet man aber mehr solcher Paare so übereinander, dass je zwei auf einander liegende Glimmerplatten rechtwinkelig gekreuzt sind, so erblickt man schon bei 4—5 Paaren eine Interferenzfigur, wie sie in Fig. 96 dargestellt ist, und welche grosse Aehnlichkeit mit derjenigen (Fig. 5 Taf. I) besitzt, die ein Krystall zeigt, dessen optische Axenebenen für verschiedene Farben senkrecht zu einander stehen.

Fig. 96.

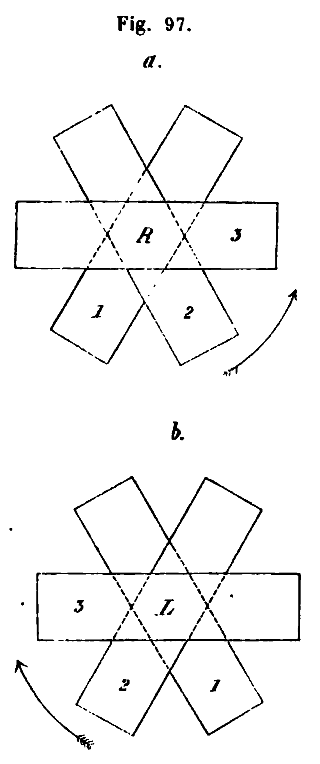


Eine ganz andere Interferenzerscheinung erhält man dagegen, wenn die einzelnen, kreuzweise über einander geschichteten, Glimmerlamellen so dünn sind, dass die beiden durch Doppelbrechung in einer solchen entstehenden Strahlen weniger als eine Wellenlänge Phasendifferenz erhalten. Fallen die Hauptschnitte des Glimmers mit den beiden gekreuzten Nicols des Instrumentes zusammen,

so beobachtet man nämlich ein Interferenzbild, welches vollkommen mit dem einer senkrecht zur optischen Axe geschliffenen Platte eines einaxigen Krystalls übereinstimmt, also aus kreisförmigen Farbenringen, durchschnitten von einem dunklen Kreuz, besteht.

Endlich kann man auch die Erscheinungen einaxiger circularpolarisirender Krystalle nachahmen mit Hülfe solcher sehr dünner Glimmertafeln. Zu diesem Zwecke muss man sie so aufschichten, dass die Längsrichtungen, welche der Axenebene parallel sind, also mit der zweiten Mittellinie zusammenfallen, bei zwei benachbarten 60° bilden, und die Platten entweder eine von links nach rechts aufsteigende, Fig. 97*a*, oder eine von rechts nach links aufsteigende Treppe bilden, Fig. 97*b*. Diese Präparate verhalten sich nun in der Mitte, wo das Licht durch alle drei Arten von Platten hindurchgeht, wie circularpolarisirende Krystalle, und zwar *R* wie ein rechts-, *L* wie ein linksdrehender Quarz. Beide Präparate auf einander gelegt, zeigen die Airy'schen Spiralen. Die Erscheinungen gleichen denen des Quarzes um so vollkommener, je dünner die Glimmerplatten und je grösser ihre Anzahl ist. So fertigt z. B. Herr Steeg, Optiker in Homburg v. d. H., derartige Combinationen, welche aus 30 Lamellen bestehen, welche so dünn sind, dass die Phasendifferenz der doppeltgebrochenen Strahlen in einer solchen nur $\frac{1}{8}\lambda$ beträgt; ein solches Präparat besitzt das Drehungsvermögen einer 8 Millim. dicken Quarzplatte. (Reusch, Monatsber. d. Berl. Akad. Juli 1869, und Poggend. Annalen, 138. Bd. 628.)

Fig. 97.



§. 23. **Doppelbrechung durch Druck und Spannung.** Nach unseren Annahmen über die Natur des Lichtes steht die Elasticität des Aethers unter dem Einfluss der Elasticität und Dichte des Körpers, zwischen dessen Theilchen er sich befindet. Wird diese geändert, so muss darnach auch jene eine Aenderung erfahren. Die Dichte und Elasticität eines Körpers kann nun nach bestimmten Richtungen geändert werden durch einen in diesen wirkenden Zug oder Druck; der Sinn der Aenderung ist in diesen beiden Fällen natürlich der entgegengesetzte. Wenn in dem Körper vorher die Elasticität des Aethers nach allen Richtungen gleich, wenn er optisch isotrop (einfach brechend) war, wie alle amorphen Substanzen und eine bestimmte Klasse von Krystallen, so muss derselbe, wenn in einer gewissen Richtung auf seine Theilchen ein Druck oder Zug ausgeübt wird, in dieser

Richtung eine andere optische Elasticität annehmen, als in den anderen, d. h. er muss doppeltbrechend werden. Die optische Elasticität in einer Richtung wird nun vergrössert durch eine in dieser wirkende Pressung, verkleinert durch eine parallele Spannung. Beide Erscheinungen kann man zugleich hervorbringen, wenn man zwischen zwei Spiegelglasstreifen von 2 — 3 Decimeter Länge, c. ½ Decim. Breite und 5 — 6 Millim. Dicke einen Metalldraht legt und (am besten mit Klemmschrauben) die Enden an einander presst. Fig. 98 stellt dieselben von der Seite und von oben gesehen dar, und zeigt, dass beide gekrümmt sind und einander die concaven Seiten zukehren. Durch diese Krümmung sind die äusseren, convexen Flächen derselben grösser, die inneren concaven dagegen kleiner geworden, als sie vorher waren, jene sind also in der Längsrichtung gespannt, diese in derselben Richtung zusammengepresst. Die Fig. 99 zeigt dies deutlicher, da hier die Krümmung so stark dargestellt ist, wie sie mit Glasstreifen in Wirklichkeit nicht vorgenommen werden kann. In der äussersten Glasschicht, z. B. bei a, ist die Spannung $\parallel ll$ gerichtet, also ist die optische Elasticität an dieser Stelle am kleinsten $\parallel ll$, am grössten (nämlich gleich der im ungepressten Zustande) $\parallel qq$. An einer weiter nach innen liegenden Stelle b ist immer noch eine Verlängerung nach ll, jedoch eine geringere, vorhanden; die optische Elasticität ist also $\parallel ll$ am kleinsten, senkrecht dazu, $\parallel qq$, am grössten, aber die Differenz beider ist kleiner. Ungefähr in der Mitte des Glasstreifens bei c und auf allen Punkten der durch c gehenden Linie CcC', wird jene Differenz Null sein, es ist dies diejenige Linie, welche im ungebogenen Zustand des Glasstreifens die gleiche Länge hat, also weder eine Pressung noch eine Spannung erfahren hat. Auf der concaven Seite dagegen ist der Glasstreifen durch die Biegung in seiner Längsrichtung zusammengepresst,

Fig. 98.

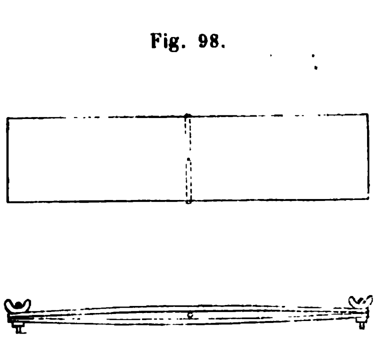
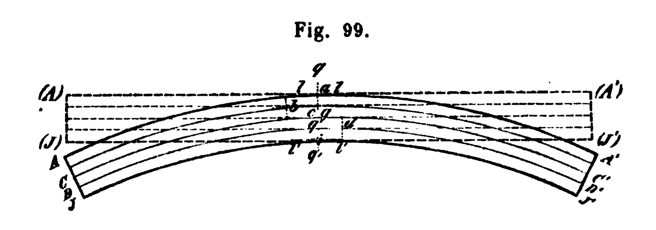


Fig. 99.



und zwar in der Linie DD' weniger, als in JJ', denn letztere Linie ist von allen die kürzeste geworden. In d sowohl als in i ist durch die Pressung

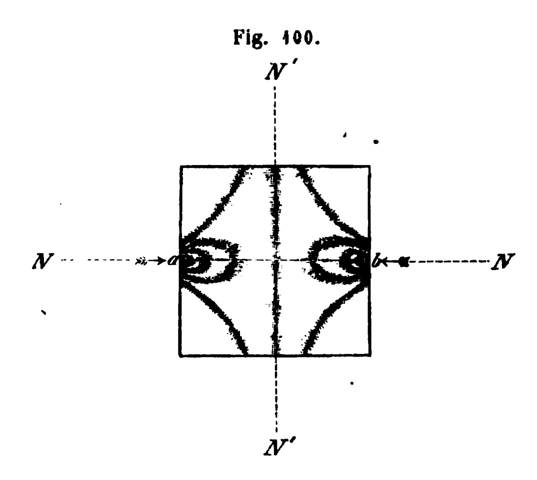
die Elasticität $\parallel l'l'$ am grössten, senkrecht dazu $\parallel q'q'$ am kleinsten, aber in i ist die Differenz beider im Maximum. Der Glasstreifen muss also in seiner ganzen Dicke doppeltbrechend sein, bis auf eine Zone, ungefähr in der Mitte; die Doppelbrechung ist am stärksten in der äussersten und der innersten Zone, aber in der einen entgegengesetzt der der andern, und sie nimmt von da an Stärke ab nach Innen bis zu jener neutralen Zone, wo sie gleich Null wird. Bringen wir die so gebogenen Glasstreifen nun derart zwischen zwei gekreuzte Nicols (in das Polarisationsinstrument mit parallelem Licht), dass die Lichtstrahlen parallel der Längsrichtung des Drahtstückes Fig. 98, also durch eine etwa $\frac{1}{2}$ Decim. dicke Glasschicht hindurchgehen, so werden alle Strahlen, mit Ausnahme der in die neutrale Zone fallenden, in je zwei polarisirte zerlegt, welche parallel ll und qq schwingen und sich mit verschiedener Geschwindigkeit fortpflanzen. Eine so geringe Biegung, wie sie Fig. 98 darstellt, genügt bei den angegebenen Dimensionen bereits dafür, dass die beiden durch Doppelbrechung entstehenden Strahlen in der innern oder äussern Grenzschicht beim Austritt eine Phasendifferenz von mehreren Wellenlängen haben, in den der Mitte näheren Zonen natürlich weniger. In einem bestimmten Abstand von der neutralen Zone wird dieselbe genau $= \lambda$ sein, dort wird also bei gekreuzten Nicols vollständige Vernichtung des Lichtes stattfinden, wie in der einfachbrechenden Zone selbst, ebenso in derjenigen, wo die entstehende Phasendifferenz $= 2\lambda$ ist u. s. f. Stellt man die Längsrichtung der Glasstreifen einem der Nicols parallel, so werden natürlich alle Stellen derselben dunkel erscheinen. In jeder andern Stellung dagegen müssen, wenn das angewandte Licht homogenes war, zwischen den Zonen mit 0, λ, 2λ, u. s. f. Phasendifferenz, helle Zonen auftreten, deren Helligkeit am grössten in der Mitte zwischen zwei dunklen sein muss, da dort die Phasendifferenz resp. $\frac{1}{2}\lambda$, $\frac{3}{2}\lambda$ u. s. f. ist. Den grössten Unterschied der Intensität zwischen hellen und dunklen Zonen erhält man selbstverständlich, wenn die Längsrichtung der Glasstreifen 45^0 mit den Schwingungsrichtungen der Nicols bildet.

Hieraus ergiebt sich ganz von selbst die Erscheinung im weissen Licht: In der Mitte des Glasstreifens erscheint die neutrale Zone in der ganzen Länge schwarz, zu beiden Seiten, ihr und den Aussenflächen der Glasstreifen parallel, Farbenstreifen, von der Mitte aus nach beiden Seiten genau in derselben Reihenfolge der Farben, wie sie (im convergenten Licht) in den Farbenringen der einaxigen Krystalle, senkrecht zur Axe geschnitten, auftreten.

Presst man ein quadratisches Stück Glas von zwei gegenüberliegenden Stellen des Randes aus, und bringt es so in paralleles polarisirtes Licht bei gekreuzten Nicols, dass die Gerade zwischen jenen beiden Punkten 45^0 mit den Nicols einschliesst, so entsteht eine Aufhellung, bei stärkerem Drucke eine Farbe, in der Nähe der beiden gepressten Stellen. Diese Aufhellung wird aber nach allen Seiten von da aus schwächer, d. h. das Glas ist unmittelbar bei denselben am stärksten zusammengepresst, und der Druck

nimmt ab mit der Entfernung von ihnen, der mittlere Theil ist gar nicht davon betroffen worden, bleibt also dunkel. Wird jedoch ein stärkerer Druck in der Richtung der Pfeile Fig. 100 ausgeübt, so werden die benachbarten Glastheilchen in derselben Richtung eine um so viel grössere optische Elasticität haben, als senkrecht dazu, dass die beiden durch Doppelbrechung entstehenden Strahlen um mehrere Wellenlängen gegen einander verschoben sind, also eine Farbe zweiter oder dritter Ordnung daselbst erscheint; von *a* und *b* aus nimmt aber die Pressung, folglich auch die Stärke der Doppelbrechung nach allen Seiten ab, also erscheinen in grösseren Abständen andere Interferenzfarben, welche zusammen ein Bild isochromatischer Curven liefert, Fig. 100, welches mit dem bekannten Lemniscatensystem zweiaxiger Krystalle grosse Aehnlichkeit besitzt.

Fig. 100.



Umwindet man eine kreisförmige Platte von Glas auf ihrer cylindrischen Seitenfläche mit einer sehr festen Schnur und zieht diese stark an, so wird jene von allen Punkten des Umfanges aus nach dem Centrum hin zusammengepresst, am stärksten am Rand, immer weniger nach der Mitte zu. Im parallelen Licht zeigen alle Stellen gleichen Druckes, d. h. alle auf einem mit dem Umfang der Platte concentrischen Kreise liegenden Punkte, gleiche Farben; es erscheinen also die kreisförmigen isochromatischen Curven mit dem schwarzen Kreuz, genau wie bei den einaxigen Krystallen im convergenten Licht.

Durch Erwärmen findet eine Ausdehnung der Körper statt und somit eine Aenderung ihrer Dichte, welche eine solche der optischen Elasticität nach sich zieht. Erwärmt man nun einen isotropen Körper, z. B. ein Stück Glas, ungleichmässig, so treten in demselben durch die ungleichmässige Ausdehnung Spannungen und Pressungen ein, und es zeigen sich dem entsprechende Erscheinungen der Doppelbrechung. Diese lassen sich in dergleichen Körpern auch dauernd machen, indem dieselben stark erhitzt und dann schnell abgekühlt werden (gekühlte Gläser, welche im polarisirten Licht je nach ihrer Gestalt die mannigfaltigsten Interferenzbilder liefern).

Eine für die Kenntniss der optischen Erscheinungen der Krystalle äusserst wichtige Entstehungsart der Doppelbrechung ist die folgende: Es giebt viele, sogenannte colloidale Substanzen, wie Collodium, Gelatine u. a., welche die Eigenschaft haben, beim Uebergang aus dem gelösten in den festen Zustand, bei der Entfernung des Lösungsmittels, eine erhebliche Contraction zu zeigen, und hierdurch Flächen, an welchen sie sich anlegen, in

tangentielle Spannung zu versetzen. Es scheint aber, wie **Reusch** (Monatsber. d. Berliner Akad. Juli 1867) zuerst nachgewiesen hat, dieselbe Fähigkeit auch manchen krystallisirten Körpern zuzukommen. Ein solcher ist der Alaun, dessen Krystalle zu der Klasse der isotropen gehören, jedoch sehr oft die Erscheinungen schwacher Doppelbrechung zeigen. Dieselben treten nun genau so auf, dass man annehmen muss, es sei die Substanz eines solchen Krystalls gespannt innerhalb gewisser Ebenen, parallel denen die schichtenweise Anlagerung beim Aufbau desselben stattfand. Eine Platte, aus einem derartigen Alaunkrystall geschnitten, wird also zwischen gekreuzten Nicols nicht dunkel, sondern theilweise aufgehellt erscheinen. Vergl. §. 47.

Aus diesen Beispielen ersehen wir bereits, dass wir es niemals hierbei mit homogenen (s. S. 12) Körpern zu thun haben, sondern nur mit solchen, deren Elasticitätsverhältnisse innerhalb derselben Richtung einer Aenderung unterworfen sind, welche wir uns also gleichsam aus verschiedenen homogenen Körpern zusammengesetzt denken müssen. Alle Erscheinungen der Doppelbrechung, welche durch Druck oder Spannung in isotropen Körpern hervorgebracht sind, unterscheiden sich folglich, wie schon aus dem Gesagten hervorgeht, dadurch ganz wesentlich von denjenigen der eigentlichen Doppelbrechung der homogenen anisotropen Krystalle, dass jene stets an bestimmte Stellen des Körpers, diese an bestimmte Richtungen im Krystall, aber an keine Stelle desselben, gebunden sind. Lassen wir daher parallele Lichtstrahlen durch eine doppeltbrechende planparallele Krystallplatte fallen, so ertheilt jede Stelle der Platte dem Licht dieselbe Aenderung; eine verhält sich genau wie die andere, wenn das Licht in derselben Richtung hindurchgeht; wir können also wohl eine Farbe, oder Helligkeit, oder Dunkelheit, je nach der Dicke, der Natur und der Richtung der Platte, aber niemals eine Interferenzfigur erblicken, wenn wir keine convergenten Lichtstrahlen anwenden. Solche beobachten wir aber im parallelen Licht, wenn wir es mit einem nur durch Druck oder Zug doppeltbrechenden Körper zu thun haben; hier verhalten sich die verschiedenen Theile der Platte, auch in gleicher Richtung und bei gleicher Dicke, verschieden gegen das Licht, und nur die unter gleichem Drucke stehenden gleich. Die an einer bestimmten Stelle entstehende Interferenzerscheinung haftet an dieser Stelle, so dass sie sich verschiebt, wenn die Platte parallel sich selbst verschoben wird, was bei den Interferenzerscheinungen der Krystalle keine Aenderung hervorruft. Eine einaxige Krystallplatte, senkrecht zur Axe, zeigt das schwarze Kreuz und die kreisförmigen Farbenringe im convergenten Licht, und dieses Interferenzbild steht unverändert still, wenn man die Platte parallel sich selbst verschiebt (es wird alsdann nur von andern Theilen der Platte, die sich aber ebenso verhalten, hervorgebracht); eine kreisförmige isotrope Platte, durch eine straff um sie herumgewundene Schnur zusammengepresst, zeigt genau dasselbe Interferenzbild, aber im parallelen Licht, und mit der Verschiebung der Platte

verschiebt sich auch das Bild. In diesen Eigenschaften liegen die Mittel, die durch mechanische Aenderungen hervorgebrachte Doppelbrechung von der eigentlichen Doppelbrechung homogener Krystalle zu unterscheiden, deren Wesen darin liegt, dass sie in allen parallelen Geraden physikalisch gleich beschaffen sind.

Da eine innere Spannung oder Pressung, entstanden bei dem Akt der Krystallisation, bei isotropen Krystallen vorkommt und eine Art der Doppelbrechung verursacht, so liegt es auf der Hand, dass das Gleiche auch vorkommen kann, aus gleicher Ursache, bei Krystallen, welche in homogenem Zustande an und für sich schon doppeltbrechend sind, und dass die Inhomogeneität hier Abweichungen von den ihnen eigentlich zukommenden optischen Eigenschaften bedingen muss. Ein einaxiger Krystall, durch das senkrecht zur Axe stehende Flächenpaar betrachtet, erscheint bekanntlich, wenn er homogen ist, im parallelen Licht bei jeder Drehung dunkel; ist er aber durch innere Spannungen heterogen, so wird er beim Drehen hell und dunkel, aber mit verschiedener Intensität der Aufhellung an verschiedenen Stellen; gewöhnlich ist ein Theil ganz unverändert und bleibt dunkel. Wenn die Dilatation oder die Compression in einem solchen Krystall in einer Richtung stattfindet, welche der Axe parallel ist, so wird dadurch nur die Stärke der Doppelbrechung geändert, aber natürlich an verschiedenen Stellen nicht um gleich viel. Betrachtet man eine solche Platte im convergenten Licht, so unterscheidet sich ihre Interferenzfigur in Nichts von der einer homogenen Platte; verschiebt man sie aber parallel sich selbst, so ändert sich der Durchmesser der Farbenringe, was bei einem einaxigen Krystall, welcher an allen Stellen dieselbe Stärke der Doppelbrechung besitzt, nicht der Fall sein kann. Ist aber die Richtung der Spannung oder der Pressung nicht der optischen Axe parallel, so ist an Stellen, wo solche vorhanden ist, nicht die optische Elasticität aller Richtungen, welche senkrecht zur Axe stehen, genau gleich, sondern unter diesen hat eine die grösste, die dazu senkrechte die kleinste. An einer solchen Stelle kann also der Krystall nicht die Interferenzerscheinungen eines einaxigen Krystalls zeigen, da diese ja auf der absoluten Gleichheit aller Richtungen ringsum die Axe, welche gleichen Winkel mit derselben einschliessen, beruhen, — sondern er muss diejenigen eines zweiaxigen Krystalls, also das Lemniscatensystem, zeigen, wobei der Axenwinkel um so grösser ist, je grösser die Differenz der optischen Elasticität unter den senkrecht zur optischen Axe (jetzt ersten Mittellinie) stehenden Richtungen ist. Da an verschiedenen Stellen diese ebenfalls verschieden ist, weil es ihre Ursache, die Spannung oder der Druck, ist, so zeigen verschiedene Stellen verschiedene Grösse des optischen Axenwinkels, ja wenn die Elasticitätsänderungen nach mehreren Richtungen stattfinden, verschiedene Lage der optischen Axenebene, endlich können andere Stellen der Platte auch das unveränderte einaxige Interferenzbild zeigen.

Bei einem zweiaxigen Krystall hängt bekanntlich der optische Axenwinkel von dem Verhältniss ab, in welchem die optische Elasticität in den

drei Hauptschwingungsrichtungen steht. Wird nun durch eine Spannung, hervorgebracht durch den Akt der Krystallisation, dieses Verhältniss geändert, so muss dies auch den optischen Axenwinkel beeinflussen. Wenn z. B. der Krystall positiv ist und eine Spannung in der Richtung der grössten Elasticität letztere verringert, so nähert sich diese der mittleren, d. h. der Axenwinkel wird an dieser Stelle kleiner.*)

Da man, wie aus dem Vorhergehenden ersichtlich, beliebig einen einfach brechenden Krystall in einen doppeltbrechenden, einen einaxigen in einen zweiaxigen, einen der letzteren Art in einen solchen mit anderer Lage der optischen Axen durch mechanische Kräfte verwandeln kann, niemals aber auf diese Art einen homogenen Krystall behält, so folgt daraus, dass sich alle bisher und noch weiterhin erörterte Gesetze der physikalischen Eigenschaften, vor Allem aber die Gesetze des Zusammenhanges zwischen der Krystallform und jenen, sich nur auf **homogene Krystalle** beziehen können, dass jene mechanisch geänderten Krystalle stets Abweichungen von den Gesetzen der physikalischen Krystallographie zeigen müssen.

§. 24. **Die Farben der Krystalle.** Die Färbung eines Krystalls kann entweder eine allochromatische, seiner Substanz an und für sich nicht zukommende, sondern von der Beimischung eines fremden Stoffes herrührende, — oder eine idiochromatische, d. h. eine solche sein, welche ein nothwendiges Attribut seiner stofflichen Natur ist. Nur die letztere ist es, mit welcher wir uns zunächst hier zu beschäftigen haben. Unter den gefärbten Körpern giebt es nun eine kleine Anzahl, welche dem an ihrer ebenen Oberfläche reflectirten Licht eine bestimmte Färbung verleihen, d. h. wenn weisses Licht auffällt, nicht alle Farben desselben reflectiren. Diese Erscheinung nennt man Oberflächenfarbe; es zeigen sie unter anderen die Metalle.

Die grosse Mehrzahl der festen Körper dagegen, gleichviel, ob gefärbt oder ungefärbt, ändert das von ihnen reflectirte Licht nicht, so dass, wenn weisses Licht auf eine ebene Oberfläche derselben fällt, es auch als weisses zurückgeworfen wird. Anders verhalten sich aber sämmtliche Substanzen gegenüber dem in sie eindringenden Licht. Dieses erleidet erstens auf seinem Wege im Körper eine Schwächung seiner Intensität (Absorption); ist diese sehr gering, so nennen wir den Körper durchsichtig, ist sie so stark, dass schon nach Zurücklegung einer kurzen Strecke die Lichtbewegung

*) In derartigen sehr schwachen Spannungen kann wohl die Ursache liegen, dass die Messungen verschiedener Beobachter, oder desselben, aber mit verschiedenen Krystallen operirenden, was die Grösse des optischen Axenwinkels betrifft, bei manchen Substanzen auffallend viel von einander abweichen, auch in solchen Fällen, wo an der stofflichen Identität der untersuchten Krystalle kein Zweifel sein kann. Diese Abweichungen sind sogar zuweilen, z. B. beim Feldspath, so gross, dass die Axen in verschiedenen Krystallen, ja in verschiedenen Platten eines und desselben Krystalls in normal zu einander liegenden Ebenen sich befinden.

vernichtet ist, so nennen wir ihn undurchsichtig *); zweitens trifft diese Absorption die verschiedenfarbigen Lichtstrahlen in verschiedenem Grade, so dass das aus dem Körper austretende Licht nicht nur nicht mehr die frühere Helligkeit, sondern auch nicht mehr die frühere Farbe hat. Ist die Verschiedenheit der Stärke der Absorption in Bezug auf die verschiedenen Wellenlängen des Lichtes nur sehr gering, so werden dieselben sich zu einem Farbeneindruck zusammensetzen, der von dem des eintretenden Lichtes so wenig verschieden ist, dass wir beide nicht zu unterscheiden vermögen; alsdann nennen wir den Körper farblos. Einen absolut farblosen Stoff giebt es aber ebenso wenig, wie einen absolut durchsichtigen, und selbst bei den uns völlig farblos erscheinenden werden die verschiedenen Farben des Weiss nicht genau in gleichem Grade absorbirt, so dass die stärker absorbirten an Intensität merklich gegen die andern zurücktreten, sobald wir nur das weisse Licht auf einer sehr langen Strecke durch den Körper hindurchgehen lassen, und dass sie dann nicht mehr den Eindruck des Weiss, sondern den einer Farbe liefern. Sehr viele Substanzen absorbiren aber die verschiedenen Lichtarten so verschieden, dass das weisse Licht schon in dünnen Schichten derselben lebhaft gefärbt wird, dies sind diejenigen, die man besonders farbige Substanzen nennt. Manche absorbiren nur Licht einer oder mehrerer bestimmten Wellenlängen, dieses aber bei einiger Dicke der Schicht vollständig, so dass das durch sie hindurchgegangene Licht, durch ein stark dispergirendes Prisma zerlegt, ein Spectrum liefert, welches durch dunkle Streifen unterbrochen ist (Absorptionsspectrum). Andere absorbiren die Mehrzahl der Farben weit stärker, als eine oder mehrere, so dass diese allein im Spectrum als helle Streifen oder Banden erscheinen. Es giebt aber keinen Körper, der nur das Licht einer bestimmten Wellenlänge hindurchliesse und alle übrigen gleich stark absorbire, der also zur Erzeugung wirklich einfarbigen Lichtes dienen könnte. Manche rothen Gläser absorbiren zwar alle Farben ausser Roth so gut wie vollständig, aber dass das hindurchgelassene Licht noch aus Strahlen von, wenn auch nicht sehr viel, verschiedener Wellenlänge besteht, geht aus der spectralen Zerlegung hervor, welche stets eine breite rothe Bande liefert. Absolut homogenes Licht erhält man nicht durch Absorption, sondern nur durch Emission von glühenden Körpern, d. h. den früher bereits deshalb erwähnten glühenden Metalldämpfen.

Die Farbe, welche ein Stoff durch Absorption den hindurchgehenden weissen Lichtstrahlen verleiht, wird seine Körperfarbe genannt. Es liegt nun auf der Hand, dass diese nur dann nach allen Richtungen im Körper die gleiche sein kann, wenn auch die Fortpflanzung der Schwingungen aller beliebigen Richtungen in gleicher Weise, also gleich schnell, vor sich geht;

---

*) Hieraus geht hervor, dass beide Worte nur relative Begriffe bezeichnen, und dass es weder einen absolut durchsichtigen, noch einen absolut undurchsichtigen Körper giebt.

dies ist aber unter den Krystallen nur der Fall bei der ersten Klasse, den optisch isotropen. Bei denen der zweiten und dritten Abtheilung, den ein- und zweiaxigen, sind die optischen Elasticitätsverhältnisse nach verschiedenen Richtungen verschieden, also auch die Art der Absorption, ebenso wie ihre Stärke; bei diesen sind Lichtstrahlen, welche eine gleich dicke Schicht, aber in verschiedener Richtung, durchlaufen haben, verschieden hell und verschieden gefärbt. Die letztere Eigenschaft, nach verschiedenen Richtungen verschiedene Farbe zu zeigen, welche also nur den doppeltbrechenden Krystallen zukommen kann, nennt man Pleochroïsmus. In Bezug auf ihre Körperfarbe sind also die drei Klassen von Krystallen getrennt zu behandeln.

1) Farben der isotropen Krystalle: Die Körperfarbe eines solchen ist nach allen Richtungen dieselbe, wenn das Licht eine gleich dicke Schicht durchlaufen hat.

2) Farben der optisch einaxigen Krystalle: Das im Krystall sich fortpflanzende Licht ist im Allgemeinen polarisirtes mit bestimmter Schwingungsrichtung. Alle Strahlen mit gleicher Schwingungsrichtung erleiden gleiche Absorption, alle mit verschiedener ungleiche und zwar um so mehr abweichende, je mehr die Lichtgeschwindigkeit der entsprechenden Schwingungen von einander abweicht. Gehen Lichtstrahlen in der Richtung der optischen Axe durch den Krystall, so erleiden sie eine bestimmte Absorption, je nach der Natur des Krystalls; nennen wir die bei einer bestimmten Dicke entstehende Farbe A. Die Schwingungsrichtung dieser Strahlen ist, wenn auch in allen möglichen Azimuthen, doch stets senkrecht zur Axe, und diese Richtungen sind alle gleichwerthig, entsprechen also derselben Absorption. Ein Lichtstrahl, welcher durch eine gleich dicke Schicht desselben Krystalls, aber senkrecht zur Axe, hindurchgeht, wird in zwei zerlegt, von denen einer senkrecht, der andere parallel zur optischen Axe schwingt. Der erstere, welche Richtung er auch sonst habe, zeigt die Absorptionsfarbe A, der zweite eine andere, welche wir B nennen wollen und welche offenbar von allen Absorptionsfarben desselben Krystalls diejenige ist, welche am meisten von A abweicht, da die Elasticität parallel den Schwingungsrichtungen beider von einander am meisten verschieden ist. Betrachten wir den Krystall so, dass das Licht durch denselben in der Richtung, senkrecht zur Axe, fällt, so gelangen beide polarisirte Strahlen, der mit der Farbe A und der mit der Farbe B, gleichzeitig in unser Auge, und wir vermögen sie nicht von einander zu trennen, sondern erhalten einen Gesammteindruck einer Farbe, welche wir mit $A + B$ bezeichnen wollen. Die beiden Farben A und $A + B$, d. h. die Körperfarbe des Krystalls parallel und senkrecht zur Axe, sind nun offenbar um so mehr verschieden, je mehr A und B selbst von einander abweichen. In den zwischenliegenden Richtungen ist nun die Körperfarbe des Krystalls auch eine zwischenliegende, um so näher an A, je näher die Richtung, in welcher das Licht hindurch-

fällt, derjenigen der Axe ist, und umgekehrt.*). Ist die Farbe A wenig von B verschieden, so ist sie noch weniger abweichend von der Mischfarbe $A + B$, und in solchen Fällen scheint, ohne weitere Hülfsmittel betrachtet, der Krystall nach allen Richtungen die gleiche Körperfarbe zu besitzen. Ganz besonders ist dies der Fall bei den sogenannten farblosen Substanzen, weil bei diesen der ganze Betrag der Absorption schon unmerklich ist, ihre Verschiedenheit nach verschiedenen Richtungen sich also jeder Beobachtung entzieht. Starken Pleochroïsmus, d. h. grosse Verschiedenheit der Körperfarbe mit der Richtung, können daher nur stark absorbirende, d. i. lebhaft gefärbte Krystalle zeigen; auch unter diesen giebt es viele, welche nur geringen Grad des Pleochroïsmus besitzen, bei denen also die Körperfarben parallel und senkrecht zur Axe sehr ähnliche sind.

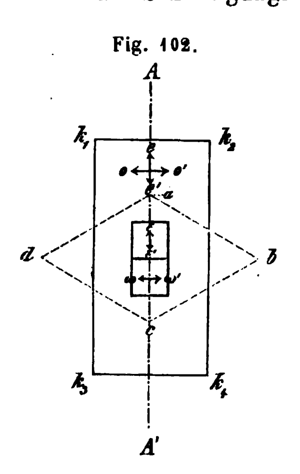
Um in den letzterwähnten Fällen das Vorhandensein des Pleochroïsmus, durch welches zugleich das der Doppelbrechung constatirt ist, zu erkennen, muss man sich eines kleinen Apparates bedienen, welcher von Haidinger construirt worden ist und Dichroskop oder dichroskopische Lupe genannt wird. Dasselbe besteht aus einem Rhomboëder von Kalkspath, dessen Durchschnitt $abcd$ in Fig. 101 ebenso dargestellt ist, wie in Fig. 32 S. 40, so dass ab und cd die kurzen Diagonalen zweier gegenüberliegenden Rhombenflächen sind. Dieses ist in einer Fassung (einem Messingrohr) befestigt, und vor und hinter demselben je ein Glaskeil, g und g', den Kalkspath berührend, so angebracht, dass die Ein- und Austrittsfläche der Lichtstrahlen senkrecht zu den Rhomboëderkanten ac und bd stehen, an denselben also keine Brechung derjenigen Strahlen, welche diesen Kanten parallel durch das Instrument gehen, stattfindet. Die Fassung hat vorn eine weite runde Oeffnung zum Hineinsehen, wenn das Auge sich in A befindet, hinten dagegen nur eine 2—3 Millim. lange und breite quadratische Oeffnung o, durch welche das Licht einfällt, wenn dieselbe gegen den hellen Himmel oder eine andere Lichtquelle gerichtet wird. Dicht vor dem Glaskeil g befindet sich eine planconvexe Linse, vermittelst deren das in A befindliche Auge ein vergrössertes virtuelles Bild der hellen Oeffnung o in der Entfernung der deutlichen Sehweite sehen würde, wenn der Kalkspath nicht vorhanden wäre. Durch dessen Doppelbrechung erscheinen jedoch zwei solcher Bilder, und da das ausserordentliche im Hauptschnitt abgelenkt wird, das eine genau über dem andern. Der Kalkspath wird nun so lang gewählt, dass die beiden Bilder sich nicht theilweise decken, sondern der obere Rand des unteren den unteren des oberen Bildes berührt.

Fig. 101.

*) Es ist daher nicht correct, diese Erscheinung mit dem Namen »Dichroïsmus«, wie vielfach geschieht, zu belegen.

Hält man nun einen einaxigen Krystall so vor die kleine Oeffnung, dass die parallel der Längsaxe der Lupe hindurchgehenden Strahlen ihn vorher in einer Richtung durchsetzen, welche senkrecht zur optischen Axe desselben ist, und dass diese letztere parallel dem Hauptschnitt des Kalkspaths ist, so treten die beiden im Krystall entstehenden Strahlen so in den Kalkspath ein, dass die Schwingungsrichtung des ordinären parallel ist der des ordinären im Kalkspath, und ebenso die des extraordinären mit der des gleichen in letzterem zusammenfällt. Es erleidet also keiner von beiden eine neue Zerlegung im Kalkspath, und somit wird von den beiden Bildern der hellen Oeffnung in der dichroskopischen Lupe das eine nur von den Strahlen gebildet, welche parallel der Axe des davor gehaltenen Krystalls schwingend aus diesem austraten, das zweite nur von denen, deren Schwingungsrichtung in demselben Krystall senkrecht zur Axe war. Die Farbe des letzteren muss also die früher mit A, die des ersteren die mit B bezeichnete sein. Man ersieht dies leicht aus Fig. 102, in welcher $k_1 k_2 k_3 k_4$ den Umriss des zu untersuchenden Krystalls, AA' die Richtung seiner optischen Axe, folglich oo' die Schwingungsrichtung des ordinären, ee' die des extraordinären aus demselben austretenden Strahles darstellen: $abcd$ ist der Querschnitt des Kalkspathrhomboëders, dessen Hauptschnitt dem des Krystalls parallel ist; $\omega\omega'$ ist die Schwingungsrichtung des Lichtes in dem einen, $\varepsilon\varepsilon'$ die in dem zweiten Bilde der quadratischen, vom Krystall verdeckten Oeffnung. Dreht man nun den letzteren um die Axe des Dichroskops als Drehungsaxe, so bildet dann oo' und ee' mit $\omega\omega'$ und $\varepsilon\varepsilon'$ einen Winkel, und jeder der beiden Strahlen wird im Kalkspath doppelt gebrochen und trägt somit zu jedem der beiden Bilder bei; wenn jener Winkel 45° beträgt, so ist die Componente jedes Strahles zu jedem der beiden Bilder die Hälfte von dessen Helligkeit, also sind diese genau von gleicher Färbung, und zwar von derjenigen $A + B$, welche der Krystall in der betreffenden Richtung auch dem nicht mit der Lupe bewaffneten Auge zeigt. Bei 90° Drehung zeigen beide Bilder des Dichroskops wieder die grösste Differenz der Färbung, aber die Farben beider sind vertauscht, u. s. f.

Fig. 102.



Jedesmal also, wenn die optische Axe des auf Pleochroïsmus zu untersuchenden Krystalls einer der Schwingungsrichtungen der beiden im Kalkspath sich fortpflanzenden Strahlen parallel ist, zeigt das eine Bild die Farbe A, das andere die Farbe B. Da nun diese sich mehr von einander unterscheiden, als die ohne Dichroskop parallel und normal zur Axe im Krystall sichtbaren Farben A und $A + B$, da man ausserdem in diesem Instrument beide Färbungen gleichzeitig und unmittelbar nebeneinander

sieht, wobei sehr geringe Verschiedenheiten ihrer Nuancen noch erkennbar sind, — so leuchtet ein, dass man mittelst dieses einfachen Apparates den Dichroïsmus eines Krystalls noch constatiren kann, selbst wenn er ziemlich schwach ist, während schon eine sehr bedeutende Verschiedenheit der Absorption, wie sie nur eine beschränkte Zahl von Substanzen zeigt, dazu gehört, um sie ohne Dichroskop zu erkennen.

Es ist leicht einzusehen, dass, wenn man den Krystall so vor die Oeffnung des beschriebenen Instrumentes hält, dass die Lichtstrahlen ihn schräg zu seiner optischen Axe durchsetzen, die Farbe des einen Bildes A, die andere eine zwischen A und B liegende Tinte sein wird; endlich, wenn das Licht den Krystall parallel der Axe durchläuft, bei jeder Drehung desselben in seiner Ebene, beide Bilder die gleiche Farbe A zeigen müssen.

3) Farben der optisch zweiaxigen Krystalle: In dieser Klasse muss die Absorption des Lichtes in den drei sogenannten Elasticitätsaxen eine verschiedene sein, also ebenso die Farben, welche das der einen oder der andern derselben parallel schwingende Licht zeigt. Nennen wir A die Farbe der Strahlen, welche im Krystall die Schwingungsrichtung der Axe der grössten Elasticität a haben, B die derjenigen, welche parallel der mittleren b, C die derjenigen, welche parallel der kleinsten Elasticitätsaxe c schwingen, so werden wir im Dichroskop durch eine Platte, senkrecht zur Axe der mittleren Elasticität, wenn a und c parallel den Schwingungsrichtungen des Kalkspaths sind, in dem einen Bild die Farbe A, im andern C sehen. Wenden wir aber eine normal zu c geschnittene Platte an, so zeigt das eine Bild, bei der analogen Stellung des Krystalls gegen das Instrument, A, das andere B. Endlich zeigt eine senkrecht zu a geschliffene Platte die Färbungen B und C getrennt, wenn sie so vor die Oeffnung der dichroskopischen Lupe gehalten wird, dass b oder c dem Hauptschnitt des in derselben befindlichen Kalkspaths parallel ist. Es genügt also bei Anwendung des Dichroskops schon die Beobachtung des Krystalls in zwei jener Richtungen, um die drei sogenannten »Axenfarben« zu bestimmen, d. h. die Farben, welche durch die Absorption der nach den drei Elasticitätsaxen schwingenden weissen Lichtstrahlen entstehen.

Ohne Dichroskop dagegen vermögen wir keine dieser drei Farben getrennt zu sehen, denn wenn wir z. B. durch eine zu a normale Platte des Krystalls hindurchblicken, so erhalten wir zugleich die $\| b$ schwingenden Strahlen mit der Farbe B und die $\| c$ schwingenden mit der Farbe C ins Auge, also werden wir eine aus beiden gemischte Färbung, $B + C$, sehen; ganz ebenso zeigt uns eine normal zu b geschnittene Platte eine Mischfarbe $A + C$, und eine Platte, deren Flächen senkrecht auf der Axe der kleinsten Elasticität stehen, $A + B$. Es ist nun klar, dass die aus zwei Axenfarben gemischten Farbeneindrücke, nämlich $A + B$, $A + C$ und $B + C$, weniger von einander verschieden sein werden, als die Axenfarben selbst. Aus denselben Gründen, welche oben bei den einaxigen Krystallen angeführt wurden, kann man daher mit dem Dichroskop weit geringere Grade des

Pleochroïsmus noch erkennen, als ohne dieses Instrument. Mit demselben kann man zugleich, wenn starker Pleochroïsmus vorhanden ist, sehr leicht einen einaxigen Krystall von einem zweiaxigen unterscheiden, indem bei einem der letzteren Art keine Richtung existirt, in welcher die durchgehenden Strahlen bei jeder Drehung des Krystalls zwei genau gleichgefärbte Bilder liefern, wie dies mit den der optischen Axe der ersteren parallelen Strahlen der Fall ist.

Ebenfalls auf der verschiedenen Absorption des Lichtes, dessen Schwingungen verschieden im Krystall gerichtet sind, beruht eine Methode zur Unterscheidung einaxiger von zweiaxigen Krystallen, welche man nach ihrem Entdecker die »Dove'sche Probe« genannt hat. Dieselbe ist besonders vortheilhaft zu verwenden bei gewissen Varietäten des Glimmers, deren mittlere und kleinste Elasticität ihrem Werthe nach so wenig von einander abweichen, deren Axenwinkel in Folge dessen so klein ist, dass die Lemniscaten nur schwer von Kreisen, die Krystalle im convergenten Licht also kaum von einaxigen unterschieden werden können. Bringt man eine senkrecht zur ersten Mittellinie stehende, beim Glimmer durch die Spaltbarkeit zu erhaltende Platte eines solchen Krystalls an die Stelle des Analysators im Polarisationsinstrument (mit parallelem Licht), und auf den Krystallträger ein gekühltes Glas (s. S. 117), wobei jene Platte so auf das Instrument zu legen ist, dass die parallelen Lichtstrahlen dieselbe in der Richtung der Mittellinie durchlaufen, — so würde das Interferenzbild des gekühlten Glases nicht sichtbar sein, wenn die Platte einaxig wäre, und demnach die Schwingungen aller Azimuthe gleichartig absorbirt würden, ebenso wenig, als ob eine isotrope Platte statt des Analysators verwendet worden wäre. Ist aber der Glimmer zweiaxig, wenn auch der Axenwinkel noch so klein, so wird jeder Strahl durch denselben in zwei, deren Schwingungen parallel der mittleren und der kleinsten Elasticitätsaxe stattfinden, zerlegt. Von diesen lieferte der eine, wenn er allein hindurchginge, ein Interferenzbild des gekühlten Glases, der andere, weil seine Schwingungen normal zu denen des ersteren stehen, das supplementäre Interferenzbild zu dem ersten (vgl. S. 65). Diese beiden Bilder müssten sich, wenn die beiden Schwingungen im Krystall genau die gleiche Absorption erleiden würden, vollständig aufheben; das Letztere ist aber nicht der Fall, wenn der Krystall zweiaxig ist, und wegen der verschieden starken und verschiedenfarbigen Absorption der parallel der mittleren und kleinsten Elasticitätsaxe stattfindenden Vibrationen, erscheint, wenn auch nur lichtschwach, das eine der beiden Bilder. Hierdurch ist aber die zweiaxige Natur des betreffenden Glimmers unzweifelhaft dargethan.

Was die Körperfarben der zweiaxigen Krystalle in anderen Directionen, als den drei Elasticitätsaxen betrifft, so ändern sich diese mit der Richtung ganz analog der Lichtgeschwindigkeit. Wenn die Richtung innerhalb eines der drei Hauptschnitte liegt, so ist die Farbe eine Nuance, die zwischen zwei Axenfarben liegt, nämlich denjenigen, deren Schwingungen parallel

jenem Hauptschnitt stattfinden. In einer Richtung, welche in keinen der drei Hauptschnitte fällt, zeigt der Krystall eine Absorption, welche zwischen derjenigen der drei Axenfarben, welche die grösste Verschiedenheit darstellen, liegt; es existiren also im Krystall alle möglichen Farbentinten zwischen denjenigen der drei am meisten von einander verschiedenen, daher der nicht selten gebrauchte Name »Trichroïsmus« für die Farbenerscheinungen der zweiaxigen Krystalle ebenso wenig correct ist, wie der Name »Dichroïsmus« für diejenigen der einaxigen.

§. 25. **Die Eintheilung der Krystalle nach ihren optischen Eigenschaften.** Fassen wir die Resultate unserer nunmehr gewonnenen Kenntniss von den optischen Eigenschaften der Krystalle kurz zusammen, so ergiebt sich, dass die sämmtlichen Krystalle nach jenen in drei, scharf von einander getrennte, Klassen zerfallen, deren characteristische Eigenschaften die folgenden sind:

I. Optisch isotrope Krystalle.

Gleiche optische Elasticität, folglich auch gleiche Fortpflanzungsgeschwindigkeit und gleiche Absorption des Lichtes nach allen Richtungen. Ein gewöhnlicher Lichtstrahl pflanzt sich in diesen Krystallen, wie in den amorphen Körpern, als gewöhnlicher (einfach gebrochen) fort, ein gradlinig polarisirter behält seine Polarisation ungeändert (ausser, wenn der Krystall die Eigenschaft besitzt, deren Ebene zu drehen) und wird niemals doppelt gebrochen. Daher verhält sich ein nicht circularpolarisirender, isotroper Krystall, dem polarisirten Lichte gegenüber, nach allen Richtungen wie ein amorpher Körper, und dies gilt für alle Farben.

II. Optisch einaxige Krystalle.

Die optische Elasticität ändert sich mit der Richtung, derart, dass dieselbe in einer bestimmten Richtung, der optischen Axe, am grössten oder am kleinsten ist. Im ersteren Falle nimmt sie mit der Neigung gegen jene stetig ab, und ist am kleinsten senkrecht zur Axe, und dies findet nach allen Seiten gleichartig statt. Im zweiten Falle wird die Elasticität, nach allen Seiten in derselben Weise, grösser mit wachsender Neigung und erreicht ihren grössten Werth in allen den Richtungen, welche senkrecht zur Axe stehen. Die einaxigen Krystalle verhalten sich, wie amorphe Körper, nur in einer Richtung, in derjenigen der optischen Axe; in jeder andern Richtung sind sie doppeltbrechend, und zwar um so stärker, je grösser deren Winkel mit der Axe ist. Ganz analog sind die Absorptionsverhältnisse in diesen Krystallen; ihre Farbe ist eine bestimmte in der Richtung der Axe, ändert sich stetig mit der Neigung gegen dieselbe, und ist am meisten davon verschieden senkrecht zur Axe, aber, wie die optische Elasticität und die Lichtgeschwindigkeit, gleich in allen Richtungen, welche gleichen Winkel mit der Axe einschliessen.

III. Optisch zweiaxige Krystalle.

Die optische Elasticität ändert sich mit der Richtung im Krystall, aber nach verschiedenen Seiten ungleich. Für eine Farbe stehen die Richtungen der grössten, mittleren und kleinsten Elasticität auf einander normal; in der Ebene der ersten und dritten befinden sich zwei, gegen die Elasticitätsaxen gleichgeneigte Richtungen, optische Axen, in welchen die Krystalle einfach brechend sind. Die Farbe ist nach den drei Hauptschwingungsrichtungen verschieden, in den anderen Richtungen eine zwischen jenen drei Extremen inne liegende.

Denken wir uns alle Richtungen in einem Krystall als Radien von einem Punkte ausgehend, und die Länge eines jeden proportional der Grösse der Quadratwurzel aus der optischen Elasticität in derselben Richtung, so bilden die Endpunkte aller dieser Radien eine ringsum geschlossene krumme Oberfläche, die optische Elasticitätsfläche. Bei den isotropen Krystallen sind alle Radien gleich, also ist ihre Gestalt eine Kugel. Bei den einaxigen ist es eine Rotationsfläche, entstanden durch Rotation einer ringsgeschlossenen Curve um deren grosse (positive Krystalle) oder kleine (negative Krystalle) Axe, in beiden Fällen ist die Richtung der Rotationsaxe zugleich die der optischen Axe, folglich alle senkrecht dazu stehenden Schnitte der Elasticitätsfläche Kreise sind, wie es der optischen Gleichwerthigkeit aller gleichgeneigten Richtungen, rings um die Axe, entspricht. Bei den optisch zweiaxigen Krystallen ist die Elasticitätsfläche eine durch die drei Hauptschnitte in gleiche Hälften theilbare geschlossene Fläche, deren drei, auf einander normal stehende Axen, $a > b > c$, sämmtlich ungleich sind, und welche nur nach zwei Richtungen (senkrecht zu den beiden optischen Axen) Querschnitte hat, deren Gestalt ein Kreis ist.

Für den speciellen Fall, dass zwei der Elasticitätsaxen einander gleich sind, ist die Durchschnittscurve der Fläche nach der Ebene jener beiden ein Kreis, die Fläche wird eine Rotationsfläche, d. h. es ist die Elasticitätsfläche eines einaxigen Krystalls. Ist endlich $a = b = c$, so wird sie eine Kugel, d. h. die Elasticitätsfläche eines isotropen Krystalls.

Je mehr also zwei der Grössen der Elasticitätsaxen eines zweiaxigen Krystalls sich einander nähern, desto ähnlicher werden seine optischen Eigenschaften denen eines einaxigen. Ein wirklicher Uebergang in einen einaxigen Krystall kann aber deshalb niemals stattfinden, weil das Grössenverhältniss der drei Elasticitätsaxen für die verschiedenen Farben des Lichtes ein verschiedenes ist, so dass, wenn auch zwei derselben sehr nahe, ja wenn sie auch absolut gleich sind, dasselbe doch nicht für die übrigen Farben, sondern nur für eine einzige Wellenlänge gilt, während die eigentlich einaxigen Krystalle es für das Licht jeder Wellenlänge sind. Ganz analog nähern sich die optischen Eigenschaften eines einaxigen Krystalls denen eines isotropen, je weniger die grösste und die kleinste Elasticität

desselben von einander verschieden sind, je schwächer seine Doppelbrechung ist. Ein solcher kann sogar wirklich einfach brechend sein, aber nur für eine Farbe, er ist also deshalb noch kein isotroper Krystall, denn zu dessen Wesen gehört es, dass für alle Farben die Gestalt seiner Elasticitätsfläche die einer Kugel sei.

Wenn also auch zuweilen die Unterschiede dieser drei Klassen von Krystallen so gering sind, dass es schwer ist, zu erkennen, welcher von denselben ein bestimmter Krystall angehört, so kann er doch immer nur zu einer derselben gehören, da ein Uebergang zwischen denselben aus obigen Gründen nicht existirt, da sie vielmehr drei vollkommen von einander getrennte Abtheilungen bilden.

Selbstverständlich bezieht sich dies jedoch nur auf homogene Krystalle, d. h. solche, in denen alle parallelen Richtungen, und jede derselben an jeder Stelle, optisch absolut gleichwerthig sind, deren Elasticitätsfläche, um jeden Punkt des Krystalls beschrieben, gleiche Lage, gleiche Gestalt und gleiche Grösse besitzt. Alle Krystalle, welche dieser Bedingung nicht genügen, sind nicht als einfache, sondern als aus mehreren verschiedenen zusammengesetzte Medien zu betrachten.

Die thermischen Eigenschaften der Krystalle.

§. 26. **Wärmestrahlung, Wärmeleitung.** Die Wärme kann in ihrer Beziehung zu den Krystallen in dreierlei Art zur Wirkung gelangen, nämlich entweder in der Form von Wärmestrahlen, oder als durch Leitung fortgepflanzte Wärme, oder als eine von der zweiten Art der Mittheilung der Wärme herrührende Temperaturerhöhung der Krystalle. Diese letztere ist aber stets von einer Aenderung der Dichte und damit der übrigen physikalischen Eigenschaften begleitet, und die Art und Weise, in welcher diese Aenderung bei den Krystallen stattfindet, ist von besonderer theoretischer und praktischer Wichtigkeit. Im Allgemeinen sei vorausbemerkt, dass in Bezug auf alle ihre thermischen Eigenschaften die Krystalle in genau dieselben drei Hauptabtheilungen zerfallen, wie in Bezug auf ihr optisches Verhalten, und dass die Verschiedenheiten dieser drei Klassen auch vollkommen ihren optischen Differenzen entsprechen. Wir werden daher im Folgenden die auf ihr Verhalten gegen das Licht gegründeten Namen: isotrope, einaxige und zweiaxige Krystalle, für diese drei Klassen derselben beibehalten.

a) **Wärmestrahlung.** Die Strahlen der Wärme, welche wir nach ihren Eigenschaften ebenfalls als Wellenbewegungen ansehen müssen, verhalten sich gegen die Krystalle denen des Lichtes so absolut gleich, dass auf dieses Verhalten nur ganz kurz eingegangen zu werden braucht, um so mehr, als die Methoden, welche dazu dienen, die Veränderungen der Wärmestrahlen in jenen (ihre Polarisation, ihre Interferenz u. s. f.) zu studiren, nicht ent-

fernt so leicht zu handhaben und so genau sind, wie die optischen, so dass sie nicht, wie diese, zur Unterscheidung der Krystalle praktisch benutzt werden können.

1) Isotrope Krystalle. Die Strahlen der Wärme, sowohl die mit Lichtstrahlen verbundenen, als auch die sogenannten dunklen (nicht leuchtenden), werden an der Oberfläche isotroper Krystalle theilweise reflectirt, und zwar nach demselben Gesetze, wie diejenigen des Lichtes, und theilweise gebrochen im Innern des Krystalls fortgepflanzt. Hierbei tritt nach keiner Richtung in demselben eine Doppelbrechung auf. Wir beobachten aber, wie beim Licht, dass es Wärmestrahlen von verschiedener Brechbarkeit, d. h. verschiedene Wärmefarben, giebt, und können daher ganz analog auch von einem Brechungsexponent eines Krystalls für eine bestimmte Wärmefarbe sprechen; dieser ist in einem isotropen Krystalle in allen Richtungen derselbe, d. h. die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wärmestrahlen jeder Farbe ist unabhängig von der Richtung, in welcher er sich im Krystall bewegt.

Nicht alle für das Licht durchsichtigen Körper sind es auch in gleicher Weise für die Wärmestrahlen; diejenigen, welche letztere, namentlich die sogenannten dunklen Strahlen der Wärme, ohne erhebliche Absorption hindurchlassen, nennt man diatherman oder wärmedurchsichtig. Wie die verschiedenen Farben des Lichts, so werden auch diejenigen der Wärme in den Körpern ungleich absorbirt; wenn diese Ungleichheit jedoch sehr gering ist, so werden dieselben nahe unverändert aus dem Körper austreten, gerade so, wie das weisse Licht nach dem Durchgang durch eine farblose Substanz ungefärbt ist; einen solchen Körper nennen wir wärmefarblos. Die Eigenschaft der Wärmefarblosigkeit, verbunden mit einem hohen Grade von Diathermansie oder Wärmedurchsichtigkeit besitzen nur eine kleine Anzahl von Stoffen, nämlich die Chloride des Kaliums, Natriums und Silbers, KCl, $NaCl$, $AgCl$, sowie das Sulfid des Zinks ZnS, sämmtlich zur Klasse der isotropen gehörig. Dagegen giebt es viele für das Licht sehr vollkommen farblose Körper, welche von den Wärmefarben einen Theil sehr stark absorbiren, also für letztere Art von Strahlen in ausgesprochener Weise farbig sind. Ein solcher Körper ist z. B. der Alaun $= K^2SO^4 + Al^2S^3O^{12} + 24H^2O$, dessen ebenfalls isotrope Krystalle für das Licht ganz farblos, für die Wärmestrahlen aber sehr farbig und wenig durchsichtig sind.

Wie die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, so ist auch die Absorption der Wärmestrahlen in den isotropen Krystallen nach allen Richtungen gleich.

2) Einaxige Krystalle. Die Wärmestrahlen werden in diesen genau in derselben Weise doppelt gebrochen, wie die Lichtstrahlen, und zwar sind die beiden entstehenden Strahlen senkrecht zu einander polarisirt. Nur in der Richtung der optischen Axe findet auch keine Doppelbrechung der Wärme statt. Es ist die Doppelbrechung der Wärmestrahlen und ihre Polarisation zuerst nachgewiesen an den Krystallen derselben Substanz, an welchen

wir anfangs die analogen optischen Erscheinungen erörtert haben, am Kalkspath*).

3) Zweiaxige Krystalle. Dass auch in den zweiaxigen Krystallen die Strahlen der Wärme in ganz analoger Weise doppelt gebrochen werden, wie die des Lichtes, beweist das Verhalten eines Glimmerblattes zwischen gekreuzten Nicols beim Durchgang von Wärmestrahlen. Gerade so, wie dasselbe beim Drehen vier mal hell und dunkel (jedesmal wenn einer seiner Hauptschnitte dem eines Nicols parallel) wird, so lässt dieses auch in diesen vier Stellungen keine Wärmestrahlen hindurch, die meisten bei den vier Zwischenstellungen, wenn die Hauptschnitte mit den Nicols 45° einschliessen.

b) **Wärmeleitung.** Um die Abhängigkeit, in welcher die Geschwindigkeit der Fortpflanzung der geleiteten Wärme in einem Krystall von der Richtung sich befindet, zu studiren, hat Sénarmont folgendes Verfahren angegeben: man legt auf die zu untersuchende Fläche des Krystalls ein sehr kleines Stück reinen Wachses und erwärmt jenen vorsichtig, bis das Wachs schmilzt und sich in einer dünnen Schicht auf der ganzen Fläche ausbreitet, was man durch Neigen, eventuell auch Abgiessen, unterstützen kann. Nach dem Erkalten bildet das Wachs eine dünne und matte Haut auf der Fläche. Nun erwärmt man eine kleine Stelle des Krystalls dadurch, dass man auf dieselbe entweder eine Metallspitze aufsetzt oder in eine daselbst angebrachte Durchbohrung eintreibt, und das betreffende Metallstäbchen (ein rechtwinkelig umgebogener Silberdraht eignet sich hierzu besonders) am andern Ende erhitzt, wobei man den Krystall vor directer Erwärmung seitens der Flamme schützen muss. Sobald die Spitze des Drahtes ebenfalls heiss wird, pflanzt sich die Wärme von der Berührungsstelle im Krystall nach allen Seiten fort, so dass das Wachs rings um jene schmilzt; auch nach dem Abkühlen kann man an einem feinen vorstehenden Wulst genau sehen, wie weit das Wachs rings um die Spitze geschmolzen war. Ist nun die Geschwindigkeit, mit welcher der Krystall die Wärme leitet, mit welcher sich also die zum Schmelzen des Wachses erforderliche Temperatur ausbreitet, dieselbe in allen Richtungen, welche der mit Wachs überzogenen Krystallfläche parallel gehen, so ist die Schmelzfigur ein Kreis. Pflanzt sich aber in verschiedenen jener Ebene parallelen Richtungen die Wärme verschieden schnell fort, so können die Punkte, welche gleichzeitig auf die Schmelztemperatur des Wachses erwärmt werden, nicht gleichweit von der Berührungsstelle des Drahtes entfernt sein, sondern sie müssen am weitesten abstehen in der Richtung, in welcher die Wärmeleitung am schnellsten stattfindet, am wenigsten in derjenigen, in welcher sie die langsamste ist. Diese beiden Richtungen stehen nun, wie die Beobachtung lehrt, stets senkrecht auf einander, gerade so, wie die grösste und kleinste Fortpflanzungs-

*) In Bezug auf das weitere Detail, sowie auf die Methoden zur Nachweisung der Doppelbrechung der Wärme, muss auf die ausführlicheren Lehrbücher der Physik (Jamin, Wüllner) verwiesen werden.

geschwindigkeit des Lichtes innerhalb einer Ebene. In Folge dessen ist alsdann die Schmelzfigur des Wachses stets eine Ellipse, deren grösste Axe der Richtung der grössten Leitungsfähigkeit, deren kleine derjenigen der kleinsten unter allen der Krystallfläche parallelen Richtungen entspricht.

Eine sehr sinnreiche Modification dieser Methode wurde von Röntgen (Poggend. Ann. 151. Bd., 603) angegeben. Wenn man nämlich die Krystallfläche anhaucht, so dass der Hauch dieselbe in einer gleichmässigen Schicht überzieht und auf dieselbe eine stark erwärmte Metallspitze aufsetzt, so beobachtet man, dass der Hauch um die Spitze in einer scharf begrenzten, ellipsenförmigen Figur verdunstet. Unterbricht man den Versuch und streut rasch Lycopodium auf die Platte, so haftet dieses leichte Pulver nur da, wo der Hauch noch nicht verdunstet war, und nach dem vorsichtigen Abklopfen des Krystalls wird die freigelassene elliptische Figur so scharf von dem Pulver begrenzt, dass das Verhältniss der grossen und kleinen Axe der Ellipse weit genauer gemessen werden kann, als dies bei der Sénarmont'schen Methode möglich ist.

1) Isotrope Krystalle haben in allen Richtungen gleiches Wärmeleitungsvermögen, folglich ist die isothermische Fläche (die Fläche, über welche sich eine Temperatur in einer gewissen Zeit ausgebreitet hat) auf allen Flächen, deren Richtung mag jede beliebige sein, ein Kreis.

2) Einaxige Krystalle. Bei diesen ist in der Richtung der optischen Axe die Wärmeleitung entweder am grössten, nimmt von da an nach allen Seiten gleichmässig ab und ist am kleinsten in allen Richtungen normal zur Axe, — oder sie ist am kleinsten parallel der Axe, nimmt zu mit der Neigung gegen diese und erreicht ihr Maximum in allen senkrecht zur Axe stehenden Richtungen. In beiden Fällen ist sie gleich in allen Richtungen, welche gleichen Winkel mit der optischen Axe einschliessen. In Folge dessen ist die isothermische Figur nur auf den Flächen, welche normal zur Axe stehen, kreisförmig, auf allen andern eine Ellipse, welche um so mehr von der Kreisform abweicht, je kleineren Winkel die untersuchte Fläche mit der optischen Axe bildet. Die eine der beiden Axen der Ellipse liegt stets im optischen Hauptschnitt der Platte, und zwar die grosse, wenn das Maximum des Wärmeleitungsvermögens parallel zur optischen Axe stattfindet, die kleine dagegen, wenn in dieselbe Richtung das Minimum der Leitungsfähigkeit fällt.

3) Zweiaxige Krystalle. Die Wärmeleitung findet bei diesen ebenfalls in verschiedener Richtung verschieden schnell statt; diejenige, welche dem Maximum, und die, welche dem Minimum des Leitungsvermögens entspricht, stehen normal zu einander; senkrecht zu beiden ist dasselbe ein zwischenliegendes (im Allgemeinen nicht das arithmetische Mittel), das mittlere genannt. In denjenigen zweiaxigen Krystallen, in welchen die drei Hauptschwingungsrichtungen für alle Farben des Lichtes zusammenfallen, sind denselben auch die drei Richtungen des grössten, mittleren und kleinsten Leitungsvermögens parallel, d. h. die Richtung der schnellsten Fortpflanzung

der geleiteten Wärme fällt zusammen mit der grössten, oder mit der mittleren oder mit der kleinsten Elasticitätsaxe u. s. f. Untersuchen wir also eine Platte eines solchen zweiaxigen Krystalls, welche einem optischen Hauptschnitt parallel geschnitten ist, mittelst der Sénarmont'schen oder Röntgen'schen Methode, so zeigt uns die Lage der isothermischen Figur diejenige der beiden Elasticitätsaxen an, welche der betreffenden Fläche parallel laufen, und ihre Gestalt lehrt uns, welche von beiden das grössere Wärmeleitungsvermögen besitzt.

Es liegt auf der Hand, dass diese Untersuchungsmethode zuweilen in solchen Fällen, in denen wegen der Undurchsichtigkeit der Substanz eine optische Untersuchung unmöglich ist, gute Dienste zur Unterscheidung und Bestimmung, in welche der drei Klassen ein gewisser Krystall gehöre, zu leisten im Stande ist und z. B. bei einaxigen die Lage der Axe zu erkennen gestattet.

§. 27. *c*) **Ausdehnung durch die Wärme.** Mit Ausnahme sehr weniger*) haben alle Körper in höherer Temperatur ein grösseres Volum, sie dehnen sich aus. Bestimmen wir die Länge l eines aus einem isotropen Körper, z. B. Glas, gefertigten Stabes von rectangulärem Querschnitte, bei 0°, der Temperatur des schmelzenden Eises, und seine Länge l', nachdem er auf 100°, die Wärme des siedenden Wassers, erhitzt worden ist, so finden wir, dass die durch jene Temperaturdifferenz hervorgebrachte Zunahme seiner Länge, $l' - l$, bei demselben Stoff stets in demselben Verhältniss zur Länge des Stabes steht, dass also

$$\frac{l' - l}{l}$$

eine constante Zahl ist: diese bezeichnen wir mit α und nennen sie den linearen Ausdehnungscoëfficienten des Körpers. Es ist derselbe gleich der Zunahme der Länge eines Stabes aus der betreffenden Substanz, dessen Länge bei $0^0 = 1$ ist. Ein Stab von der Länge l (bei 0°) wird also bei 100° die Länge

$$l\,(1 + \alpha)$$

haben; er wird sich aber in demselben Verhältniss in der Breite ausdehnen; ist diese bei $0^0 = b$, so ist sie bei 100°:

$$b\,(1 + \alpha)$$

endlich die Dicke bei derselben Temperatur

$$d\,(1 + \alpha),$$

*) Diese sind unter den festen Körpern der Diamant, welcher bei —42°,3, das Kupferoxydul, welches bei —4°,3, und der Smaragd, welcher bei —4°,2 die grösste Dichtigkeit haben, und sich bei weiterer Abkühlung wieder ausdehnen (Fizeau, Poggendorff's Ann. der Physik, 128. Bd.). Der merkwürdigste Körper in dieser Hinsicht ist jedoch das Jodsilber, welches sich schon bei gewöhnlicher Temperatur zusammenzieht, wenn es erwärmt wird (Fizeau, Poggendorff's Ann. d. Physik, 137. Bd.).

wenn sie bei $0^0 = d$ war. Während demnach das Volumen des Stabes bei 0^0

$$= b d l,$$

so ist es bei 100^0:

$$= b d l (1 + \alpha)^3$$
$$= b d l (1 + 3 \alpha + 3 \alpha^2 + \alpha^3).$$

Da aber α stets ein sehr kleiner ächter Bruch ist, so ist α^2 und α^3 so ausserordentlich klein, dass man es vernachlässigen und somit das Volum bei 100^0

$$= b d l (1 + 3 \alpha)$$

setzen kann. Den dreifachen linearen Ausdehnungscoëfficienten 3α nennt man den kubischen Ausdehnungscoëfficienten. Bei den Krystallen, bei denen es sich wesentlich um Gleichheit oder Verschiedenheit der linearen Ausdehnung in verschiedenen Richtungen handelt, werden wir unter »Ausdehnungscoëfficient« stets den linearen, α, verstehen.

1) Isotrope Krystalle. Der Ausdehnungscoëfficient ist in allen Richtungen in einem solchen Krystall der gleiche. Denken wir uns daher aus einem isotropen Krystall eine Kugel geschliffen, so wird diese, auf eine höhere Temperatur gebracht, einen grösseren Durchmesser erhalten, da aber jeder ihrer vorigen, einander gleichen Durchmesser um gleich viel gewachsen ist, so bleibt ihre Gestalt nach wie vor die einer Kugel, nur von grösserem Volumen. Denken wir uns aus dem isotropen Krystall einen Würfel geschnitten, so wird der Abstand der drei parallelen Flächenpaare, von welchen dieser begrenzt ist, grösser bei erhöhter Temperatur, aber bei allen in gleichem Verhältniss, folglich bleibt der Würfel sich selbst stets ähnlich, wenn sich auch seine Dimensionen sämmtlich vergrössern. Dasselbe gilt für jeden andern isotropen Körper von beliebiger Gestalt, und da bei solchen Formen, welche einander ähnlich und von ebenen Flächen begrenzt sind, wie die Krystalle, die Winkel, unter welchen sich die entsprechenden Flächen schneiden, dieselben sind, so gilt für isotrope Krystalle der Satz: die Winkel, in welchen deren Flächen zusammenstossen, sind unabhängig von der Temperatur des Krystalls.

2) Einaxige Krystalle. In solchen ist, wenn sie homogen sind, zwar in allen Linien gleicher Richtung der Ausdehnungscoëfficient derselbe, aber in verschiedenen Richtungen verschieden. Wie diese Krystalle sich in Bezug auf die optische Elasticität verhalten, so ist auch die Richtung, in welcher diese ein Maximum oder Minimum hat, d. h. die optische Axe, entweder diejenige der grössten oder der kleinsten Ausdehnung durch die Wärme.*)

In dem Falle, dass die optische Axe die Richtung des grössten Aus-

*) Hierbei ist keineswegs bei allen Krystallen, bei denen die optische Axe die der grössten Elasticität ist, dieselbe auch die der grössten Ausdehnung durch die Wärme, sondern es kann auch die der kleinsten sein.

dehnungscoëfficienten ist, nimmt dieser mit der Neigung gegen jene ab, und zwar nach allen Seiten in gleicher Weise, so dass er für alle Richtungen, welche gleiche Winkel mit der Axe bilden, gleich gross ist, und erreicht sein Minimum in allen Richtungen, welche normal zu derselben stehen. Denken wir uns also von einem derartigen einaxigen Krystall, dessen Temperatur 0° ist, eine Kugel geschliffen, und diese auf 100° erwärmt, so sind alsdann ihre Durchmesser nicht mehr gleich, sondern derjenige, welcher der optischen Axe parallel ist, hat die grösste Zunahme seiner Länge erfahren, die übrigen eine um so geringere, je grösser ihre Neigung gegen die Axe ist, diejenigen, welche normal dazu stehen, die geringste. Bei einer höheren Temperatur verwandelt sich die Kugel in ein Rotationsellipsoid, eine Oberfläche, welche entsteht, wenn man eine Ellipse, deren grosse Axe der optischen parallel ist, um diese rotiren lässt. Es giebt Krystalle, und zu diesen gehört z. B. der Kalkspath, welche sich in der Axe verhältnissmässig stark ausdehnen, senkrecht dazu jedoch eine schwache Zusammenziehung erleiden, wobei aber das gesammte Volumen bei der Temperaturerhöhung zunimmt. Da hier der Ausdehnungscoëfficient in der Axe positiv, senkrecht dazu negativ, so muss es eine bestimmte Neigung dazwischen geben, in welcher er = 0 ist; ein Stab, in dieser Richtung aus Kalkspath geschnitten, ändert also seine Länge nicht, wenn sich seine Temperatur ändert.*)

Ist jedoch die optische Axe die Richtung des kleinsten Ausdehnungscoëfficienten durch die Wärme, so nimmt dieser mit der Neigung gegen jene stetig zu und ist am grössten senkrecht dazu, selbstverständlich gleich nach allen Seiten rings um die Axe. Eine Kugel, bei niedrigerer Temperatur aus einem solchen Krystall geschliffen, wird bei höherer plattgedrückt werden in der Richtung der optischen Axe, sie wird sich in ein Rotationsellipsoid verwandeln, entstanden durch Rotation einer Ellipse um ihre kleine Axe, welche der optischen parallel ist.

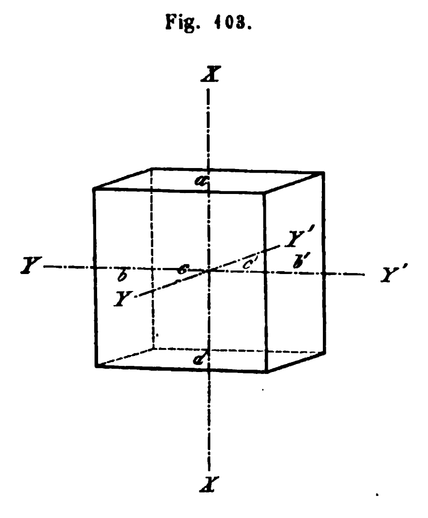
Denken wir uns nunmehr einen einaxigen Krystall der ersten Art, statt von einer Kugelfläche, begrenzt von einem Würfel, d. h. von drei Paar paralleler Flächen, welche gleichweit von einander abstehen, und dessen vier in Fig. 103 vertical gestellte Kanten der optischen Axe des Krystalls parallel sind. Nennen wir die beiden Punkte auf gegenüber liegenden Flächen, deren Verbindungslinie die Normale des Flächenpaares ist, entsprechende Punkte, so liegt auf der Hand, dass alle Geraden zwischen je zwei einander entsprechenden Punkten der horizontalen Flächen a und a' der optischen Axe parallel sind, also sämmtlich denselben Ausdehnungscoëfficienten durch die Wärme haben, und zwar den grössten, welcher mit

*) Der Ausdehnungscoëfficient des Kalkspaths parallel der Axe ist = 0,00293, derjenige senkrecht dazu = —0,00049, eine bei 0° hergestellte Kalkspathkugel ist also bei 100° ein Rotationsellipsoid, dessen Axen sich verhalten, wie

$$0{,}99951 : 1{,}00293$$
$$= 1 : 1{,}00342.$$

α bezeichnet werden soll. Der Würfel sei nun hergestellt bei 0°, so dass bei dieser Temperatur alle seine Kanten die Länge s haben, so ist dies auch die Grösse des Abstandes der gegenüber liegenden Flächenpaare, also der Abstand je zweier entsprechender Punkte. Wird nun der Würfel seiner ganzen Masse nach gleichmässig auf 100° erwärmt, so dehnen sich alle Geraden zwischen entsprechenden Punkten der Flächen a und a' soweit aus, dass nunmehr ihre Länge $= s(1 + \alpha)$ beträgt; dies ist also jetzt der Abstand der oberen Fläche a von der unteren a', und da nach Obigem alle Geraden gleiche Ausdehnung erfahren, so müssen die Flächen a und a' in ihrer neuen Lage nicht nur einander, sondern auch ihrer früheren parallel bleiben. Die Geraden zwischen entsprechenden Punkten der Flächen b und b' erfahren ebenfalls sämmtlich gleiche Ausdehnung während der Temperaturerhöhung um 100°, da sie alle normal zur Axe sind, aber ihr Ausdehnungscoëfficient ist der kleinste, den wir mit β bezeichnen wollen, also wird ihre Länge bei 100° $= s(1 + \beta)$ sein, und die beiden Flächen b und b' ebenfalls einander und ihrer früheren Lage parallel bleiben, aber den Abstand $s(1 + \beta)$ besitzen. Alle normal zum dritten Flächenpaar, c und c', stehenden Geraden zwischen entsprechenden Punkten dehnen sich um ebenso viel aus, als die letzterwähnten, da sie ebenfalls normal zur optischen Axe sind, also ist bei 100° der Abstand der einander und der früheren Lage parallelen Flächen c und $c' = s(1 + \beta)$. Daraus geht hervor, dass der horizontale Querschnitt bei einer Temperaturerhöhung zwar an Fläche grösser wird, aber stets die Gestalt eines Quadrats beibehält, dagegen die verticalen Flächen mehr in der Höhe als in der Breite wachsen, also sich in Rechtecke verwandeln. Da alle Richtungen normal zur Axe gleiche Ausdehnung erfahren, so können die Geraden zwischen entsprechenden Punkten der Seitenflächen jede beliebige Richtung innerhalb der senkrecht zur Axe stehenden Ebene haben, d. h. die beiden Flächenpaare bb' und cc' können ebenfalls jede beliebige Richtung sonst haben, wenn sie nur der optischen Axe parallel sind, so werden sie bei erhöhter Temperatur nur eine parallele Verschiebung erlitten haben. Dasselbe muss aber auch für jedes beliebige andere Flächenpaar, welches der Axe parallel ist, also z. B. für $DD'EE'$ Fig. 104 und die derselben parallele Fläche gelten, denn deren entsprechende Punkte, paarweise mit einander verbunden, liefern Gerade, welche ebenfalls alle zur Axe normal sind, also den Ausdehnungscoëfficienten β besitzen, folglich verschiebt sich die Fläche $DD'EE'$ und ihre parallele Ebene durch

Fig. 103.



die Erwärmung des Krystalls so, dass beide einander und ihrer früheren Lage parallel bleiben, d. h. dass das Verhältniss

$$AD : AE$$

unverändert bleibt, oder, was dasselbe bedeutet, dass die Winkel, unter welchen $DD'EE'$ die Flächen b und c schneidet, keine Aenderung erfahren.

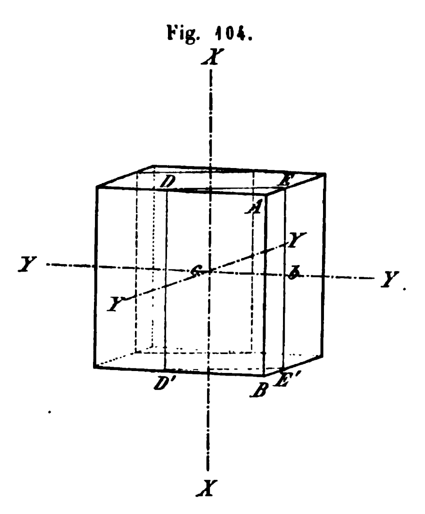


Fig. 104.

Denken wir uns dagegen an dem Würfel eine Ebene von der Lage $MNOP$ Fig. 105, und deren Parallelfläche $M'N'O'P'$ angeschliffen, und alsdann den Krystall von 0° auf 100° erwärmt. Sei die Länge AM bei der ersteren Temperatur $= m$, $AP = p$, so ist offenbar $\frac{m}{p}$ die Tangente des Winkels, welche $MNOP$ mit der Fläche b (= vorige Figur) einschliesst (bei 0°). Nach dem Erwärmen ist die erstere Länge, weil sie normal zur Axe ist, $= m(1 + \beta)$, die zweite, weil sie der optischen Axe parallel ist, $= p(1 + \alpha)$ geworden, also ist bei 100° die Tangente des Winkels zwischen b und $MNOP$

$$= \frac{m(1+\beta)}{p(1+\alpha)} = \frac{m}{p} \cdot \frac{1+\beta}{1+\alpha};$$

da aber $\alpha > \beta$, der zweite Bruch also ein echter ist, so ist dieser Werth kleiner, als $\frac{m}{p}$, und da der kleineren Tangente ein kleinerer Winkel entspricht, so folgt daraus, dass die Ebene $MNOP$ die Würfelfläche b unter spitzerem Winkel durchschneidet, dass sie eine steilere Lage hat, als bei 0°. Bei letzterer Temperatur ist $M'C : P'C$ ebenfalls $= \frac{m}{p}$, und da $M'C \parallel AM$, $P'C \parallel AP$, so wird das Verhältniss dieser Längen bei 100°, wie das entsprechende der Parallelfläche,

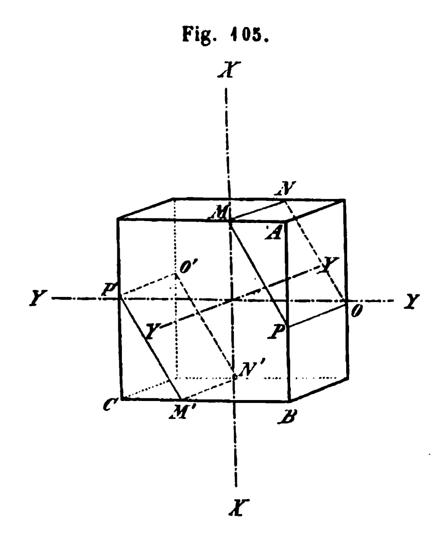


Fig. 105.

$$\frac{m}{p} \cdot \frac{1+\beta}{1+\alpha},$$

d. h. die beiden Flächen $MNOP$ und $M'N'O'P'$ sind auch bei der höheren Temperatur einander parallel, aber nicht mehr ihrer früheren Lage, denn

sie schneiden nunmehr die der optischen Axe parallele Fläche *b* des Würfels unter einem kleineren Winkel. Da nun die ganze soeben angestellte Betrachtung für jedes mögliche Längenverhältniss $\frac{m}{p}$ gilt, da ferner die verticalen Würfelflächen im Krystall jede beliebige Richtung haben können, so lange sie der Axe parallel sind, so ist das Gleiche der Fall für jede nach irgend einer Seite schief gegen die optische Axe geneigte Fläche Es folgt hieraus der Satz: An einem optisch einaxigen Krystall, dessen Axe die Richtung der grössten Ausdehnung durch die Wärme ist, bleiben bei steigender Temperatur alle Flächen, welche parallel oder normal zu jener Richtung sind, sich selbst parallel, alle unter schiefen Winkeln dagegen geneigte Flächen indess nehmen eine steilere Lage an (wenn man sich die optische Axe vertical gestellt denkt). Dabei bleiben alle parallelen Flächenpaare es auch bei allen Temperaturen.

Genau dieselben Betrachtungen, angestellt in Betreff eines solchen einaxigen Krystalls, welcher sich parallel der Axe am wenigsten, senkrecht dazu am stärksten ausdehnt, bei welchem also ein Würfel beim Erwärmen in der Breite mehr zunimmt, als in der Höhe, weil $\alpha < \beta$, also der für eine schräggeneigte Fläche in Betracht kommende Bruch $\frac{1+\beta}{1+\alpha}$ ein unächter ist, führen uns zu dem Resultat: Bei denjenigen einaxigen Krystallen, welche parallel der Axe den kleinsten Ausdehnungscoëfficienten haben, bleiben ebenfalls alle Flächen, welche die Winkel 0° und 90° mit der optischen Axe bilden, beim Erwärmen sich selbst parallel, dagegen alle unter anderen Winkeln gegen jene geneigten Flächen nehmen eine weniger steile Lage an, wobei alle parallelen Flächenpaare nach wie vor parallel bleiben.

Da bei beiden Arten von einaxigen Krystallen der Ausdehnungscoëfficient in allen Richtungen, welche denselben Winkel mit der optischen Axe bilden, der gleiche ist, so ist die durch Erwärmung hervorgebrachte Aenderung der Neigung gegen jene für alle Flächen, welche denselben Winkel mit ihr einschliessen, genau gleich. Bilden also mehrere Flächen mit der optischen Axe denselben Winkel, so bilden sie bei jeder andern Temperatur ebenfalls gleiche Winkel mit jener, deren Werth jedoch grösser oder kleiner ist, je nachdem der Krystall in der Richtung der Axe den kleinsten oder grössten Ausdehnungscoëfficienten besitzt. So haben wir z. B. S. 40 in dem Rhomboëder des Kalkspaths eine Krystallform kennen gelernt, deren drei obere und die drei, jenen parallelen, unteren Flächen gleiche Neigung gegen die optische Axe besitzen; in Folge dessen sind die Winkel, in welchen die Flächen an den drei, oben im Punkte *a* Fig. 31 sich schneidenden Kanten zusammentreffen, alle drei gleich, nämlich 105° 4′ bei 10°; da der Kalkspath, wie wir S. 135 sahen, zu den

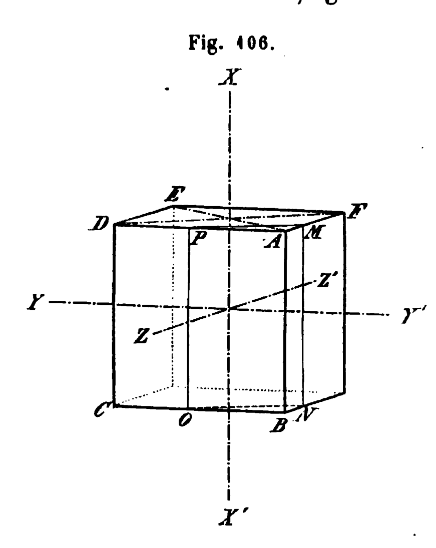
Krystallen gehört, welche sich in der Richtung der Axe am stärksten ausdehnen, so müssen beim Erwärmen die oben in *a* zusammenstossenden Flächen gleichmässig eine steilere Lage annehmen, jene drei Kantenwinkel also kleiner werden. Sie betragen in der That bei 110°, also nach einer Temperaturerhöhung um 100° nur noch 104° 56, und durch diese Aenderung hat Mitscherlich zuerst entdeckt, dass die Winkel der einaxigen Krystalle, mit Ausnahme derjenigen zwischen solchen Flächen, die normal oder parallel zur Axe sind, ihrer Grösse nach von der Temperatur des Krystalls abhängig sind.

3) Zweiaxige Krystalle. Auch bei diesen sind die Ausdehnungscoëfficienten in verschiedenen Richtungen verschieden, daher die Neigungswinkel der Krystallflächen mit der Temperatur veränderlich. Da aber alle einander parallelen Richtungen im Krystall sich gleich stark ausdehnen, so müssen zwei parallele Flächen, ihre Lage mag sein, welche sie wolle, auch bei jeder andern Temperatur parallel sein, wenn sie auch eine andere Neigung gegen die übrigen Flächen angenommen haben. - Es folgt dies, wie bei den einaxigen Krystallen, daraus, dass die Geraden zwischen entsprechenden Punkten derselben gleiche Richtung haben, folglich alle entsprechenden Punkte der einen von denen der anderen Ebene beim Erwärmen um gleich viel abrücken. Wir haben bei den in Rede stehenden Krystallen, wie in optischer Beziehung, drei Hauptrichtungen oder thermische Axen zu unterscheiden, diejenige der grössten, die der mittleren und die der kleinsten linearen Ausdehnung durch die Wärme. Die Ausdehnungscoëfficienten nach diesen drei Richtungen sollen resp. mit α, β, γ bezeichnet werden.

Am einfachsten gestalten sich die thermischen Verhältnisse bei denjenigen optisch zweiaxigen Krystallen, bei denen die Richtungen der grössten, mittleren und kleinsten Elasticität des Aethers für die verschiedenen Farben zusammenfallen. Für diese sind nämlich denselben drei Richtungen auch diejenigen mit den Ausdehnungscoëfficienten α, β und γ parallel, so dass mit einer der drei optischen Elasticitätsaxen die Richtung der stärksten thermischen Ausdehnung, mit einer zweiten die der mittleren, mit der dritten endlich die der kleinsten Ausdehnung zusammenfällt. Denken wir uns bei 0° aus einem zweiaxigen Krystall eine Kugel vom Durchmesser d geschliffen, so wird dieselbe diese Gestalt nicht mehr besitzen, wenn sie auf eine höhere Temperatur gebracht wird, sondern ihre Oberfläche wird eine Gestalt annehmen, deren Durchmesser nach der Richtung der grössten Ausdehnung $= d(1 + \alpha)$, nach derjenigen der kleinsten $= d(1 + \gamma)$ und senkrecht zu diesen beiden $= d(1 + \beta)$ ist. Der Durchschnitt dieser Form nach den drei zu einander senkrechten thermischen Hauptschnitten, d. h. den Ebenen, welche durch je zwei der Hauptrichtungen der thermischen Ausdehnung bestimmt sind, ist eine Ellipse, aber in jedem derselben eine solche von anderer Form. Die Kugel verwandelt sich durch die Erwärmung in ein sogenanntes dreiaxiges Ellipsoid.

Wenn man aus einem zweiaxigen Krystall, wiederum bei 0^0, einen Würfel herstellt, dessen Kanten sämmtlich die Länge s haben, und von denen vier der Richtung der grössten, vier derjenigen der mittleren und vier der Richtung der kleinsten Ausdehnung parallel sind, und diesen auf 100^0 erwärmt, so muss sich der Abstand desjenigen Flächenpaares, welches normal zu den erstbezeichneten vier Kanten steht, um αs, der des zweiten um βs, endlich der Abstand des dritten Flächenpaares um γs vergrössern, Die Kantenlängen sind jetzt $s(1+\alpha)$, $s(1+\beta)$, $s(1+\gamma)$ geworden, es fragt sich aber, ob die, vorher rechten, Winkel, unter denen sich die Flächen schneiden, noch die gleichen sind. Denkt man sich eine der Würfelflächen, z. B. $ADEF$ Fig. 106, welche bei 0^0 die Gestalt eines Quadrats mit der Seite s hat, und parallel der mittleren YY' und kleinsten Ausdehnung ZZ' sei (die Richtung der grössten XX' stehe in der Figur vertical), so sind deren Diagonalen AE und DF Richtungen, welche mit derjenigen der mittleren Ausdehnung gleiche Winkel bilden. Da nun der Ausdehnungscoëfficient in der Ebene $YY'ZZ'$, von der Richtung YY' aus nach beiden Seiten hin, gleichmässig abnimmt, bis er senkrecht zu jener, in der Richtung ZZ' sein Minimum erreicht, so müssen jene beiden Diagonalen AE und DF genau denselben Ausdehnungscoëfficienten besitzen, also bei allen Temperaturen gleich lang bleiben; das Quadrat $ADEF$ verwandelt sich bei 100^0 demnach in ein Rechteck mit den Seiten $s(1+\beta)$ und $s(1+\gamma)$. Wie leicht einzusehen, gilt die analoge Betrachtung, wenn man Y oder Z mit X vertauscht, auch für die anderen Flächen und daraus folgt der Satz: Die drei auf einander senkrechten Flächen eines jeden zweiaxigen Krystalls, deren Durchschnittsrichtungen parallel den drei Richtungen der grössten, mittleren und kleinsten Ausdehnung durch die Wärme sind, schneiden sich bei allen Temperaturen unter rechten Winkeln.

Fig. 106.



Es ist unschwer, nachzuweisen, dass diese drei Ebenen die einzigen sind, deren gegenseitige Neigung unabhängig von der Temperatur ist.

Sei $MNOP$ Fig. 106 eine Ebene, welche einer der thermischen Axen (in unserem Beispiel XX') parallel ist, mit den beiden anderen beliebige Winkel bildet; derjenige Winkel v, in welchem sich bei 0^0 $MNOP$ mit $ABCD$ schneidet, ist bestimmt durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} v = \frac{AM}{AP} .$$

und, wenn wir $AM = m$, $AP = p$ setzen, durch

$$\operatorname{tg} v = \frac{m}{p}$$

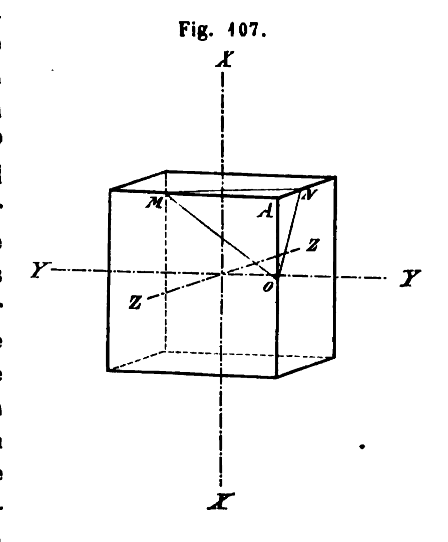
Wird der Krystall auf 100° erwärmt, so dehnen sich die beiden Längen m und p ungleich stark aus; die erstere, parallel ZZ', erhält die Länge $m(1+\gamma)$, die letztere, parallel YY, wird $p(1+\beta)$; der Winkel der Flächen $MNOP$ mit $ABCD$ wird nunmehr gegeben sein durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} v' = \frac{m}{p} \cdot \frac{1+\gamma}{1+\beta}$$

Da $\frac{1+\gamma}{1+\beta}$ ein ächter Bruch ist, muss $v' < v$ sein; durch die Temperaturerhöhung ist der Winkel v, d. i. zugleich derjenige, welchen $MNOP$ mit der Ebene der thermischen Axen XX', YY' bildet, kleiner geworden. Verallgemeinert folgt hieraus der Satz: Alle Krystallflächen zweiaxiger Krystalle, welche einer thermischen Axe parallel, also normal zu einem thermischen Hauptschnitt sind, bleiben es zwar bei allen Temperaturen, aber ihre gegenseitigen Neigungen, sowie die Winkel, welche sie mit den beiden andern thermischen Hauptschnitten bilden, sind beim Erwärmen veränderlich in der Weise, dass sie nach der Seite des relativ grösseren Ausdehnungscoëfficienten hin spitzer, die Supplementwinkel, welche nach der Seite der kleineren Ausdehnung hin liegen, um eben so viel stumpfer werden.

Betrachten wir endlich eine Fläche MNO Fig. 107, welche keiner der thermischen Axen parallel ist, so wird deren Lage gegen jene offenbar gegeben durch das Verhältniss der Längen $AM = m$, $AN = n$ und $AO = o$. Diese drei Längen dehnen sich aber sämmtich verschieden aus, denn sie werden nach einer Temperaturerhöhung um 100° sein: $m(1+\beta)$, $n(1+\gamma)$ und $o(1+\alpha)$. Da α, β, γ von einander verschieden sind, so ist das die Lage der Fläche bestimmende Verhältniss $AM : AN : AO$ bei höherer Temperatur ein anderes als bei niederer, die Ebene MNO ändert also beim Erwärmen ihre Neigung gegen alle drei thermischen Axen. Da wir über die Lage der in Rede stehenden Fläche keine besondere Voraussetzung gemacht haben, so ergiebt sich hieraus, dass bei einem zweiaxigen Krystall die Neigungswinkel aller Flächen gegen

Fig. 107.



einander, welche keiner der thermischen Axen parallel sind, sich mit der Temperatur ändern.

Aus Vorstehendem ersieht man, dass nur die an isotropen Krystallen bei einer bestimmten Temperatur gemessenen Krystallwinkel für alle andern Gültigkeit haben, während die Messung der Neigung zweier ebenen Flächen eines ein- oder zweiaxigen Krystalls im Allgemeinen nur für die Temperatur richtig ist, welche der Krystall hatte, als die Messung stattfand. Es ist indess der Einfluss derjenigen Temperaturdifferenzen, wie sie in Beobachtungsräumen vorzukommen pflegen, auf die Krystallwinkel in den meisten Fällen geringer, als der Grad der Genauigkeit der Messung selbst beträgt. Es ist also nur bei sehr genauen Messungen die Temperatur während derselben mit in Rechnung zu ziehen.

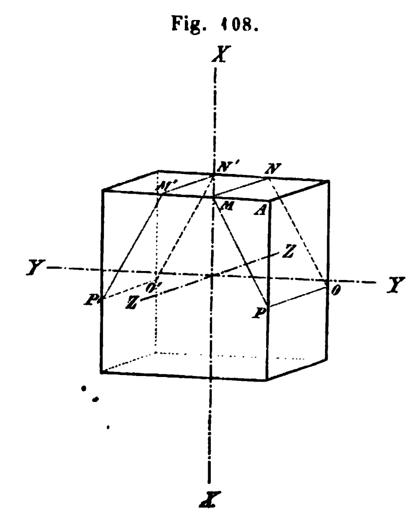
Aus der Eigenschaft der doppeltbrechenden Krystalle, dass ihre Krystallwinkel Functionen der Temperatur sind, ergiebt sich unmittelbar eine Methode zur Bestimmung der Ausdehnungscoëfficienten, nämlich mittelst der Winkeländerungen beim Erwärmen. Seien an einem einaxigen Krystall zwei gegen die optische Axe gleichgeneigte Ebenen $MNOP$ und $M'N'O'P'$ Fig. 108 (welche genau der Fig. 105 entspricht) vorhanden, und werde deren Winkel φ bei einer bestimmten niedrigen Temperatur gemessen, so ist offenbar $\frac{1}{2}\varphi = APM$, also

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varphi = \frac{AM}{AP}.$$

Sei der Winkel zwischen jenen beiden Flächen bei einer um 100° höheren Temperatur $= \varphi'$ gefunden, so ist nach S. 137

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varphi' = \frac{AM(1+\beta)}{AP(1+\alpha)}.$$

Fig. 108.



Diese Gleichung in die obere dividirt, liefert

$$(1) \qquad \frac{1+\alpha}{1+\beta} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi'}.$$

Wir besitzen hierdurch, nach der Messung von φ und φ', eine Relation zwischen α und β, welche uns zwar das Verhältniss derselben, die relativen Ausdehnungscoëfficienten, nicht aber deren absolute Werthe erkennen lässt. Hierzu ist es nöthig, noch die Volumvermehrung desselben Körpers bei der gleichen Temperaturerhöhung zu bestimmen. Haben wir einen Würfel mit den Kantenlängen s bei der niedrigeren Temperatur so hergestellt, dass vier

seiner Flächen der optischen Axe parallel sind, so ist dessen Volumen V

$$V = s^3$$

Sei sein Volumen V' in der um 100° höheren Temperatur gemessen worden; dieses ist

$$V' = s^3 (1 + \alpha)(1 + \beta)^2.$$

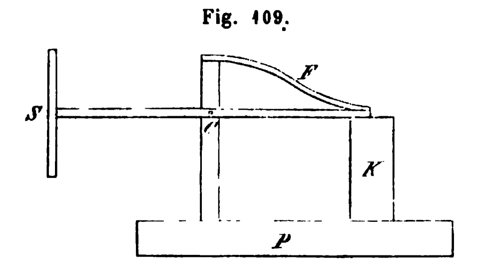
Diese Gleichung durch die vorhergehende dividirt, giebt

$$(1 + \alpha)(1 + \beta)^2 = \frac{V'}{V} \tag{2}$$

Aus den beiden Gleichungen (1) und (2) kann man die Ausdehnungscoëfficienten α, denjenigen parallel der optischen Axe, und β, den senkrecht dazu, berechnen. Auf diese Weise hat Mitscherlich die S. 135 angeführten Werthe der Ausdehnungscoëfficienten des Kalkspaths bestimmt. Da jedoch hierbei der Krystall von unten her erwärmt wurde, ist keine Sicherheit dafür gegeben, dass er in allen Theilen dieselbe und constante Temperatur besitzt. Genauer kann man jedenfalls die relativen Ausdehnungscoëfficienten bestimmen, wenn man bei der Winkelmessung den Krystall mit heisser Luft von derselben constanten Temperatur umgiebt, wie es bei einer Methode geschieht, welche im III. Theil beschrieben werden soll.

Directe Bestimmungen dieser beiden Zahlen sind ausgeführt worden von Pfaff (Poggendorff's Ann. d. Physik, 104. und 107. Bd.), welcher die Krystalle nach verschiedenen Richtungen auf eine Platte P Fig. 109 brachte, so dass der Krystall K oben von einem in C drehbaren Hebel berührt wurde, den eine Feder F schwach andrückte; an dem anderen Ende dieses Hebels befand sich ein Spiegel S, in welchem mittelst eines Fernrohrs eine entfernte Skala abgelesen wurde. Dehnte sich nun der Krystall durch die Erwärmung aus, so wird der ihn berührende Hebelarm gehoben, der andere gesenkt, so dass im Spiegel ein anderer Skalentheil abgelesen wird. Aus der Länge des Hebelarmes, der Entfernung des Spiegels von der Skala und der Differenz der beiden Ablesungen kann alsdann die Grösse der Ausdehnung des Krystalls berechnet werden.

Fig. 109.



Bei weitem die genaueste Methode jedoch zur directen Bestimmung der absoluten Ausdehnungscoëfficienten ist diejenige von Fizeau.*) Der Apparat besteht zunächst in einem Dreifuss von Platin, dessen Füsse in Spitzen nach oben endigen, auf welche eine planparallele Glasplatte horizontal aufgelegt ist. Zwischen diesen Füssen auf einer ebenfalls horizontalen Fläche des Dreifusses befindet sich der zu untersuchende Krystall mit einer ebenen

*) Poggendorffs Ann. d. Physik, 128. Bd.

wenn sie bei $0^0 = d$ war. Während demnach das Volumen des Stabes bei 0^0

$$= bdl,$$

so ist es bei 100^0:

$$= bdl\,(1 + \alpha)^3$$
$$= bdl\,(1 + 3\,\alpha + 3\,\alpha^2 + \alpha^3).$$

Da aber α stets ein sehr kleiner ächter Bruch ist, so ist α^2 und α^3 so ausserordentlich klein, dass man es vernachlässigen und somit das Volum bei 100^0

$$= bdl\,(1 + 3\,\alpha)$$

setzen kann. Den dreifachen linearen Ausdehnungscoëfficienten $3\,\alpha$ nennt man den **kubischen Ausdehnungscoëfficienten**. Bei den Krystallen, bei denen es sich wesentlich um Gleichheit oder Verschiedenheit der linearen Ausdehnung in verschiedenen Richtungen handelt, werden wir unter »Ausdehnungscoëfficient« stets den linearen, α, verstehen.

1) **Isotrope Krystalle.** Der Ausdehnungscoëfficient ist in allen Richtungen in einem solchen Krystall der gleiche. Denken wir uns daher aus einem isotropen Krystall eine Kugel geschliffen, so wird diese, auf eine höhere Temperatur gebracht, einen grösseren Durchmesser erhalten, da aber jeder ihrer vorigen, einander gleichen Durchmesser um gleich viel gewachsen ist, so bleibt ihre Gestalt nach wie vor die einer Kugel, nur von grösserem Volumen. Denken wir uns aus dem isotropen Krystall einen Würfel geschnitten, so wird der Abstand der drei parallelen Flächenpaare, von welchen dieser begrenzt ist, grösser bei erhöhter Temperatur, aber bei allen in gleichem Verhältniss, folglich bleibt der Würfel sich selbst stets ähnlich, wenn sich auch seine Dimensionen sämmtlich vergrössern. Dasselbe gilt für jeden andern isotropen Körper von beliebiger Gestalt, und da bei solchen Formen, welche einander ähnlich und von ebenen Flächen begrenzt sind, wie die Krystalle, die Winkel, unter welchen sich die entsprechenden Flächen schneiden, dieselben sind, so gilt für isotrope Krystalle der Satz: **die Winkel, in welchen deren Flächen zusammenstossen, sind unabhängig von der Temperatur des Krystalls.**

2) **Einaxige Krystalle.** In solchen ist, wenn sie homogen sind, zwar in allen Linien gleicher Richtung der Ausdehnungscoëfficient derselbe, aber in verschiedenen Richtungen verschieden. Wie diese Krystalle sich in Bezug auf die optische Elasticität verhalten, so ist auch die Richtung, in welcher diese ein Maximum oder Minimum hat, d. h. die optische Axe, entweder diejenige der grössten oder der kleinsten Ausdehnung durch die Wärme.*)

In dem Falle, dass die optische Axe die Richtung des grössten Aus-

*) Hierbei ist keineswegs bei allen Krystallen, bei denen die optische Axe die der grössten Elasticität ist, dieselbe auch die der grössten Ausdehnung durch die Wärme, sondern es kann auch die der kleinsten sein.

dehnungscoëfficienten ist, nimmt dieser mit der Neigung gegen jene ab, und zwar nach allen Seiten in gleicher Weise, so dass er für alle Richtungen, welche gleiche Winkel mit der Axe bilden, gleich gross ist, und erreicht sein Minimum in allen Richtungen, welche normal zu derselben stehen. Denken wir uns also von einem derartigen einaxigen Krystall, dessen Temperatur 0° ist, eine Kugel geschliffen, und diese auf 100° erwärmt, so sind alsdann ihre Durchmesser nicht mehr gleich, sondern derjenige, welcher der optischen Axe parallel ist, hat die grösste Zunahme seiner Länge erfahren, die übrigen eine um so geringere, je grösser ihre Neigung gegen die Axe ist, diejenigen, welche normal dazu stehen, die geringste. Bei einer höheren Temperatur verwandelt sich die Kugel in ein Rotationsellipsoid, eine Oberfläche, welche entsteht, wenn man eine Ellipse, deren grosse Axe der optischen parallel ist, um diese rotiren lässt. Es giebt Krystalle, und zu diesen gehört z. B. der Kalkspath, welche sich in der Axe verhältnissmässig stark ausdehnen, senkrecht dazu jedoch eine schwache Zusammenziehung erleiden, wobei aber das gesammte Volumen bei der Temperaturerhöhung zunimmt. Da hier der Ausdehnungscoëfficient in der Axe positiv, senkrecht dazu negativ, so muss es eine bestimmte Neigung dazwischen geben, in welcher er = 0 ist; ein Stab, in dieser Richtung aus Kalkspath geschnitten, ändert also seine Länge nicht, wenn sich seine Temperatur ändert.*)

Ist jedoch die optische Axe die Richtung des kleinsten Ausdehnungscoëfficienten durch die Wärme, so nimmt dieser mit der Neigung gegen jene stetig zu und ist am grössten senkrecht dazu, selbstverständlich gleich nach allen Seiten rings um die Axe. Eine Kugel, bei niedrigerer Temperatur aus einem solchen Krystall geschliffen, wird bei höherer plattgedrückt werden in der Richtung der optischen Axe, sie wird sich in ein Rotationsellipsoid verwandeln, entstanden durch Rotation einer Ellipse um ihre kleine Axe, welche der optischen parallel ist.

Denken wir uns nunmehr einen einaxigen Krystall der ersten Art, statt von einer Kugelfläche, begrenzt von einem Würfel, d. h. von drei Paar paralleler Flächen, welche gleichweit von einander abstehen, und dessen vier in Fig. 103 vertical gestellte Kanten der optischen Axe des Krystalls parallel sind. Nennen wir die beiden Punkte auf gegenüber liegenden Flächen, deren Verbindungslinie die Normale des Flächenpaares ist, entsprechende Punkte, so liegt auf der Hand, dass alle Geraden zwischen je zwei einander entsprechenden Punkten der horizontalen Flächen a und a' der optischen Axe parallel sind, also sämmtlich denselben Ausdehnungscoëfficienten durch die Wärme haben, und zwar den grössten, welcher mit

*) Der Ausdehnungscoëfficient des Kalkspaths parallel der Axe ist = 0,00298, derjenige senkrecht dazu = — 0,00049, eine bei 0° hergestellte Kalkspathkugel ist also bei 100° ein Rotationsellipsoid, dessen Axen sich verhalten, wie

$$0{,}99951 : 1{,}00298$$
$$= 1 : 1{,}00842.$$

dergleichen Richtungen auch die Aenderung der optischen Elasticität durch die Wärme die gleiche sein muss, sei es, dass sie mit der Temperatur wächst oder abnimmt. Ein bei einer Temperatur einaxiger Krystall bleibt es also auch bei jeder andern; und das bestätigen die Beobachtungen an allen in ihrem Verhalten gegen die Wärme untersuchten, zahlreichen Krystallen. Da die Ausdehnung senkrecht zur optischen Axe einen andern Werth hat, als parallel derselben, so ist auch die Aenderung, welche die optische Elasticität durch die Erwärmung in der ersteren, von derjenigen, welche sie in der letzteren Richtung erfährt, mehr oder weniger verschieden, d. h. bei einer höheren Temperatur wird die Differenz seiner optischen Elasticität parallel und senkrecht zur Axe, welche wir die Stärke seiner Doppelbrechung nannten, grösser oder kleiner. Ist das letztere der Fall und die Doppelbrechung schon bei gewöhnlicher Temperatur sehr schwach, so giebt es eine solche, bei welcher der Krystall für eine Farbe gleiche Geschwindigkeit des ordentlichen und des ausserordentlichen Strahls besitzt, aber eben nur für eine bestimmte Wellenlänge, wodurch er nicht aufgehört hat, ein einaxiger Krystall zu sein.

Die Interferenzerscheinungen der einaxigen Krystalle können also durch eine gleichmässige Temperaturerhöhung keine andere Aenderung erfahren, als solche, die aus einer Aenderung der Brechungsexponenten und der doppeltbrechenden Kraft folgen. Es werden demnach die von einer normal zur Axe geschnittenen Platte hervorgebrachten Farbenringe entweder enger oder weiter werden, sonst aber keine Aenderung erleiden.

3) Zweiaxige Krystalle. In diesen Krystallen ist die Ausdehnung durch die Wärme eine andere in der Richtung der grössten, in derjenigen der mittleren und der der kleinsten optischen Elasticität; folglich erleiden die drei Hauptbrechungsindices ungleiche Aenderungen, wenn der Krystall auf eine höhere Temperatur gebracht wird, wie dies direct durch Messungen Rudberg's am Aragonit nachgewiesen worden ist. Auf indirectem Wege ist der Beweis dafür jedoch schon an zahlreichen zweiaxigen Substanzen geführt worden. Wenn nämlich die drei Hauptbrechungsexponenten durch die Erwärmung ungleich geändert werden, so ändert sich auch ihr Verhältniss zu einander; von diesem hängt aber die Grösse des optischen Axenwinkels ab, es muss also auch dieser eine Function der Temperatur sein, d. h. grösser oder kleiner werden, wenn der Krystall erwärmt wird.

Um dies zu constatiren, muss man die §. 20 beschriebene Methode mit einer solchen Aenderung anwenden, dass sich bei der Messung des Axenwinkels der Krystall in einer constanten höheren Temperatur befindet. Dies geschieht dadurch, dass man zwischen die Sammellinse und das Objectiv des horizontalen Polarisationsinstrumentes einen nach beiden Seiten weit hervorragenden Metallkasten einschiebt, in dessen Vorder- und Hinterwand je eine planparallele Glasplatte eingefügt ist, so dass man wie vorher durch das Instrument das Licht fallen lassen kann. Ist der Krystall nun zwischen diesen beiden Glasplatten, im Innern des Kastens, centrirt und drehbar be-

festigt, und die Luft in dem letzteren erhitzt und durch längere Zeit hindurch auf constanter (durch eingesetzte Thermometer gemessener) Temperatur gehalten, wodurch also auch die Krystallplatte in allen ihren Theilen dieselbe angenommen hat, so ergiebt die Messung, ganz ebenso angestellt, wie bei gewöhnlicher Temperatur, die jener entsprechende Grösse des Axenwinkels.

Die Bestimmung des Winkels der optischen Axen bei verschiedenen Temperaturen mittelst eines derartigen Erhitzungsapparates (dessen Einrichtung im III. Abschnitt eingehender beschrieben werden soll) hat nun gezeigt, dass in der That sich dessen Grösse bei allen untersuchten Körpern*) mit der Temperatur ändert, bei einigen so wenig, dass der Unterschied kaum durch die Messung constatirt werden konnte, bei der grössten Zahl um mehrere Grade bei einer Erwärmung auf 100°, während es endlich auch Krystalle giebt, deren optischer Axenwinkel sich schon bei geringerer Erwärmung um viele Grade ändert. Unter diesen befindet sich z. B. der Gyps, dessen Axenwinkel beim Erwärmen so rasch abnimmt, dass er schon bei einer noch unter 100° C. befindlichen Temperatur gleich Null wird, so dass bei einem gewissen Wärmegrade der kleinste Brechungsexponent für eine bestimmte Farbe gleich dem mittleren wird. Der Krystall ist dann einaxig, aber natürlich wegen der Dispersion der Axen bei einer Temperatur nur für eine Farbe, nicht für die übrigen; während ein eigentlicher einaxiger Krystall es bekanntlich für alle Farben und für alle Temperaturen ist. Wird ein Gypskrystall nun noch weiter erwärmt, so dass der vorher kleinste Brechungsexponent noch weiter zunimmt, demnach grösser wird, als der vorher mittlere, so ist nun die optische Axenebene senkrecht zu ihrer vorigen Lage, d. h. die optischen Axen gehen bei weiterer Erwärmung in der normalen Ebene auseinander, und man sieht leicht ein, dass die Axen für diejenige Farbe, für welche vorher deren Winkel den kleinsten Werth hatte, nunmehr den grössten Winkel, verglichen mit dem der anderen Farben, einschliessen.

Bei manchen Substanzen, deren optischer Axenwinkel eine beträchtliche Aenderung durch die Temperatur erleidet, beobachtet man die Erscheinung (Descloizeaux, Poggendorff's Ann. 119. Bd., S. 481), dass die Krystalle nach dem Abkühlen nicht mehr genau ihre früheren optischen Eigenschaften annehmen, sondern permanent gewordene Aenderungen des optischen Axenwinkels zurückbleiben. Wahrscheinlich erklären sich diese Phänomene durch das Entstehen innerer Spannungen bei der Abkühlung von einer beträchtlich höheren Temperatur, welche mit einer erheblichen Ausdehnung des Körpers verbunden war. Die Krystalle des Feldspaths, bei welchen die Erscheinung besonders deutlich auftritt, zeigen sie nämlich nur dann, wenn sie bis zu schwacher Rothgluth erhitzt worden sind. Ist eine solche permanente Aenderung eingetreten, so hat der Krystall dabei noch die Fähig-

*) Diese Untersuchungen sind namentlich von Descloizeaux angestellt worden.

keit behalten, temporäre Aenderungen des optischen Axenwinkels zu erleiden, nur dass dieser natürlich bei einer bestimmten Temperatur sich um so viel weniger ändern kann, wie vorher, als der Betrag der entstandenen permanenten Aenderung ausmacht.

Die magnetischen und elektrischen Eigenschaften der Krystalle.

§. 29. **Magnetische Eigenschaften der Krystalle.** Wenn man ein aus einem amorphen Körper, z. B. Glas, gefertigtes Stäbchen horizontal drehbar zwischen die beiden Pole eines Magneten*) an einem dünnen verticalen Faden (z. B. einem Coconfaden) aufhängt, so erhält dasselbe selbst eine Art Polarität, so dass seine beiden Enden entweder von den beiden Magnetpolen angezogen oder beide von diesen abgestossen werden. In ersterem Falle, welcher z. B. eintritt, wenn das Stäbchen aus eisenhaltigem Glase besteht, suchen sich beide Enden den Magnetpolen so sehr als möglich zu nähern, d. h. das Stäbchen dreht sich, bis es genau mit seiner Längsaxe in der Verbindungslinie der Magnetpole (der magnetischen Axe) steht; die angenommene Stellung, in welcher es verharrt, da in dieser offenbar seine Enden den Polen am nächsten stehen, nennt man deshalb die axiale Stellung. Besteht das Stäbchen dagegen aus eisenfreiem Glase, so werden seine Enden von beiden Polen des Magneten gleich stark abgestossen, dasselbe kann sich also nur in derjenigen Stellung in Ruhe befinden, in welcher beide Enden die grösstmögliche Entfernung von den Polen haben. Dies ist offenbar dann der Fall, wenn die Längsrichtung normal zur magnetischen Axe ist, das Stäbchen dreht sich also in der horizontalen Ebene, bis es quer gegen jene Axe steht; diese Stellung nennt man die äquatoriale.

Nach diesem Verhalten werden alle Substanzen in zwei Klassen eingetheilt, von denen man diejenigen, welche von den Magnetpolen angezogen werden, die paramagnetischen, die davon abgestossenen die diamagnetischen nennt. Hängt man eine aus irgend einem amorphen Stoffe, sei es ein para- oder ein diamagnetischer, gefertigte Kugel genau in die Mitte zwischen zwei Magnetpole, so wird dieselbe in jeder Lage in Ruhe bleiben, da sie sich in allen ihren Durchmessern gleichartig verhält, diese aber gleich lang sind, folglich sämmtlich gleichen Grad der Polarität annehmen. Es ist hierbei also keine Ursache zu einer Drehung vorhanden.

Anders verhalten sich dagegen im Allgemeinen die Krystalle, deren Magnetismus oder Diamagnetismus nämlich ebenso von der Richtung in den-

*) Man wählt hierzu einen Electromagneten, bestehend aus zwei von dem galvanischen Strome umflossenen verticalen Eisencylindern, welche unten durch ein horizontales Eisenstück zu einem Hufeisen verbunden sind, und oben in zwei einander zugekehrte Spitzen endigen, deren Abstand nur so gross ist, dass das horizontale Stäbchen eben noch zwischen denselben schwingen kann.

selben abhängig ist, als die übrigen physikalischen Eigenschaften. Sie zerfallen auch hierbei wieder in dieselben drei, getrennt zu behandelnden Klassen:

1) Die isotropen Krystalle haben nach allen Richtungen gleichen Grad des Para- oder des Diamagnetismus, folglich verhalten sie sich genau wie amorphe Körper, d. h. eine Kugel nimmt zwischen den Polen keine bestimmte Stellung an. Um zu bestimmen, ob die Substanz para- oder diamagnetisch ist, genügt es also, ein Stäbchen aus derselben in irgend einer Richtung herauszuschneiden, zwischen die Magnetpole zu hängen und zu beobachten, ob es sich axial oder äquatorial einstellt.

2) Die einaxigen Krystalle haben in der Richtung der Axe den stärksten Para- oder Diamagnetismus, senkrecht dazu (nach allen Seiten gleich) den geringsten, oder umgekehrt ist die eine oder die andere Eigenschaft in der ersteren Richtung im Minimum, in der letzteren im Maximum. Eine Kugel, aus einem einaxigen Krystall geschnitten, wird also nur dann zwischen den Polen eines Magneten in jeder Stellung in Ruhe bleiben, wenn sie so aufgehängt wird, dass sie sich nur um ihre optische Axe drehen kann, weil dann alle in der horizontalen Drehungsebene liegenden Richtungen gleichwerthig sind. Wird sie dagegen so aufgehängt, dass die Axe in der Drehungsebene liegt, so wird sie stets eine ganz bestimmte Einstellung annehmen. Es stellt sich nämlich die Richtung ihrer optischen Axe,

A) wenn der Krystall paramagnetisch ist, und *a*) seine Axe der Richtung des stärksten Magnetismus entspricht, axial; *b*) wenn dabei seine Axe das Minimum des Magnetismus zeigt, äquatorial;

B) wenn der Krystall diamagnetisch ist, und *a*) in der Axe den stärksten Diamagnetismus zeigt, äquatorial; *b*) wenn er aber parallel der Axe am schwächsten diamagnetisch ist, axial.

Ganz ebenso verhält sich ein aus dem Krystall geschnittener Würfel, dessen drei Flächenpaare genau gleichen Abstand haben, und deren eine normal zur optischen Axe ist, wenn derselbe so aufgehängt wird, dass die optische Axe sich in der horizontalen Ebene befindet.

3) Die zweiaxigen Krystalle haben, wenn sie ihrer ganzen Masse nach paramagnetisch sind, eine Richtung des stärksten, eine des mittleren und eine des schwächsten Magnetismus; die diamagnetischen ebenso des grössten, mittleren und kleinsten Diamagnetismus; daher ein solcher Krystall, in Kugelform gebracht, wenn er in einer beliebigen Richtung aufgehängt wird, stets eine bestimmte Einstellung annimmt, derart, dass sich unter allen in der Drehungsebene liegenden Richtungen diejenige des relativ stärksten Magnetismus oder schwächsten Diamagnetismus axial stellt.

Bei denjenigen optisch zweiaxigen Körpern, deren optische Elasticitätsaxen für alle Farben zusammenfallen, sind denselben auch die drei magnetischen Axen, d. h. die Richtung des grössten, mittleren und kleinsten Para- oder Diamagnetismus parallel. Wenn man also aus einem solchen einen Würfel schneidet, dessen Flächen den drei optischen Hauptschnitten parallel

sind, und denselben so aufhängt, dass ein Flächenpaar der horizontalen Drehungsebene parallel ist, so stellt er sich zwischen den Magnetpolen stets so ein, dass eines der beiden anderen Flächenpaare axial, das dritte äquatorial wird, und zwar nimmt dasjenige die erstere Stellung an, dessen Normale schwächeren Para- oder stärkeren Diamagnetismus hat, als die Normale zum dritten Flächenpaar. Hängt man nun den Würfel ein ander Mal so auf, dass eine andere Elasticitätsaxe vertical ist, so wird die Einstellung lehren, welche der beiden, alsdann horizontalen Elasticitätsaxen grösseren Para- oder Diamagnetismus besitzt. Hierdurch ist nunmehr bestimmt, welche der drei magnetischen Axen die des grössten, mittleren oder kleinsten Para- oder Diamagnetismus ist. (Ausführlicheres vergl. in: Grailich und v. Lang, Orientirung der magnetischen Verhältn. in Kryst. pp. Sitz.-Ber. d. Wiener Akad. 32. Bd. S. 43, 1858.)

§. 30. **Electrische Eigenschaften der Krystalle.** Wie sich die drei Arten der Krystalle in magnetischer Beziehung unterscheiden, so ist mit Sicherheit eine analoge Verschiedenheit derselben in ihrem Verhalten zur Electricität anzunehmen, z. B. verschiedene Leitungsfähigkeit nicht isotroper in verschiedenen Richtungen u. s. f. Es ist jedoch noch kein experimenteller Nachweis dieses Verhaltens geführt worden, und würde dasselbe auch schwerlich in praktischer Beziehung, zur Unterscheidung der verschiedenen Klassen von Krystallen, von Wichtigkeit sein, ebenso wenig, wie es wegen der experimentellen Schwierigkeiten der Methode die magnetischen Eigenschaften sind. Für jenen Zweck sind in erster Linie nur die optischen Verhältnisse brauchbar, und in einzelnen Fällen das Verhalten der Krystalle bei ihrer Ausdehnung durch die Wärme.

Es giebt indess einige electrische Eigenschaften gewisser Krystalle, welche für die physikalische Krystallographie von Interesse sind, weil sie im Zusammenhange mit bestimmten Ausbildungsarten der Krystallform jener Körper stehen.

Die erste derselben ist die Pyroëlectricität, d. h. die Eigenschaft gewisser Krystalle, während einer Temperaturänderung an beiden Enden entgegengesetzte freie Electricität zu zeigen. Zeigt ein solcher Krystall an einem Ende positive, am andern negative Electricität, während er erwärmt wird, so wird das erstere negativ, das letztere positiv electrisch, während er sich abkühlt. So lange ein solcher Krystall constante Temperatur hat, zeigt er keine Polarität, diese ist dagegen um so stärker, je schneller seine Temperaturänderung vor sich geht.

Während sich die vorige Eigenschaft nur bei nichtmetallischen Körpern, welche den galvanischen Strom nicht leiten, vorfindet, zeigen einige metallische Stoffe dagegen ein eigenthümliches Verhalten in thermoëlectrischer Beziehung. Man nennt bekanntlich einen galvanischen Strom, welcher entsteht, wenn die Berührungsstelle zweier Metalle, z. B. Antimon und Wismuth, die ausserdem noch durch einen guten metallischen Leiter, z. B. einen Kupferdraht, mit einander verbunden sind, erwärmt wird, einen thermo-

ëlectrischen Strom. Bei den beiden genannten Metallen bewegt sich der Thermostrom an der Berührungsstelle vom Wismuth zum Antimon hin, man nennt daher das Antimon thermoëlectrisch positiv gegen das Wismuth; ersteres ist, wenn auch in verschiedenem Grade (d. h. einen stärkeren oder schwächeren Strom liefernd), positiv gegen alle einfachen Metalle, das Wismuth negativ gegen alle übrigen. Einige Metallverbindungen, z. B. der Eisenkies, *Fe* S^2, verhalten sich nun derart, dass gewisse Krystalle derselben selbst gegen Antimon noch positiv, andere selbst gegen Wismuth noch thermoëlectrisch negativ sind, so dass zwei derart entgegengesetzte Krystalle, bei gleicher chemischen Beschaffenheit, einander berührend und an der Berührungsstelle erwärmt, einen kräftigeren Thermostrom liefern, als Antimon und Wismuth.

§. 31. **Zusammenhang der physikalischen Eigenschaften der Krystalle.** Die verschiedenen physikalischen Eigenschaften der krystallisirten Substanzen stehen in einem bestimmten gesetzmässigen Zusammenhang mit einander. Wir sahen, dass nach jeder der betrachteten Eigenschaften die gesammten Krystalle in drei, scharf von einander geschiedene Klassen zerfallen, und dass die Unterschiede dieser Klassen in jedem Falle ganz analoge sind. Jener Zusammenhang besteht nun darin, dass die Eintheilung der einzelnen Substanzen in jene Klassen für alle Eigenschaften identisch ist, so dass ein Krystall, welcher in optischer Beziehung z. B. zur zweiten Klasse (den einaxigen) gehört, in Bezug auf alle übrigen physikalischen Eigenschaften der, jener entsprechenden, und keiner andern Klasse, angehört. Haben wir also für irgend eine Eigenschaft die Zugehörigkeit eines Krystalls zu einer bestimmten Abtheilung erkannt, so ist damit diejenige, welcher er in Bezug auf seine übrigen physikalischen Eigenschaften angehört, zugleich mit bestimmt. Die Krystalle zerfallen also überhaupt nach ihrem physikalischen Verhalten in drei Klassen, welche wir mit ihren wichtigsten Unterschieden im Folgenden noch einmal übersichtlich zusammenstellen wollen:

I. Isotrope Krystalle.

Fortpflanzung des Lichtes und der Wärme nach allen Seiten gleich; Ausdehnung durch die Wärme, magnetische Eigenschaften u. s. w. ebenfalls dieselben in allen Richtungen.

II. Einaxige Krystalle.

Krystalle mit einer besonders ausgezeichneten Richtung, der physikalischen Hauptaxe, in welche entweder die grösste oder die kleinste optische Elasticität, das Maximum oder das Minimum der Wärmeleitung, der Ausdehnung durch die Wärme, des Para- oder Diamagnetismus u. s. f. fällt, während alle mit ihr gleichen Winkel einschliessenden Richtungen physikalisch gleichwerthig sind.

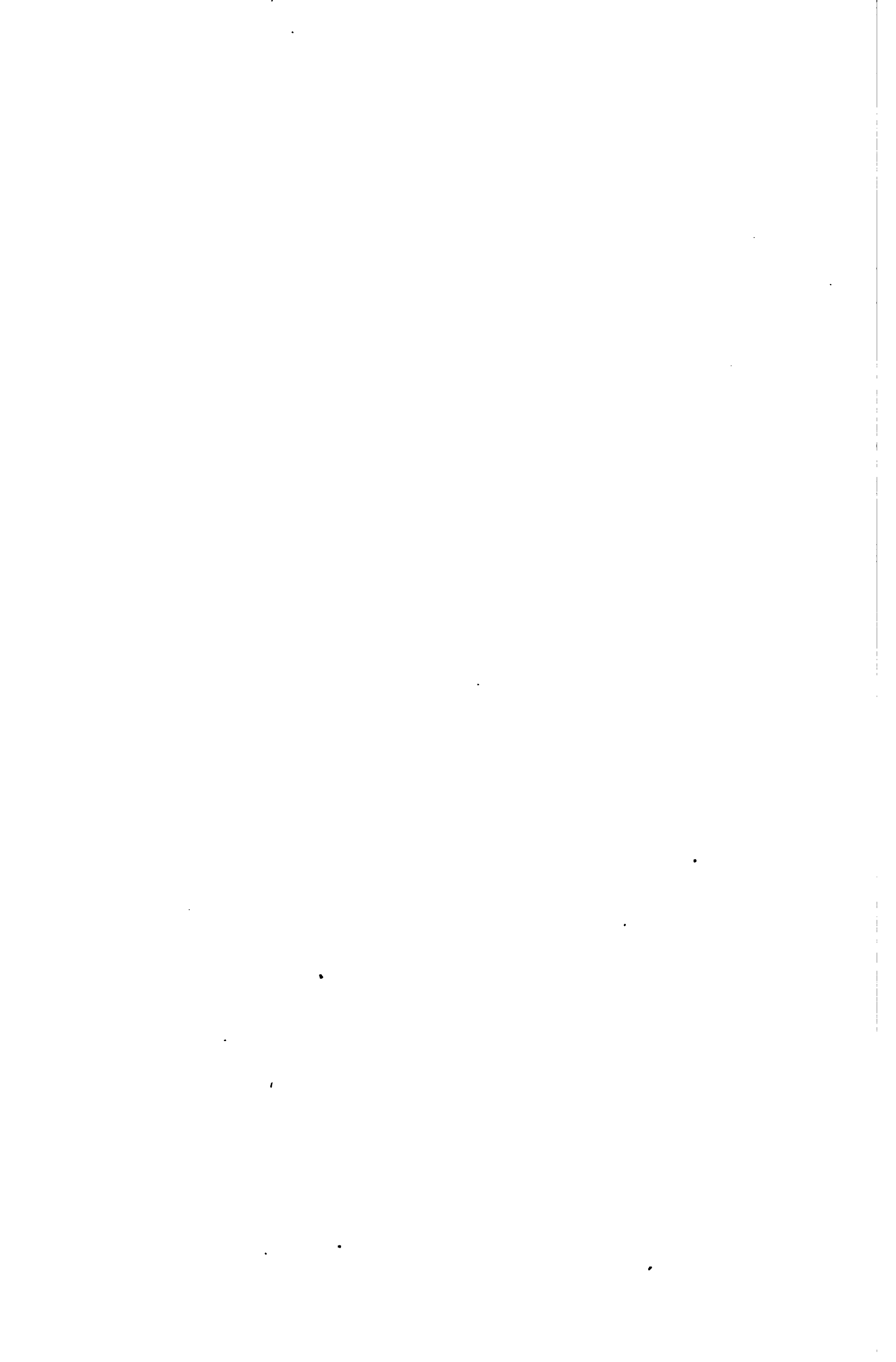
III. Zweiaxige Krystalle.

Während bei den isotropen Krystallen drei auf einander senkrechte Richtungen physikalisch gleichwerthig sind, bei den einaxigen zwei, welche normal zur Axe stehen, die dritte (die Axe) davon verschieden, — so sind bei den zweiaxigen alle drei ungleich. Im einfachsten Fall sind drei auf einander senkrechte Richtungen vorhanden, denen die Hauptschwingungsrichtungen für alle Farben des Lichtes parallel sind; alsdann fallen mit denselben auch die Richtungen des grössten, mittleren und kleinsten Wärmeleitungsvermögens, der thermischen Ausdehnung, des Para- oder Diamagnetismus u. s. f. zusammen. Dies ist jedoch nur für einen Theil der zweiaxigen Krystalle der Fall, bei einem andern fällt nur eine jener drei Hauptrichtungen für die verschiedenen physikalischen Eigenschaften in dieselbe Richtung, bei den übrigen endlich haben dieselben eine völlig von einander unabhängige Lage im Krystall.

Im folgenden Abschnitt werden wir nun erfahren, dass alle Krystalle in Bezug auf ihre Krystallformen ebenfalls in drei, vollkommen mit jenen drei identische, Klassen zerfallen, und hierauf beruht es, dass wir durch die Bestimmung der Zugehörigkeit eines Krystalls zu einer gewissen Klasse in physikalischer Beziehung, zugleich auch erkannt haben, in welche Abtheilung er seiner geometrischen Form nach gehört.

II. ABTHEILUNG.

DIE GEOMETRISCHEN EIGENSCHAFTEN DER KRYSTALLE.

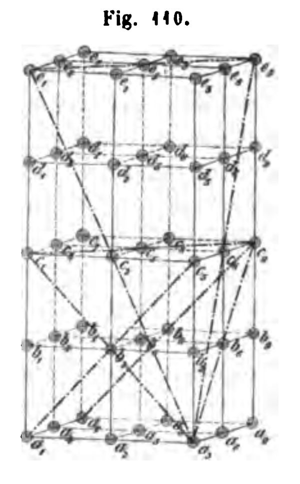


§. 32. **Einleitung.** Die nunmehr als bekannt vorausgesetzten physikalischen Eigenschaften der Krystalle führen uns zu der Vorstellung, dass letztere aus der regelmässigen Aneinanderlagerung kleinster Theile (Krystallmoleküle) der betreffenden, den Krystall bildenden Substanz bestehen, wobei die Lagerung derart ist, dass sie um jedes Theilchen in gleicher Weise stattfindet, d. h. dass in allen parallelen Geraden, sie mögen, durch welche Punkte des Krystalls sie wollen, gehen, die Vertheilung der Massentheilchen die gleiche ist. Es folgt dies unmittelbar aus der Eigenschaft der Krystalle, in allen parallelen Richtungen das gleiche physikalische Verhalten zu zeigen. Eine solche regelmässige Anordnung der Krystallmoleküle ist aber nur dann möglich, wenn folgende Bedingung erfüllt ist: es müssen nach zahlreichen Richtungen Ebenen durch den Krystall gelegt gedacht werden können, in deren jeder die darin liegenden Massentheilchen in netzförmiger Anordnung vertheilt sind, und in allen einander parallelen Ebenen dieser Art muss diese Vertheilung gleichartig sein. Alsdann können wir uns das ganze Aggregat von Massentheilchen, d. h. den Krystall, nach sehr verschiedenen, aber durch die Lagerung der Theilchen vollkommen bestimmten*) Richtungen in gleichartige ebene Schichten zerlegt denken.

---

*) Davon kann man sich am leichtesten eine Vorstellung verschaffen, wenn man sich die regelmässigste Anordnung solcher Massenpunkte denkt, welche möglich ist, nämlich diejenige, nach welcher dieselben die Eckpunkte von Würfeln bilden, wie z. B. die 8 Punkte $a_1a_2a_4a_5b_1b_2b_4b_5$ Fig. 110. Hier sind alle Schichten gleichartig, welche der Ebene $a_1a_3a_7a_9$ parallel sind, da in diesen sämmtlich die Theilchen quadratisch angeordnet erscheinen, ebenso alle Schichten, welche der Ebene $a_1a_7c_3c_9$ parallel sind, in welcher die Theilchen die Eckpunkte gleichgrosser Rectangeln mit den Seiten 1 (wenn der kleinste Abstand zweier Theilchen gleich 1 ist) und $\sqrt{2}$ darstellen; ferner sind gleichartig alle Schichten parallel der Ebene $a_3c_1c_9$, denn in allen sind die Theilchen Eckpunkte gleichseitiger Dreiecke, deren Seiten $= \sqrt{2}$; gleichartig sind alle Schichten parallel der Ebene durch $a_3c_2e_1e_5e_9c_8$, denn deren Theilchen bilden die Eckpunkte von Rhomben, deren Gestalt gleich $a_3c_2e_5c_8$ ist, u. s. f. Weiteres s. in der interessanten Abhandlung von Sohnke, über die Anordnung der Moleküle in Krystallen, Poggendorff's Ann. 132. Bd.

Fig. 110.



Das Wachsthum eines Krystalls, z. B. wenn sich ein solcher aus einer Auflösung absetzt, geschieht aber in der Weise, dass sich an alle vorhandenen Theilchen, von diesen in bestimmter Richtung angezogen, neue gleichartig anlagern, so dass alle gleichzeitig angelagerten Schichten des Krystalls auch gleiche Lagerung ihrer Theilchen besitzen. Ist aber die Lagerung der Theilchen in solchen Schichten eine gleichartige, so müssen sie ebene sein; hört also zu einer bestimmten Zeit aus irgend einer Ursache (Mangel an weiterer, noch aufgelöster Substanz, Entfernung des Krystalls aus der Auflösung oder dergl.) das Fortwachsen des Krystalls auf, so muss derselbe nach jener Seite hin mit einer ebenen Fläche endigen, deren Richtung in einer bestimmten Abhängigkeit von der Art der Lagerung der Krystallmoleküle steht. Diese letztere ist aber nur die Folge der anziehenden und abstossenden Kräfte, welche zwischen den Theilchen wirken, d. h. von der Natur dieser Theilchen. So führt uns das physikalische Verhalten der Krystalle zu einer Vorstellung über die Art ihrer Zusammensetzung aus kleinsten Theilchen, welche uns vollständig darüber Rechenschaft giebt, warum ein Krystall nach dem Aufhören seines Wachsthums von ebenen Flächen begrenzt erscheint, deren Richtung in bestimmtem Zusammenhang mit der Natur seiner Substanz steht.

Die Begrenzung eines Krystalls nach einer oder mehreren Richtungen kann auch durch einen andern festen Körper bedingt sein, bis an dessen Oberfläche sich das Wachsthum des Krystalls fortgesetzt hat. Dann ist seine Begrenzung nach dieser Seite hin selbstverständlich von der Gestalt und zufälligen Lage jenes Körpers abhängig, kann also auch in keinem gesetzmässigen Zusammenhang mit der Natur derjenigen Substanz, welche den Krystall bildet, stehen. Einen Krystall, welcher nach allen Seiten von ebenen Flächen begrenzt ist, welche die letztere Bedingung erfüllen, nennt man einen vollständig ausgebildeten Krystall, und diese allein können es sein, mit denen sich die Krystallographie beschäftigt. Die Richtung dieser ebenen Flächen, welche man Krystallflächen nennt, ist von der Natur der Moleküle des Krystalls, also von der chemischen Zusammensetzung der Substanz desselben, abhängig; sie muss also eine andere sein, wenn die chemische Natur eines Krystalls eine andere ist, d. h. jeder chemischen Verbindung muss eine bestimmte Krystallform zukommen, wobei unter »Krystallform« die Gesammtheit aller der Ebenen zu verstehen ist, welche wir uns durch die kleinsten Theilchen gelegt denken können, so dass jede parallele Ebene, durch ein beliebiges anderes Theilchen gelegt, die übrigen in gleicher Vertheilung enthält. Von dieser »Krystallform« eines Körpers hängen nun aber, wie in diesem Abschnitt eingehend gezeigt werden soll, die physikalischen Eigenschaften seiner Krystalle ab, so dass jene als die wichtigste seiner Eigenschaften erscheint, besonders deshalb, weil es die Krystallform ist, durch welche wir am sichersten zwei einander ähnliche, ihrer chemischen Natur nach jedoch verschiedene Körper von einander unterscheiden können.

Denken wir uns einen Krystall nur aus einer Art von Schichten sich aufbauend, und bleiben wir zunächst bei dem einfachsten in Fig. 110 dargestellten Beispiele der Vertheilung der Moleküle stehen, in welchen sie die Eckpunkte von Würfeln bilden. Hier giebt es offenbar dreierlei Ebenen, in welchen die Punkte quadratisch vertheilt liegen, das sind 1) diejenigen, welche der horizontalen Unter- oder Oberfläche aller jener Würfel parallel sind, 2) die der nach vorn gekehrten verticalen, und 3) der den nach rechts und links gewendeten Seitenflächen parallelen. Diese drei Arten von Ebenen stehen sämmtlich auf einander senkrecht. Findet nun die Anlagerung neuer Theilchen an die zuerst sich ausscheidenden nur in solchen Schichten statt, welche jenen drei Ebenen parallel sind, so muss ein Würfel entstehen, sobald nämlich nach allen sechs Seiten sich solche Schichten anlegen, also ein ringsum ausgebildeter Krystall entstehen kann. Wie viele solche Schichten sich bilden, d. h. welche Dimensionen der entstehende Krystall erhält, dies hängt offenbar ab von der Quantität der zur Anlagerung disponiblen Materie, von der Zeit, während welcher das Wachsthum stattfand u. s. f., d. h. von äusseren Umständen, welche an und für sich in keiner Beziehung zur chemischen Natur des Stoffes, aus welchem der Krystall sich bildet, stehen.

Dies ist aber nicht nur der Fall mit der Grösse des Krystalls überhaupt, sondern auch mit seiner Ausdehnung nach verschiedenen Richtungen. Damit sich an einen in der Bildung begriffenen würfelförmigen Krystall auf allen sechs Flächen stets in gleicher Zeit gleich dicke Schichten absetzen, dazu würde eine so gleichmässige Zufuhr des Stoffes von allen Seiten nöthig sein, wie sie in Wirklichkeit nicht stattfindet. Es würde daher ein besonderer Zufall sein, wenn ein Krystall jener Gestalt nach allen drei, auf seinen Flächen normal stehenden Richtungen gleich schnell wachsen würde. Der allgemeine Fall ist vielmehr, dass dies mehr oder weniger ungleich stattfindet, so dass an dem fertigen Krystall der Abstand der beiden parallelen Flächen jedes der drei Flächenpaare ein verschiedener ist. Die Gestalt der Flächen ist alsdann nicht die von Quadraten, sondern von Rechtecken, von denen je zwei an einander stossende verschiedenes Längenverhältniss ihrer Seiten haben. Nichts desto weniger nennen wir in der Krystallographie eine solche Form einen »Würfel«; während dieser in der Stereometrie definirt wird als ein von sechs Quadraten umschlossener Raum, ist ein Würfel in krystallographischem Sinne ein von drei parallelen Flächenpaaren, welche einander unter rechten Winkeln durchschneiden, umschlossener Raum. Wie weit jedes dieser Flächenpaare von einander absteht, d. h. wie breit, lang und hoch der Würfel ist, ob diese Dimensionen nahe gleich oder sehr verschieden sind, ob der Würfel z. B. die Form eines langen, äusserst dünnen rectangulären Stäbchens besitzt, Alles dies ist nur von den äusseren Umständen bei der Bildung des Krystalls abhängig, also für die Betrachtung ganz irrelevant, da es mit der Natur des Krystalls Nichts zu thun hat. Da jede Fläche in diesem Beispiel stets eine Würfelfläche bleibt, welchen Ab-

stand sie auch von ihrer gegenüberliegenden parallelen habe, so folgt aus der bisherigen Betrachtung allgemein, dass eine Krystallfläche ihren krystallographischen Character nicht ändert, wenn wir sie uns parallel sich selbst verschoben denken.

Aus den physikalischen Eigenschaften und der aus diesen gefolgerten Art der Zusammensetzung der Krystalle aus kleinsten Theilchen (Molekulartheorie) haben wir also geschlossen, dass bei einem Krystall die Flächen im Allgemeinen nicht gleichen Abstand von irgend einem Punkte desselben haben können, dass dagegen dieselben Arten von Flächen stets dieselbe Richtung haben, d. h. dieselben Winkel mit einander einschliessen müssen. Dies bestätigt denn die Erfahrung vollkommen; die Krystalle einer Substanz von gleicher Form haben die mannigfaltigsten Dimensionen nach den verschiedenen Richtungen, so dass die gleichartigen Flächen die verschiedenste Grösse und Gestalt haben, während Eines immer constant bleibt; dies sind die Winkel, unter welchen sich die Flächen schneiden. Diese letzteren sind es daher auch allein, welche die Krystallform bestimmen, alles andere ist nur von zufälligen Umständen abhängig, welche bei der Bildung des Krystalls stattfanden. Die Ungleichheit der Dimensionen der Krystalle nach verschiedenen Richtungen hat man fälschlicherweise mit dem Namen Verzerrung belegt, ob es gleich der eigentlich normale Fall der Ausbildung eines Krystalls ist, während es als ein besonderer Zufall betrachtet werden muss, wenn einmal ein solcher sich ausbildet, bei welchem alle gleichartigen Flächen genau gleich gross sind. Die Verschiedenheit von deren Grösse und Gestalt bedingt im Anfang eine Schwierigkeit beim Studium der Krystallographie, welche durch Uebung im Erkennen möglichst »verzerrter« Krystalle so bald als thunlich überwunden werden muss. Haben wir eine solche Form vor uns, so müssen wir uns deren Flächen sämmtlich parallel sich selbst so weit verschoben denken, bis sie alle gleichweit von einem beliebig gewählten Punkte des Krystalls, welcher dann dessen Mittelpunkt wird, abstehen, und erhalten hierdurch das geometrische Ideal der Form.

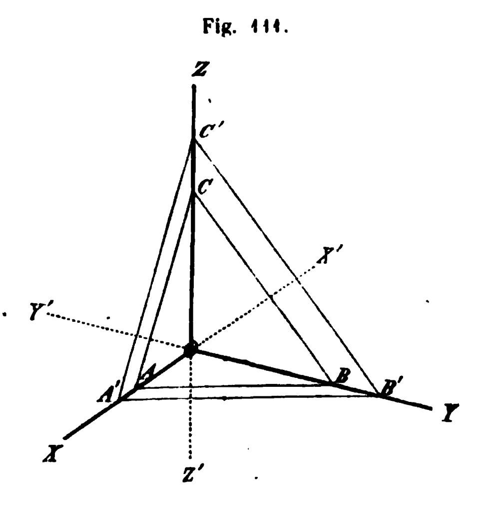
Dieses letztere, d. h. die Form mit gleicher Centraldistanz aller gleichartigen Flächen, ist es nun, welche wir bei allen krystallographischen Betrachtungen benutzen wollen, müssen nur dabei fortwährend festhalten, dass krystallographisch an der Form gar nichts geändert wird, wenn ihre Flächen parallel sich selbst verschoben werden, dass Alles, was für eine Richtung in derselben gilt, auch für jede derselben parallele in gleicher Weise statthat, dass also, wenn von geraden Linien die Rede ist, stets Richtungen gemeint sind, und für eine Ebene von bestimmter Richtung jede ihr parallele substituirt werden kann. Die Form eines Krystalls ist nunmehr zu definiren als der Inbegriff einer Anzahl ebener Flächen, welche sich unter bestimmten Winkeln durchschneiden.

Die Winkel allein sind es, welche von der Natur des den Krystall bildenden Körpers abhängen, nur diese können ihn daher charakterisiren.

§. 33. **Das Grundgesetz der Krystallographie.** Seien ABO, ACO und BCO Fig. 111 drei beliebige Ebenen eines Krystalls, welche sich in den drei Richtungen OX, OY und OZ schneiden, deren Durchschnittspunkt O wegen der Verschiebbarkeit der Flächen ein beliebiger Punkt des Krystalls ist. Nennen wir die drei Richtungen OX, OY und OZ die drei Axen des Krystalls, die Ebenen OXY, OXZ, OYZ die Axenebenen und die Winkel XOY, XOZ, YOZ die Axenwinkel, so theilen offenbar die drei Axenebenen den ganzen Raum in acht Octanten, welche im Punkte O zusammenstossen. Zwei durch eine Axenebene getrennte Octanten sollen anliegende, zwei, welche sich nur in einer Axe berühren, gegenüberliegende, und zwei nur im Punkte O zusammenstossende entgegengesetzte heissen.

Irgend eine vierte Fläche des Krystalls schneide nun die drei Axen in den Punkten A, B und C, so mögen OA, OB und OC die Parameter dieser Fläche heissen, deren Durchschnittsfigur mit den Axenebenen das Dreieck ABC ist. Von dieser Fläche liegen, da sie die drei Axenebenen durchschneidet, Theile auch in den benachbarten Octanten; man sagt nun von einer Fläche, dass sie in demjenigen Octanten liege, welchen sie in einer geschlossenen Durchschnittsfigur, wie das Dreieck ABC im oberen rechten vorderen Octanten in Fig. 111 es ist, schneidet. Zur Bestimmung der Lage einer Fläche gehört demnach ausser der Grösse der Parameter auch noch die Angabe desjenigen Octanten, in welchem sie liegt, da acht Flächen mit gleichen Parametern möglich sind. Um die letztere Angabe zu ermöglichen, nennt man die Strecken OX', OY', OZ' der Axen negativ und versieht die Parameter, welche sich auf jene Strecken beziehen, mit dem —Zeichen.

Fig. 111.



Multiplicirt man die Parameter einer Fläche, z. B. OA, OB, OC, mit einer beliebigen Zahl m, so erhält man die Parameter einer der ersten parallelen Fläche, z. B. OA', OB', OC' Fig. 111, denn

$$\frac{OA'}{OA} = m, \quad \frac{OB'}{OB} = m, \quad \frac{OC'}{OC} = m$$

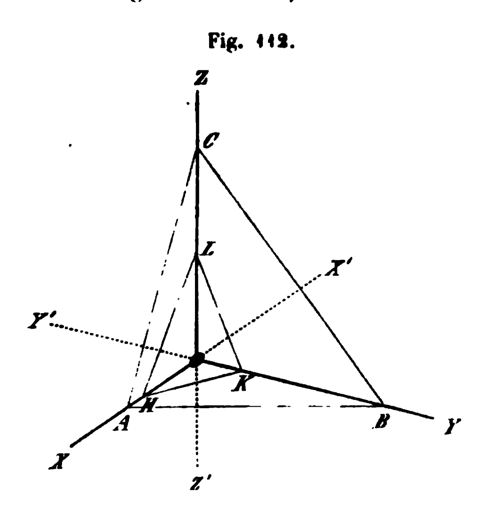
$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC},$$

folglich Dreieck OAB ähnlich Dreieck $OA'B'$, ebenso OAC ähnlich $OA'C'$, demnach

$$A'B' \parallel AB, \qquad A'C' \parallel AC,$$

also auch die Ebenen ABC und $A'B'C'$ einander parallel. Da parallele Flächen krystallographisch als identisch zu betrachten sind (wegen der parallelen Verschiebbarkeit einer jeden Fläche), so folgt hieraus, dass die Parameter einer Fläche mit jeder beliebigen Zahl multiplicirt werden können, ohne dass dadurch an der Lage der Fläche Etwas geändert wird. Da die Zahl m auch -1 sein kann, so folgt weiter, dass zwei entgegengesetzte Flächen mit gleich grossen Parametern parallel sind. Endlich kann man der beliebigen Zahl m auch einen solchen Werth geben, dass einer der drei Parameter gleich 1 wird, woraus ersichtlich ist, dass die Lage einer Krystallfläche in Bezug auf die Axen schon durch zwei von einander unabhängige Grössen bestimmt ist.

Fig. 112.



Betrachten wir nun noch eine fünfte Fläche desselben Krystalls, deren Parameter OH, OK und OL Fig. 112 sind, so können wir deren Lage noch auf andere Weise als durch die Länge der Parameter bestimmen, indem wir nämlich angeben, der wievielste Theil ihre Parameter sind von den entsprechenden (auf dieselbe Axe bezogenen) der vorher betrachteten Fläche ABC.

Sei z. B. OH der h-te Theil von OA, OK der k-te von OB, OL der l-te von OC, so ist

$$OH = \frac{OA}{h}, \quad OK = \frac{OB}{k}, \quad OL = \frac{OC}{l},$$

und

$$h = \frac{OA}{OH}, \quad k = \frac{OB}{OK}, \quad l = \frac{OC}{OL}.$$

Diese drei Grössen h, k, l bestimmen die Fläche vollkommen, wenn die Lage der ersteren Fläche, d. h. die Parameter OA, OB und OC bekannt sind. Multipliciren wir h, k, l mit einer beliebigen Zahl m, so ist dies gleichbedeutend mit einer Multiplication von OA, OB und OC mit m; diese ändert an der Lage der ersteren Fläche nichts, sondern entspricht nur einer Parallelverschiebung; wir können also auch diese, die letztere Fläche bestimmenden Grössen h, k, l, mit irgend einer beliebigen Zahl multipliciren, ohne dadurch an dem Verhältniss beider, d. h. der Richtung derselben, Etwas zu ändern. Man kann daher auch immer eine der drei Zahlen h, k, l gleich 1 oder gleich einer beliebigen Zahl setzen.

In derselben Weise kann nun jede andere Krystallfläche $H'K'L'$ durch die drei Grössen

$$h' = \frac{OA}{OH'}, \quad k' = \frac{OB}{OH'}, \quad l' = \frac{OC}{OL'}$$

bestimmt werden, so dass also alle an einem Krystall auftretenden Ebenen durch die Parameter einer einzigen (beliebig gewählten) Fläche und durch die Verhältnisszahlen ihrer Parameter zu denen jener einzigen Fläche bestimmt werden können.

Die Parameter OA, OB und OC derjenigen Fläche, von welcher man ausgeht, nennt man die Axenlängen des Krystalls und bezeichnet sie mit a, b, c, von welchen Grössen gewöhnlich eine $= 1$ gesetzt wird. Die Verhältnisszahlen h, k, l einer andern Krystallfläche heissen ihre Indices, und

$$(h\,k\,l)$$

ihr Symbol, durch welches nach dem Gesagten ihre Lage vollkommen bestimmt ist, wenn die Axenlängen bekannt sind.

Die Erfahrung hat nun gelehrt, dass an einem Krystall nur solche Flächen vorkommen, deren Indices, von welchen Flächen desselben Krystalls als Axenebenen und zur Bestimmung der Axenlängen man auch ausgehe, sich wie rationale Zahlen verhalten. Nehmen wir also irgend drei Flächen eines Krystalls zu Axenebenen, irgend eine vierte zur Grundform, d. h. bestimmen wir durch diese die drei Axenlängen, welche aus der Neigung derselben gegen die Axenebenen berechnet werden können, und bestimmen dann durch Messung der Winkel aller übrigen Flächen auch deren Parameter und daraus für eine jede das Verhältniss derselben zu den Axenlängen, d. h. die Indices, so erhält man nur rationale Zahlen, und zwar fast immer die einfachsten, welche möglich sind. Da diese Zahlen aber aus Beobachtungen (Messungen der Krystallwinkel) hergeleitet werden, diese aber natürlich niemals absolut genau, sondern nur Annäherungen an den wahren Werth, behaftet mit mehr oder weniger grossen Fehlern, sind, so erklärt sich hieraus, warum man bei der Bestimmung der Indices niemals genau einfache rationale Zahlen erhält, sondern nur angenähert. Dass aber jene die wahren Werthe der gesuchten Indices sind, beweist der Umstand, dass die berechneten Indices sich ihnen um so mehr nähern, je genauere Winkelmessungen zur Rechnung benutzt werden konnten. Da die Indices einer Fläche mit jeder beliebigen Zahl multiplicirt werden können, so sind sie immer auf eine Form zu bringen, in welcher sie sämmtlich ganze rationale Zahlen darstellen, daher das soeben erläuterte empirische Grundgesetz der Krystallographie auch das Gesetz der Rationalität der Indices heisst. Nach der Zurückführung auf ganze Zahlen sind die Indices gewöhnlich nur die allerkleinsten der Zahlenreihe, nämlich:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\ \ldots$$

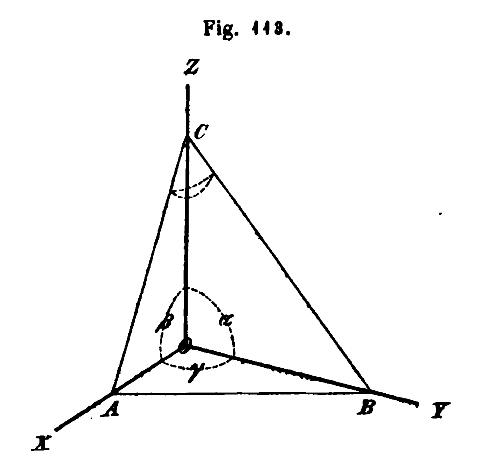
selten höhere. Da, wie schon bemerkt, die Berechnung derselben niemals absolut genau diese einfachen Zahlen liefert, so hat man für den gefundenen Werth immer die nächstliegende einfache rationale Zahl als wahren Werth einzusetzen, aber stets zu bestimmen, welche Differenz der zur Rechnung benutzten Krystallwinkel dem Unterschiede zwischen dem gefundenen und dem angenommenen Werthe entspricht, und zu sehen, ob diese Differenz noch als Ungenauigkeit der Messung betrachtet werden kann. Ist letzteres

nicht der Fall, so hat man einen dem gefundenen Werthe der Indices näher liegenden, dann natürlich weniger einfachen, welcher jene Bedingung erfüllt, als wahren Werth einzusetzen. Fände man z. B. das Verhältniss zweier Indices = 1 : 1,79, so kann dies = 1 : 2 nur in dem Fall sein, dass die zu Grunde gelegten Messungen wegen unvollkommener Flächenbeschaffenheit der Krystalle höchst ungenau seien; trifft dies nicht zu, so muss der viel weniger einfache Werth 1 : 1,75 = 4 : 7 das wahre Verhältniss der Indices angeben.

Die Axenwinkel α, β, γ Fig. 113 der drei zu Axenebenen beliebig ausgewählten Flächen und das Parameterverhältniss der Grundform, d. h. die Axenlängen $a = OA$, $b = OB$, $c = OC$, von denen eine = 1 gesetzt wird, so dass also nur zwei derselben zu bestimmen sind, stellen zusammen fünf von einander unabhängige Grössen vor, welche man die Elemente des Krystalls nennt.

Um diese zu bestimmen, bedarf es fünf von einander unabhängiger Gleichungen und hierzu dienen die Messungen von fünf Krystallwinkeln, nämlich derjenigen drei, unter welchen sich die Axenebenen schneiden, und der beiden Neigungen der Grundform ABC gegen zwei der Axenebenen, z. B. gegen XOZ und YOZ. Denkt man sich um O als Mittelpunkt eine Kugelfläche gelegt, so schneiden die drei Axenebenen auf dieser ein sphärisches Dreieck ab, welches in Fig. 113 punktirt bezeichnet ist, dessen Winkel gleich denjenigen sind, unter welchen sich je zwei Axenebenen schneiden, und dessen Seiten die Bögen α, β, γ sind. Die drei Winkel dieses sphärischen Dreiecks A, B und C sind durch die Messung gegeben, denn A ist der Winkel zwischen den Axenebenen XOZ und XOY, B derjenige zwischen YOX und YOZ, C derjenige zwischen ZOX und ZOY. Berechnet man aus diesen nach der betreffenden Formel der sphärischen Trigonometrie die drei Seiten, so hat man damit die drei gesuchten Axenwinkel α, β, γ gefunden. Denkt man sich nun weiter um den Punkt C als Centrum eine Kugeloberfläche construirt, so schneidet die Grundform ABC und die beiden Axenebenen XOZ und YOZ aus diesem ein ebenfalls in der Figur punktirt bezeichnetes sphärisches Dreieck aus, dessen drei Winkel bekannt sind; es ist dies 1) der Winkel C der beiden Axenebenen XOZ und YOZ, 2) und 3) die Winkel zwischen diesen beiden und der Ebene ABC; es können also auch hier die drei Kreisbögen, welche die Seiten bilden, berechnet werden. Eine dieser ist gleich dem Winkel OCB; wenn wir diesen kennen, so sind in dem Dreieck OCB alle Winkel bekannt, da $BOC = \alpha$, also auch das Verhältniss $OC : OB = c : b$ bestimmt. Ganz ebenso liefert der Winkel OCA, welcher auch einer Seite des sphärischen Dreiecks gleich ist, die Kenntniss des Dreiecks AOC, da Winkel $AOC = \beta$, und somit des Verhältnisses der beiden Axenlängen $OA : OC = a : c$. Durch diese Rechnung (welche das Prototyp für die Mehrzahl der krystallographischen Berechnungen liefert) ist also das Verhältniss der drei Axenlängen, und wenn eine derselben = 1 gesetzt wird, diese selbst bestimmt; es

Fig. 113.



sind demnach mit den vorher berechneten Axenwinkeln nunmehr sämmtliche fünf Elemente des Krystalls gefunden.

Durch die fünf Elemente sind sämmtliche anderen Flächen, welche an dem Krystall noch auftreten können, gegeben, da nur solche vermöge des Gesetzes der Rationalität der Indices vorkommen, bei denen diese letzteren rationale Zahlen sind. Welche und wie viele von den krystallonomisch möglichen Flächen nun wirklich noch an dem Krystall sich ausgebildet haben, das hängt, wie die Erfahrung gelehrt hat, von den äusseren Umständen bei seiner Bildung ab, hat also mit dem eigentlichen Wesen desselben nichts zu thun. Mit der Kenntniss der fünf Elemente eines Krystalls ist daher seine »Krystallform« vollkommen bestimmt.

Bei der Betrachtung der thermischen Verhältnisse der Krystalle haben wir gesehen, dass diese sich im Allgemeinen (mit Ausnahme der isotropen) nach verschiedenen Richtungen verschieden ausdehnen, wenn sie erwärmt werden, und dass in Folge davon die Neigungen der Flächen gegen einander, die Krystallwinkel, sich ändern. Von diesen sind aber die Elemente des Krystalls, die Axenwinkel und Axenlängen, abhängig, also müssen auch diese mit der Temperatur des Krystalls sich ändern. Bestimmt man nun aber die Indices der übrigen Flächen desselben, auf jene Elemente bezogen, so ergeben sich stets dieselben Zahlen, d. h. wenn eine Fläche des Krystalls ihre Lage durch die Temperaturerhöhung desselben ändert, so ändern auch die übrigen Flächen die ihrige in der Weise, dass die Verhältnisszahlen ihrer neuen Parameter zu den nunmehrigen Parametern der ersten Fläche dieselben rationalen Zahlen bleiben. Das Gesetz der Rationalität der Indices ist unabhängig von der Temperatur des Krystalls.

Wenn die Parameter der Primärform oder Grundform, d. h. der Fläche, auf welche wir alle übrigen beziehen, $= a, b, c$ sind, so sind diejenigen einer Fläche, deren Symbol $(h\,k\,l)$ ist,

$$\frac{a}{h}, \quad \frac{b}{k}, \quad \frac{c}{l},$$

oder mit dem Product $h\,k\,l$ multiplicirt:

$$k\,l\,a, \quad h\,l\,b, \quad h\,k\,c.$$

In dieser Form stellen nun die Parameter der Fläche $(h\,k\,l)$ ganze rationale Vielfache der primären Parameter oder der Axenlängen dar. Man kann also, wenn die Axenlängen, d. h. die Parameter einer Fläche bekannt sind, die Lage aller anderen Flächen auch dadurch bestimmen, dass man angiebt, das wie Vielfache ihre Parameter von denen der ersten Fläche sind; dies geschieht, indem ihr Parameterverhältniss aufgeführt und die Axenlängen mit den betreffenden rationalen Coëfficienten multiplicirt werden. Das Verhältniss dieser rationalen Coëfficienten ist dann natürlich das reciproke der Indices. Beide entgegengesetzte Formeln zur Bezeichnung einer Fläche, 1) durch ihr Axenverhältniss als Vielfaches des primären, 2) durch die Indices, sind in der Krystallographie eingeführt worden, die erstere von Weiss, die letztere von Miller, und beide werden noch jetzt gebraucht.

Die ursprüngliche Weiss'sche Bezeichnungsweise der Flächen durch ihr Parameterverhältniss wird zwar nur noch von wenigen Krystallographen angewendet, um so mehr aber eine auf demselben Princip beruhende abgekürzte Flächenbezeichnung, welche von Naumann vorgeschlagen wurde. Diese Bezeichnungsweise enthält dieselben Coëfficienten der Parameter, wie die Weiss'sche, und hat daher mit dieser den Vortheil über die Miller'sche gemein, dass das Zeichen einer Fläche ohne Schwierigkeit eine Vorstellung über die Lage der Fläche gewinnen lässt, welche aus den Indices viel weniger leicht zu erhalten ist. Dagegen hat die sogenannte Miller'sche Bezeichnungsweise (welche zuerst von Whewell vorgeschlagen wurde) den Vortheil, dass die Indices für gewisse Rechnungsmethoden unmittelbar verwendet werden können, während die reciproken Coëfficienten der Parameter zu denselben erst umgeändert werden müssen. Die letztere ist in neuerer Zeit besonders in den Arbeiten über physikalische Krystallographie in Aufnahme gekommen, und ist daher ihre Kenntniss zum Verständniss solcher unentbehrlich. Was die grössere oder geringere Einfachheit der Zahlen bei der einen und der anderen Bezeichnungsmethode betrifft, so kommt hierin keiner von beiden ein besonderer Vorzug zu, denn in einem Falle sind die Zahlen in dem Miller'schen Zeichen einfacher, als in dem Weiss'schen, in einem andern Falle ist es umgekehrt. Es geht dies deutlich aus den folgenden Beispielen hervor, welche zugleich zeigen sollen, wie die Zeichen der einen Art in diejenigen der anderen umgewandelt werden:

Die Indices der Grundform selbst sind offenbar 1, 1, 1, also deren Zeichen nach Miller $=(1\,1\,1)$, das Weiss'sche Zeichen giebt die Parameter an und lautet daher

$$(a : b : c).$$

Die Fläche, deren Symbol (1 2 3), hat die Parameter

$$\frac{a}{1} : \frac{b}{2} : \frac{c}{3}$$

oder $$6a : 3b : 2c$$

oder $$3a : \tfrac{3}{2}b : c;$$

das Weiss'sche Zeichen derselben ist demnach

$$= (3a : \tfrac{3}{2}b : c).$$

Die Fläche (3 4 6) hat die Parameter

$$\frac{a}{3}, \frac{b}{4}, \frac{c}{6}$$
$$= 24a, \; 18b, \; 12c$$
$$= 2a, \; \tfrac{3}{2}b, \; c$$

und wird nach Weiss bezeichnet:

$$(2a : \tfrac{3}{2}b : c).$$

Der allgemeine Ausdruck für eine abgeleitete Fläche, welcher durch die Indices mit $(h\,k\,l)$ bezeichnet wird, ist nach Weiss

$$(ma : b : nc).$$

Es ist oben unter den Zahlen, welche als Indices am häufigsten vor-

kommen, auch die Null aufgeführt; wird ein Index $= 0$, so werden die Parameter der Fläche $(h\,k\,0)$:

$$\frac{a}{h},\ \frac{b}{k},\ \frac{c}{0} = \infty,$$

ihr Parameterverhältniss wird also

$$ma : b : \infty c\,.$$

Dies ist demnach das Zeichen einer Fläche, welche der Z-Axe parallel geht, aber die beiden andern Axen in endlichen Abständen durchschneidet. Die Bezeichnungen

$$(h\,0\,k) = a \ : \infty b : nc$$
$$\text{und } (0\,k\,l) = \infty a : \ mb : nc$$

bedeuten dann Flächen, welche der Y-, resp. X-Axe parallel sind.

Werden zwei Indices der Null gleich, so kann der dritte jeder beliebigen Zahl, also auch der 1 gleichgesetzt werden; eine solche Fläche hat also das Symbol $(1\,0\,0)$ und die Parameter:

$$\frac{a}{1},\ \frac{b}{0} = \infty,\ \frac{c}{0} = \infty,$$

also das hierauf begründete Zeichen

$$(a : \infty b : \infty c).$$

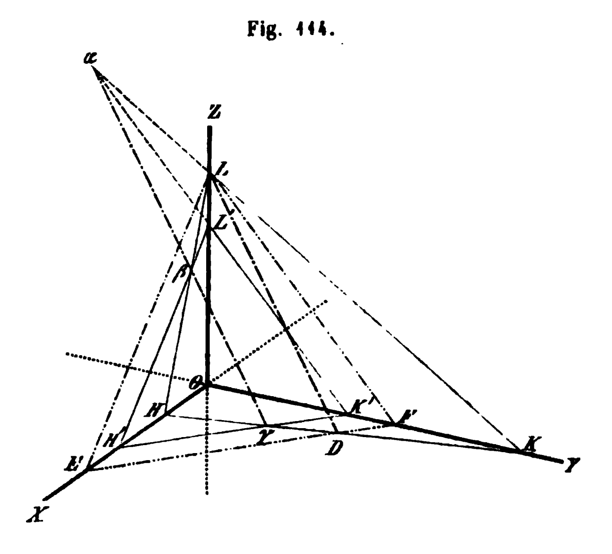
Sie ist zwei Axen parallel, somit auch der Axenebene YOZ, in welcher diese liegen, d. h. jenes Zeichen ist dasjenige der Axenebene YOZ selbst. Ebenso sind:

$$0\,1\,0 = (\infty a : b : \infty c)$$
$$0\,0\,1 = (\infty a : \infty b : c)$$

die Zeichen der beiden anderen Axenebenen XOZ und XOY.

§. 34. **Zonenlehre.** *A*) Richtung der Durchschnittslinie zweier Krystallflächen. In Fig. 114 sind zwei Flächen (hkl) und $(h'k'l')$ eingetragen, welche die drei Axen in H, K, L, resp. $H'K'L'$ schneiden und deren Durchschnittsrichtung als Function ihrer Parameter bestimmt werden soll. Die Durchschnitte beider Flächen mit der Axenebene XOY, HK und $H'K'$, müssen sich in einem Punkte γ schneiden, und da dieser beiden Krystallflächen angehört, so muss es ein Punkt der gesuchten Durchschnittsrichtung sein. Ganz ebenso muss β als Schnittpunkt der Geraden HL und

Fig. 114.



$H'L'$, sowie α als solcher der Linien KL und $K'L'$ je ein Punkt derselben Geraden darstellen, welche also bereits durch die Lage zweier derselben bestimmt ist.

Durch parallele Verschiebung einer oder beider Krystallflächen wird die Richtung der Durchschnittslinie nicht geändert. Verschieben wir $(h'k'l')$ parallel sich selbst so weit, bis ihr Parameter auf der Z-Axe $= OL$ wird, so ist dies gleichbedeutend mit einer Multiplication aller ihrer Parameter mit $\frac{OL}{OL'}$; dieselben erhalten alsdann die Werthe:

$$OE = OH' \frac{OL}{OL'}, \; OF = OK' \frac{OL}{OL'}, \; OL.$$

Die Richtung der gesuchten Durchschnittslinie ist nunmehr DL; auf dieser ist der Punkt L bekannt, da er im Abstande OL (= einem Parameter der ersten Fläche) auf der Z-Axe liegt.

Um den zweiten Punkt D zu finden, construire man in Fig. 115

$$DU \parallel OY, \quad DV \parallel OX,$$

so ist die Aufgabe nun diejenige, die Längen OU und OV (die sogen. Coordinaten des Punktes D durch die Parameter zu bestimmen, da mit deren Kenntniss die Gestalt des Parallelogramms $OUDV$, also auch die Lage des Punktes D gegeben ist.

Es ist Dreieck OKH ähnlich UDH, ebenso OFE ähnlich UDE; daraus folgt

$$OK : UD = OH : UH = OH : (OH - OU)$$
$$OF : UD = OE : UE = OE : (OE - OU)$$

Das erste Verhältniss liefert die Gleichung

$$OK \cdot OH - OU \cdot OK = OH \cdot UD$$

das zweite

$$OF \cdot OE - OU \cdot OF = OE \cdot UD.$$

Aus diesen beiden Gleichungen leiten sich die beiden Unbekannten OU und UD ab:

$$OU = \frac{OE \cdot OK \cdot OH - OF \cdot OE \cdot OH}{OE \cdot OK - OH \cdot OF}$$

$$UD = \frac{OK \cdot OF \cdot OE - OK \cdot OH \cdot OF}{OE \cdot OK - OH \cdot OF}$$

oder:

$$OU = OH \cdot OE \frac{OK - OF}{OE \cdot OK - OF \cdot OH}$$

$$UD = OV = OK \cdot OF \frac{OE - OH \cdot}{OE \cdot OK - OF \cdot OH}$$

Setzt man hierin für OE und OF ihre Werthe ein, so resultirt:

$$OU = OH \cdot \frac{OL}{OL'} \cdot OH' \cdot \frac{OK - \frac{OL}{OL'} \cdot OK'}{\frac{OL}{OL'} \cdot OH' \cdot OK - \frac{OL}{OL'} \cdot OK' \cdot OH}$$

$$= OH \cdot \frac{OL}{OL'} \cdot OH' \cdot \frac{\frac{OL'}{OL} \cdot OK - OK'}{OH' \cdot OK - OK' \cdot OH}$$

$$OV = OK \cdot \frac{OL}{OL'} \cdot OK' \cdot \frac{\frac{OL}{OL'} \cdot OH' - OH}{\frac{OL}{OL'} \cdot OH' \cdot OK - \frac{OL}{OL'} \cdot OK' \cdot OH}$$

$$= OK \cdot \frac{OL}{OL'} \cdot OK' \cdot \frac{OH' - \frac{OL'}{OL} \cdot OH}{OH' \cdot OK - OK' \cdot OH}$$

$$OU = \frac{OH \cdot OH'}{OL'} \cdot \frac{OK \cdot OL' - OL \cdot OK'}{OK \cdot OH' - OH \cdot OK'}$$

$$OV = \frac{OK \cdot OK'}{OL'} \cdot \frac{OL \cdot OH' - OH \cdot OL'}{OK \cdot OH' - OH \cdot OK'}$$

Hiermit ist die Aufgabe, die Richtung der Durchschnittslinie von (hkl) und $(h'k'l')$ durch deren Parameter zu bestimmen, gelöst, da zwei Punkte derselben, L und D, nunmehr mittelst der Parameter gegeben sind.

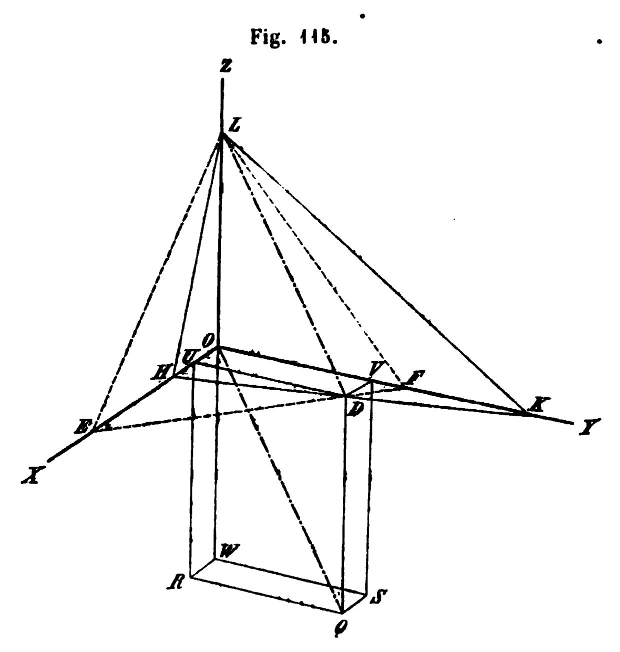


Fig. 115.

Um die Ausdrücke für die drei Bestimmungsstücke jener Durchschnittslinie, OU, OV und OL, symmetrisch zu machen, tragen wir in Fig. 115 auf der negativen Seite der Z-Axe die Länge $OW = -OL$ ab und construiren das Parallelepiped $OUDVWRQS$; alsdann ist dessen Diagonale OQ ebenfalls die Richtung des Durchschnittes der beiden Flächen (hkl) und $(h'k'l')$. Multiplicirt man alle Parameter der Fläche (hkl), also OH, OK, OL, mit einer beliebigen Zahl m, so wird dadurch an der Richtung jener Fläche nichts geändert, also auch nicht an ihrer Durchschnittsrichtung mit $(h'k'l')$. Setzt man nun für OH, OK und OL die neuen Werthe $m \cdot OH$, $m \cdot OK$ und $m \cdot OL$ in die obigen Formeln für OU, OV und OW ein, so wird daraus $OU' = m \cdot OU$, $OV' = m \cdot OV$, $OW' = m \cdot OW$, d. h. es werden alle Seiten des oben bezeichneten Parallelepipeds mit derselben Zahl multiplicirt, ohne dass dadurch die Richtung ihrer Diagonale, d. i. die Durchschnittsrichtung der beiden Krystallflächen, geändert wird. Diese wird also auch unverändert bleiben, wenn die Ausdrücke für OU, OV und OW mit

$$\frac{OK \cdot OH' - OH \cdot OK'}{OH \cdot OH' \cdot OK \cdot OK' \cdot OL}$$

multiplicirt werden. Führt man dies aus, so findet man die nunmehr ganz symmetrischen Ausdrücke

$$OU = \frac{1}{OL \cdot OK'} - \frac{1}{OK \cdot OL'}$$
$$OV = \frac{1}{OH \cdot OL'} - \frac{1}{OL \cdot OH'}$$
$$OW = \frac{1}{OK \cdot OH'} - \frac{1}{OH \cdot OK'}$$

Durch diese Gleichung ist nun die Durchschnittsrichtung zweier Krystallflächen in der Weise zu bestimmen, dass man sich diese Richtung durch den Axenmittelpunkt gelegt denkt, womit ein Punkt derselben gegeben ist, — während man den zweiten dadurch findet, dass man obige Werthe von OU, OV und OW je nach ihrem Vorzeichen auf die positive oder negative Seite der X-, Y- und Z-Axe aufträgt und damit die drei Seiten des Parallelepipeds erhält, dessen dem Axenmittelpunkt entgegengesetzter Eckpunkt jener zweite Punkt ist, dessen Diagonale die gesuchte Durchschnittsrichtung darstellt.

Die drei Grössen OU, OV, OW bestimmen die Durchschnittsrichtung zweier Flächen durch deren Parameter; will man sie statt dessen durch die Indices bestimmen, so hat man nur nöthig, in die Formeln derselben die Werthe der Parameter, durch die Indices ausgedrückt, einzusetzen. Wenn die Axenlängen des Krystalls $= a, b, c$, so sind die Parameter der beiden Flächen (hkl) und $(h'k'l')$:

$$OH = \frac{a}{h}, \quad OK = \frac{b}{k}, \quad OL = \frac{c}{l}$$
$$OH' = \frac{a}{h'}, \quad OK' = \frac{b}{k'}, \quad OL' = \frac{c}{l'}$$

Setzt man diese Werthe in die Formeln für OU, OV, OW (s. oben) ein und bringt jeden Ausdruck auf einen Nenner, so erhält man:

$$OU = \frac{kl' - lk'}{bc} = \frac{u}{bc}$$
$$OV = \frac{lh' - hl'}{ac} = \frac{v}{ac}$$
$$OW = \frac{hk' - kh'}{ab} = \frac{w}{ab},$$

wenn man die Differenzen $kl' - lk'$, $lh' - hl'$, $hk' - kh'$ abgekürzt mit u, v, w bezeichnet. Multiplicirt man diese Grössen mit dem Produkt abc, wodurch ja die Richtung der Diagonale des Parallelepipeds nicht geändert wird, so verwandeln sie sich in

$$a\,u, \quad b\,v, \quad c\,w$$

welche Grössen als Seiten des Parallelepipeds dessen Diagonale, als die Durchschnittsrichtung der Flächen (hkl) und $(h'k'l')$, durch die Axenlängen und die Indices derselben bestimmen. Die nur von den Indices abhängigen Grössen u, v, w erhält man mittelst eines sehr leicht dem Gedächtniss einzuprägenden Schemas aus jenen, indem man nämlich die Indices der einen Fläche zweimal und darunter die der andern ebenso oft schreibt und nach

Weglassung der ersten und letzten Colonne je zwei Zahlen kreuzweise multiplicirt und die beiden Producte von einander abzieht:

$$\begin{array}{c|cccc|c} h & k & l & h & k & l \\ & \times & \times & \times & & \\ h' & k' & l' & h' & k' & l' \\ \hline \multicolumn{6}{c}{kl'-lk',\; lh'-hl',\; hk'-kh'} \\ \multicolumn{6}{c}{=u \qquad =v \qquad =w} \end{array}$$

Da die Indices stets ganze rationale Zahlen sind, so müssen auch die Grössen u, v, w solche sein.

B) Durchschnittsrichtung dreier, einer Richtung paralleler Krystallflächen. Die beiden unter *A*) betrachteten Flächen sind ihrer soeben bestimmten Durchschnittsrichtung parallel; dies kann auch eine dritte sein, dann muss sie die beiden ersteren in Geraden (die Durchschnittslinien zweier Krystallflächen nennt man Kanten) schneiden, welche einander und jener ersten Durchschnittsrichtung parallel sind. Die Gesammtheit von Flächen, welche einander in parallelen Kanten durchschneiden, nennt man eine Zone, die Flächen derselben tautozonal. Denkt man sich alle Flächen einer Zone durch einen Punkt gehend, so schneiden sie sich sämmtlich in einer Geraden, in der Richtung, welcher sie parallel sind, der sogenannten Zonenaxe.

Soll eine Fläche R tautozonal mit zwei anderen P und Q sein, so müssen ihre Indices einer bestimmten Bedingung genügen, welche nunmehr aufzusuchen ist. P, Q, R, deren Symbole resp. sind

$$P(efg),\; Q(hkl),\; R(pqr)$$

werden in einer Zone liegen, wenn die Durchschnittslinie von P und Q parallel derjenigen von Q und R ist, d. h. wenn die Diagonalen der beiden Parallelepipede, welche wir für den ersteren, wie für den zweiten Durchschnitt in derselben Weise construiren, wie unter *A*) (s. Fig. 115), zusammenfallen, denn jene sind die Durchschnittsrichtungen, die eine von P und Q, die andere von Q und R, sind also parallel; legen wir sie also durch denselben Punkt, den Axenmittelpunkt, so müssen sie sich decken. Die Diagonalen jener beiden Parallelepipede können aber nur dann in dieselbe Richtung fallen, wenn das Verhältniss der drei Seiten in beiden das gleiche (das eine dem andern ähnlich ist), d. h. wenn die Seiten des ersten sich nur durch einen constanten Factor von denen des zweiten Parallelepipeds unterscheiden.

Die Durchschnittslinie der Flächen P und Q, kurz mit $[P,Q]$ bezeichnet, ist bestimmt durch das Parallelepiped, dessen Seiten:

$$au = a(fl-gk),\; bv = b(gh-el),\; cw = c(ek-fh);$$

die Durchschnittsrichtung $[Q,R]$ durch die Parallelepipedseiten:

$$au' = a(kr-lq),\; bv' = b(lp-hr),\; cw' = c(hq-kp).$$

Sollen P, Q, R tautozonal sein, so müssen die entsprechenden Seiten jener

beiden Parallelepipede sich zu einander verhalten, wie derselbe constante Factor, z. B. C, folglich*)

$$C(fl-gk) = kr-lq \quad (1)$$
$$C(gh-el) = lp-hr \quad (2)$$
$$C(ek-fh) = hq-kp \quad (3)$$

Multiplicirt man (1) mit e, (2) mit f, (3) mit g, und addirt alle drei Gleichungen, so wird die ganze linke Seite der resultirenden Gleichung Null, während die rechte ist:

$$ekr-elq+flp-fhr+ghq-gkp.$$

Die Bedingung für die Tautozonalität der drei Flächen besteht also darin, dass dieser Ausdruck $= 0$ wird. Setzt man wieder

$$fl-gk = u, \; gh-el = v, \; ek-fh = w,$$

so folgt daraus

$$up+vq+wr = 0.$$

Daraus ersieht man, dass die Bedingung, unter welcher drei Flächen in eine Zone fallen, nur abhängt von den Indices dieser Flächen, dagegen von den Axenlängen vollkommen unabhängig ist. Dass diese sich bei den meisten Krystallen mit der Temperatur ändern, kann daher auf die Tautozonalität keinen Einfluss ausüben. Die Indices jedoch, von denen allein jene Bedingung abhängt, behalten für jede Temperatur des Krystalls ihre rationalen Werthe constant bei, also behält auch jene Bedingungsgleichung für alle Temperaturen ihre Gültigkeit. Drei Krystallflächen, welche für irgend eine Temperatur eine Zone bilden, schneiden sich auch bei jeder andern Temperatur in parallelen Kanten. Man nennt dieses, aus demjenigen der Rationalität der Indices folgende Gesetz das Gesetz der Erhaltung der Zonen.

Die Grössen u, v, w heissen die Indices der Zone, $[uvw]$ ihr Symbol, welches aus irgend zwei Flächen P und Q, unter einer beliebigen Zahl solcher, welche sich in parallelen Kanten schneiden, berechnet werden kann; jede beliebige andere Fläche (pqr) der Zone $[P,Q]$ (welche man auch mit $[hkl, efg]$ oder mit $[uvw]$ bezeichnen kann) muss in Bezug auf ihre Indices der obigen Bedingungsgleichung genügen.

Man kann diese Gleichung folglich dazu benutzen, die Richtigkeit der Indices einer Fläche zu prüfen, welche man auf anderem Wege bestimmt hat, und welche in einer Zone liegt**) mit zwei bekannten Flächen. Sind diese z. B. (201) und (314), so ist das Symbol der Zone $[\bar{1}\bar{5}2]$, d. h. $u = -1$, $v = -5$, $w = +2$, und es gehört die Fläche $(\bar{3}11)$ in diese

*) In diesen Gleichungen heben sich die Axenlängen a, b, c auf, weil stets eine derselben als Factor beider Seiten der Gleichung erscheint.

**) Die Zugehörigkeit einer Fläche zu einer Zone mit Bestimmtheit zu constatiren, bedarf es des Reflexionsgoniometers, auf welchem die beiden bekannten Flächen justirt (s. S. 23) werden; ist dies geschehen, so steht die Zonenaxe normal zum Kreis, und alsdann sind auch alle übrigen Flächen der Zone justirt.

Zone, denn deren Indices in die obige Gleichung eingesetzt, erfüllen dieselbe.

Das Symbol $[u v w]$ einer Zone giebt uns die Gesammtheit aller möglichen Flächen derselben, indem wir für q und r nach und nach alle einfachen rationalen Zahlen 0, 1, 2, ··· setzen und jedesmal das zugehörige p aus der obigen Bedingungsgleichung berechnen.

C) **Bestimmung einer Fläche durch zwei Zonen.** Da eine Ebene durch zwei derselben parallele Gerade gegeben ist, so ist eine Krystallfläche, welche zugleich in zwei Zonen liegt, also sowohl der Zonenaxe der ersten, als derjenigen der zweiten, parallel geht, dadurch vollkommen bestimmt. Sind die Symbole der beiden Zonen

$$[u v w] \text{ und } [u'v'w'],$$

so müssen die Indices pqr der in beiden Zonen liegenden Fläche sowohl in Bezug auf u, v, w, als in Bezug auf u', v', w' jener Bedingungsgleichung genügen, folglich:

$$\begin{aligned} up + vq + wr &= 0 \\ u'p + v'q + w'r &= 0 \end{aligned}$$

Daraus findet man leicht

$$\begin{aligned} p &= r\,\frac{vw' - wv'}{uv' - vu'} \\ q &= r\,\frac{wu' - uw'}{uv' - vu'} \end{aligned}$$

Da man einen von den drei Indices jeder beliebigen Zahl gleich setzen kann, z. B.

$$r = uv' - vu'$$

so folgt:

$$\begin{aligned} p &= vw' - wv' \\ q &= wu' - uw' \\ r &= uv' - vu' \end{aligned}$$

als die drei Indices derjenigen Fläche, welche in den beiden Zonen $[u v w]$ und $[u'v'w']$ liegt.

Diese drei Werthe folgen nun aus den Indices der beiden Zonen nach genau demselben Schema, wie diese selbst aus den Indices der Flächen, nämlich:

$$\begin{array}{c|ccccccc|c} u & v & & w & & u & & v & w \\ & & \times & & \times & & \times & & \\ u' & v' & & w' & & u' & & v' & w' \\ \hline \multicolumn{9}{c}{vw' - wv', \quad wu' - uw', \quad uv' - vu'} \\ \multicolumn{9}{c}{= p \qquad\quad = q \qquad\quad = r} \end{array}$$

Bei der Ableitung der Indices der Zonen, wie bei der Berechnung einer Fläche aus zwei Zonen, in welche sie fällt, sind stets die auf die negative Seite einer Axe bezüglichen Indices mit dem Vorzeichen —, welches alsdann über den Index gesetzt wird, in Rechnung zu bringen. Z. B. sei diejenige Fläche gesucht, welche einerseits in der Zone der beiden Flächen

(123) und (113) liegt, andererseits auch mit (011) und (122) parallele Kanten bildet, das Symbol der ersteren Zone ist $[30\bar{1}]$, das der zweiten $[01\bar{1}]$; daraus folgt die gesuchte Fläche (133).

§. 35. **Die Symmetrie der Krystalle.** Wir gelangen nun zu einer Anwendung der Bestimmung der Lage von Krystallflächen durch ihre Indices, welche in theoretischer Beziehung von der höchsten Wichtigkeit ist, für das vorliegende, mehr praktische Zwecke berücksichtigende Werk indess zu weitläufige Herleitungen erfordern würde. Es werden daher von diesem Theile der theoretischen Krystallographie nur die wichtigsten Resultate gegeben werden, welche genügen, sich von dem Gange der mathematischen Untersuchung eine Vorstellung zu verschaffen. Für diejenigen, welche die theoretische Krystallographie eingehender studiren und sich daher die Kenntniss der vollständigen Herleitung jener Resultate verschaffen wollen, müssen wir auf das Werk von »V. von Lang, Lehrbuch der Krystallographie, Wien 1866« verweisen.

Seien OP, OP', OQ und OR Fig. 116 die Durchschnitte von vier tautozonalen Flächen

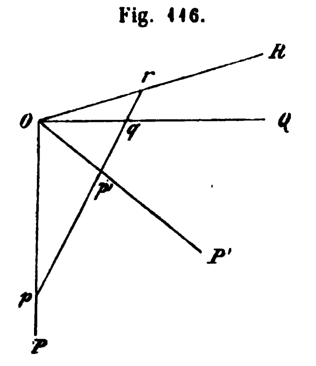
$$P(hkl),\quad P'(h'k'l'),\quad Q(efg),\quad R(uvw)$$

mit einer beliebigen Ebene E (welche keine krystallographisch mögliche Fläche zu sein braucht), und sei pr irgend eine Gerade in dieser Ebene, so ist das Längenverhältniss

$$\frac{qp}{qp'}:\frac{rp}{rp'}=\frac{fl-gk}{fl'-gk'}\cdot\frac{vl'-wk'}{vl-wk}.$$

Dieses Verhältniss nennt man das anharmonische Verhältniss der Ebenen Q und R zu P und P', und es folgt aus der obigen Formel, dass dasselbe stets einen rationalen Werth besitzt und unabhängig ist von der Lage der Ebene E und der Richtung der Geraden pr.

Fig. 116.



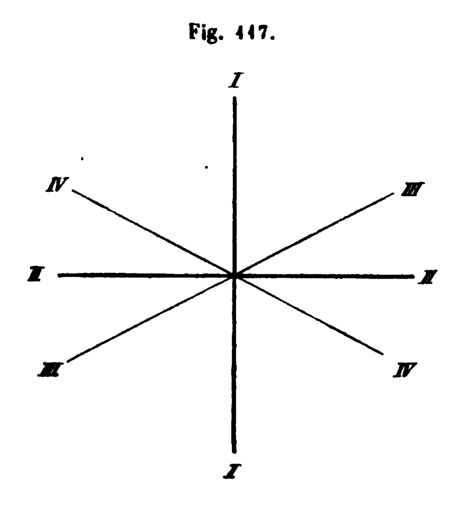
Denkt man sich die beliebige Ebene E senkrecht zu den vier tautozonalen Krystallflächen, so sind die an O liegenden Winkel der Dreiecke Orq, Oqp', $Op'p$ zugleich die Winkel, welche die Krystallflächen einschliessen; für diesen Fall liefert die obige Gleichung zugleich eine Beziehung zwischen den Indices und den Winkeln von vier in einer Zone liegenden Flächen, so dass man aus den Indices aller und den beiden Winkeln zwischen der ersten und zweiten, und zwischen der zweiten und dritten, den Winkel, welchen die vierte mit der dritten bildet, berechnen kann. Man sieht nun leicht ein, dass man zwar drei Flächen, welche sich in einer Geraden schneiden, von beliebigen Winkeln gegen einander und beliebigen, nur den Bedingungen der Tautozonalität genügenden Indices annehmen kann, welche stets eine mögliche Krystallzone darstellen, — dass aber keine weitere Fläche

mit beliebigem Winkel gegen die ersten drei möglich, da eine solche im Allgemeinen einen irrationalen Werth jenes anharmonischen Verhältnisses liefern würde. Die ersten drei Flächen bestimmen also die Zone vollständig, da in derselben nur noch solche vorkommen können, welche einen rationalen Werth jenes anharmonischen Verhältnisses liefern.

Indem man für die verschiedenartigsten Complexe von Ebenen prüft, ob sie dieser Bedingung genügen, kann man diejenigen ausfindig machen, welche in Folge des Gesetzes der Rationalität der Indices (von welchem obige Bedingung ja nur eine Consequenz ist) überhaupt krystallonomisch möglich sind, und auf diesem Wege hat V. von Lang a. a. O. nachgewiesen, dass es nur sechs Klassen von Krystallen geben kann, welche genau mit denjenigen übereinstimmen, welche die Erfahrung kennen gelehrt hat.

Die Unterschiede dieser sechs Klassen beruhen auf einer Eigenschaft der Krystalle, welche am geeignetsten zuerst durch ein Beispiel klar gemacht wird: die theoretische Herleitung aller krystallonomisch möglichen Flächencomplexe lehrt, dass in der Zone zweier auf einander normaler Ebenen *I* und *II* Fig. 117, und einer dritten *III*, welche einen beliebigen Winkel mit jenen einschliesst, stets eine vierte *IV* möglich ist, welche mit *I* und *II* denselben Winkel nach der entgegengesetzten Seite einschliesst, wie *III*. Dasselbe gilt für jede beliebige Fläche der Zone, welche wir statt *III* nehmen; wenn wir uns also alle in dieser Zone möglichen Flächen einander in der Zonenaxe schneidend denken, muss dieser ganze Flächencomplex sowohl durch die Ebene *I*, als durch *II*, in genau gleiche und entgegengesetzte Hälften zerlegt werden. Eine derartige Ebene, wie *I* und *II* es sind, welche den Complex aller möglichen Flächen derart durchschneidet, dass zu jeder Ebene eine zweite vorhanden ist, welche denselben Winkel nach der anderen Seite mit ihr einschliesst, nennt man eine Symmetrieebene dieses Flächencomplexes, und sagt z. B. von den Flächen *III* und *IV* Fig. 117, dass sie symmetrisch zu *I* und *II* liegen. Die Winkel, welche zusammengehörige Flächen mit einander bilden, werden also durch die Symmetrieebenen derselben Zone halbirt.

Fig. 117.



Eine Krystallform ist aber niemals ein Flächencomplex von nur einer Zone, weil dieser den Raum nicht allseitig umschliesst, sondern ein Complex von Flächen, welche mehreren Zonen angehören. Auch ein solcher kann,

wie sich ebenfalls theoretisch beweisen lässt, Symmetrieebenen besitzen. Die Symmetrieebene eines derartigen Flächencomplexes, d. h. eines Krystalles, hat man alsdann in folgender Weise zu definiren: denkt man sich diese Ebene mit allen **möglichen** Flächen des Krystalls durch einen Punkt gelegt, so muss zu jeder Fläche desselben eine zweite vorhanden sein, welche so liegt, dass die Symmetrieebene mit beiden in eine Zone fällt und den Winkel derselben halbirt.*)

Ist dies der Fall, so wird der Complex aller möglichen Flächen des Krystalls durch die Symmetrieebene in zwei Hälften zerlegt, welche genau gleich und entgegengesetzt sind, von denen das eine das Spiegelbild des anderen darstellt. Dasselbe findet in Bezug auf die Symmetrieebene auch statt, wenn man sich alle Flächen gleich weit von einem Punkte entfernt, und durch diesen die Symmetrieebene gelegt denkt; der Flächencomplex zeigt uns dann das geometrische Ideal einer Krystallform, welches jene Ebene in zwei symmetrische Hälften zerlegt. Denken wir uns von irgend einem bestimmten Punkte, z. B. einer Ecke des Krystalls (einem Punkte, in welchem sich drei oder mehr Flächen durchschneiden) eine Normale zur Symmetrieebene gefällt und jenseits derselben um dieselbe Strecke verlängert, so muss sich daselbst eine genau gleiche Ecke des Krystalls befinden. Man kann daher eine Symmetrieebene eines Krystalls auch definiren als diejenige Ebene, zu der alle Normalen auf beiden Seiten in gleichem Abstande gleichartige Punkte der Form durchschneiden, wobei vorausgesetzt ist, dass alle Flächen gleichen Abstand von einem Punkte haben. Die Richtung der Normalen zu einer Symmetrieebene nennt man eine Symmetrieaxe.

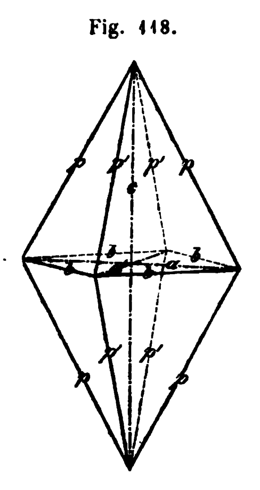
Die Symmetrie der Krystalle, d. h. das Vorhandensein oder Fehlen von Symmetrieebenen ist es nun, welches eine Verschiedenheit derselben bedingt. Unter den Symmetrieebenen selbst sind aber wieder zweierlei Arten zu unterscheiden.

Es giebt nämlich Krystalle, welche symmetrisch sind zu einer oder mehreren Ebenen, in welchen sich einige durch die Symmetrie ausgezeichnete Richtungen befinden, welche man beliebig mit einander vertauschen kann, ohne dadurch an der Krystallform irgend etwas zu ändern. Eine solche Form ist z. B. die in Fig. 118 dargestellte sogen. tetragonale Pyramide, welche von vier parallelen Flächenpaaren gebildet wird und deren horizontaler Durchschnitt durch die mit *b* bezeichneten Kanten ein rechtwinkeliger ist, während der verticale durch die Kanten *p* oder *p'* die Gestalt eines Rhombus besitzt. Sowohl der bezeichnete horizontale, als jeder der beiden verticalen Durchschnitte durch die Kanten der Form sind Symmetrieebenen derselben, da sich sowohl an den Kanten *p* und *p'* die Flächen unter gleichen Winkeln, als auch an den Kanten *b* unter gleichen, aber von jenen verschiedenen Winkeln schneiden. In der ersten, horizontalen Sym-

*) Ist der Winkel, welchen eine Fläche mit der Symmetrieebene einschliesst, = 90°, so folgt aus dieser Definition, dass die zweite Fläche mit der ersten zusammenfällt.

metrieebene liegen die beiden auf einander senkrechten Richtungen *a* und *a'*, welche die Winkel zwischen zwei benachbarten Kanten *b* halbiren (bei gleicher Entfernung aller Flächen von einander sind es die Diagonalen des horizontalen Durchschnitts, welcher alsdann die Gestalt eines Quadrats hat). Diese beiden Richtungen *a* und *a'* sind offenbar Symmetrieaxen, denn sie sind die Normalen zu den beiden durch die Kanten *p'* und *p* gehenden Symmetrieebenen. Dreht man nun die Krystallform so, dass die verticale Richtung *c* sich selbst parallel bleibt, aber *a* in die Richtung kommt, welche vorher *a'* hatte, und *a'* in diejenige von *a*, so bleibt der rechtwinkelige Querschnitt offenbar sich selbst parallel, also sind alle Flächen der Gestalt in der neuen Stellung parallel den Flächen derselben in der vorigen, d. h. die Krystallform ist dieselbe geblieben, während die Richtungen *a* und *a'* vertauscht worden sind. Solche Symmetrieaxen, wie *a* und *a'*, welche beliebig mit einander vertauscht werden können, ohne dass dadurch die Krystallform geändert wird, nennt man **gleichwerthige Symmetrieaxen**. Das Vorhandensein von Symmetrieebenen, in welchen sich mehrere gleichwerthige Symmetrieaxen befinden, bedingt einen höheren Grad von Regelmässigkeit der betreffenden Krystallgestalten, daher nennt man solche **reguläre** oder **Haupt-Symmetrieebenen**, und deren Normalen »Haupt-Symmetrieaxen« oder kurz »**Hauptaxen**«.

Fig. 118.



Die beiden andern, verticalen Symmetrieebenen der tetragonalen Pyramide Fig. 118 sind keine regulären; denn betrachten wir z. B. diejenige, welche durch die vier mit *p* bezeichneten Kanten zu legen ist, in welcher sich die Symmetrieaxen *a* und *c* befinden. Vertauscht man diese beiden Richtungen in gleicher Weise mit einander, wie vorher *a* und *a'*, so wird der horizontale Querschnitt der Form in der neuen Stellung ein Rhombus mit den Diagonalen *c* und *a'*, folglich sind die Flächen nicht mehr denjenigen in der ersten Stellung parallel; *a* und *c* sind keine gleichwerthigen Richtungen. Ebenso wenig gelingt es, weder in der Ebene durch die Kanten *p*, noch in der ganz gleich beschaffenen durch die Kanten *p'*, irgend zwei gleichwerthige Symmetrieaxen zu finden; die Ebenen *ac* und *a'c* sind also **Symmetrieebenen** schlechthin, welche nicht den Charakter der Haupt-Symmetrieebenen besitzen. In der tetragonalen Pyramide haben wir somit eine Krystallform kennen gelernt, welche eine reguläre und zwei gewöhnliche Symmetrieebenen besitzt.

§. 36. **Eintheilung der Krystalle nach den Haupt-Symmetrieebenen. Das Grundgesetz der physikalischen Krystallographie.** Es wurde bereits oben bemerkt, dass die theoretische Herleitung der krystallonomisch möglichen Flächencomplexe das Resultat geliefert hat, dass es **sechs**

verschiedene Klassen von Krystallen geben muss. Der Unterschied derselben beruht auf ihrer Symmetrie, und ergiebt sich hierbei, dass mehrere derselben sich zwar durch die Zahl und Richtung ihrer gewöhnlichen Symmetrieebenen unterscheiden, aber gleich viel Haupt-Symmetrieebenen besitzen, so dass sie in Bezug auf diese zu einer gemeinsamen Abtheilung gehören. Untersucht man theoretisch, welche Haupt-Symmetrieebenen vorkommen können bei allen Arten von krystallonomisch möglichen Flächen, so findet man, dass nur drei Fälle stattfinden können: entweder besitzen die Krystalle keine Haupt-Symmetrieebene, oder eine, oder endlich drei, auf einander normale. Der letzte Fall ist derjenige des höchsten Grades der Symmetrie, welchen ein krystallonomisch möglicher Flächencomplex überhaupt haben kann. Nach den Haupt-Symmetrieebenen zerfallen demnach alle Krystalle in drei Hauptabtheilungen, deren geometrische Eigenschaften sich vollständig aus dem allgemeinen Grundgesetz der Krystallographie herleiten lassen. Diese sind, mit der regelmässigsten beginnend:

I. Die Krystalle besitzen drei auf einander senkrechte Haupt-Symmetrieebenen; in jeder derselben liegen folglich die Normalen zu den beiden anderen, und diese sind die gleichwerthigen Richtungen in jeder der drei Ebenen. Daraus ergiebt sich, dass die drei Normalen der regulären Symmetrieebenen, d. i. die drei Hauptaxen dieser Krystalle sämmtlich gleichwerthig sind.

II. Die Krystalle besitzen nur eine reguläre Symmetrieebene, also nur eine Hauptaxe; ausserdem sind sie jedoch noch nach anderen Ebenen symmetrisch.

III. Es ist keine Haupt-Symmetrieebene vorhanden; unter diesen Krystallen befinden sich sowohl solche, welche überhaupt keine Symmetrieebene haben, als auch solche, welche deren eine oder mehrere besitzen.

Ganz dieselben drei Klassen hat nun auch die Untersuchung der Krystalle in Bezug auf alle an solchen beobachteten Formen gelehrt, und es ist noch niemals eine Krystallform beobachtet worden, welche nicht einer dieser drei Abtheilungen angehört hätte. So bestätigt also die Erfahrung in der vollkommensten Weise die nur auf dem Naturgesetz der Rationalität der Indices aufgebauten theoretischen Schlüsse.

Eine viel höhere Bedeutung gewinnt aber jene Dreitheilung noch, wenn wir sie vergleichen mit den physikalischen Eigenschaften der Krystalle. Diese Eintheilung in drei Klassen fällt nämlich vollkommen zusammen mit derjenigen, durch welche wir im I. Abschnitt (vergl. S. 151) die sämmtlichen Krystalle in drei Abtheilungen gebracht haben; die **Symmetrie** der Krystalle ist es also, von welcher es abhängt, welcher **physikalischen** Klasse dieselben angehören.

Die gesammte Kenntniss des Zusammenhanges zwischen der Krystallform und den physikalischen Eigenschaften der Krystalle lässt sich in ein Gesetz zusammenfassen, welches man als **das Grundgesetz der physikalischen Krystallographie** bezeichnen kann. Dasselbe besteht aus zwei Theilen, welche sich indess gegenseitig bedingen, und lautet:

Jede geometrische Symmetrieebene eines Krystalls ist zugleich eine physikalische; zwei krystallographisch gleichwerthige Richtungen desselben sind es auch in physikalischer Beziehung.

Dieser Wortlaut bedarf einiger Erläuterungen: unter einer »physikalischen Symmetrieebene« ist eine solche Ebene des Krystalls zu verstehen, dass, wenn von allen Punkten einer beliebigen Geraden im Krystall Normalen auf sie gefällt und jenseits derselben bis auf dieselbe Länge, wie diesseits, fortgesetzt, — dass die Endpunkte aller dieser Normalen eine Gerade bilden, in welcher der Krystall physikalisch genau ebenso beschaffen ist, als in der ersten; d. h. in den Richtungen dieser beiden Geraden*) ist die Elasticität, die Lichtgeschwindigkeit, die Wärmeleitung, die Ausdehnung durch die Wärme u. s. f. genau die gleiche; und dies muss für jedes, in Bezug auf die in Rede stehende Ebene symmetrisch gelegene Paar von Richtungen stattfinden, um jener Ebene die Eigenschaften einer »physikalischen Symmetrieebene« zu ertheilen. Zwei Richtungen, also auch zwei Symmetrieaxen, sind »physikalisch gleichwerthig«, wenn in denselben der Krystall gleiche Elasticität, gleiche Lichtgeschwindigkeit, gleiches Wärmeleitungsvermögen, gleiche Ausdehnung mit der Temperatur u. s. w. besitzt.

Das hierdurch erläuterte Gesetz ist, wie bereits angedeutet, der inductiv gefundene Ausdruck der vorhandenen Beobachtungen über den Zusammenhang zwischen der Symmetrie und den physikalischen Eigenschaften der Krystalle. Das Studium dieses Zusammenhanges wird ein leichteres sein, wenn wir, wie es hier geschieht, dieses Gesetz an die Spitze stellen und von demselben deductiv das Detail jenes Zusammenhanges ableiten. Wir sahen, dass die Krystalle nach ihrer Symmetrie in drei Abtheilungen zerfallen. Die physikalischen Unterschiede dieser ergeben sich unmittelbar aus unserem Gesetz auf folgende Weise:

1) Krystalle mit drei senkrecht zu einander stehenden regulären Symmetrieebenen, folglich mit drei gleichwerthigen Hauptaxen: Die Elasticität dieser Krystalle muss in je zwei Richtungen, welche zu einer Symmetrieebene symmetrisch liegen, sowie in allen drei Hauptaxen gleich, kann aber verschieden sein in zwei nicht symmetrisch liegenden Richtungen. Das Gleiche ist mit der Cohäsion der Fall; hat diese in einer Richtung ein Minimum, findet also senkrecht dazu Spaltbarkeit statt, so muss sie genau das gleiche Minimum auch in allen denjenigen Richtungen zeigen, welche in Bezug auf die drei Haupt-Symmetrieebenen symmetrisch zu jener ersten liegen; es kann also ein solcher Krystall niemals nur eine Spaltungsrichtung haben. Ist z. B. eine Hauptaxe ein Minimum der Cohäsion, spaltet er also nach der dazu normalen Haupt-Symmetrieebene, so müssen auch die beiden anderen Hauptaxen solche Minima sein, er muss auch nach den beiden anderen gleichwerthigen

*) Legt man also durch diese beiden Geraden eine Ebene, so wird diese von der physikalischen Symmetrieebene senkrecht durchschnitten in einer graden Linie, welche den Winkel jener beiden halbirt.

Symmetrieebenen spalten. Die optische Elasticitätsfläche muss durch die drei Symmetrieebenen in gleiche und entgegengesetzte Hälften getheilt werden, und diese müssen in allen drei Fällen dieselben sein; ihre drei Axen, die Durchschnitte ihrer Symmetrieebenen, welche mit den krystallographischen zusammenfallen müssen, sind in Folge dessen gleich. Allen diesen Bedingungen kann unter den drei Arten von Elasticitätsflächen nur eine, die der isotropen Körper, deren Gestalt eine Kugel ist, genügen; die optische Elasticität und folglich die Geschwindigkeit des Lichtes ist also bei diesen Krystallen nach allen Richtungen gleich; dieselben sind einfach brechend. Das Gleiche muss alsdann auch für die Strahlen der Wärme gelten. Wir sahen im I. Abschnitt, dass, wenn in einem homogenen Krystall nach drei auf einander senkrechten Richtungen die Wärmeleitung, die Ausdehnung durch die Wärme, die electrischen und magnetischen Eigenschaften gleich sind, sie es in allen Richtungen sind. Wegen der krystallographischen Gleichwerthigkeit der drei Hauptaxen ist die Gleichheit jener Eigenschaften in diesen drei Richtungen, folglich auch in allen anderen, nothwendig. Aus dem Grundgesetz der physikalischen Krystallographie folgt also: die Krystalle mit drei gleichwerthigen Hauptaxen sind isotrop.

2) Krystalle mit einer regulären Symmetrieebene, also mit einer Hauptaxe: Die Elasticität muss nicht nur gleich sein in zwei zur Haupt-Symmetrieebene symmetrischen Richtungen (kann aber verschieden sein in verschiedenen, mit der Hauptaxe gleichen Winkel bildenden), sondern muss auch gleich sein in mehreren Richtungen innerhalb der Haupt-Symmetrieebene; wie diese jedoch liegen, hängt von der Lage der sonst noch vorhandenen gewöhnlichen Symmetrieebenen ab. Die Cohäsion kann ein Minimum haben in der Richtung der Hauptaxe; in diesem Falle ist der Krystall spaltbar nach der Haupt-Symmetrieebene. Findet aber ein Minimum der Cohäsion in anderer Richtung statt, so erfordert dieses ein gleiches in der zur Haupt-Symmetrieebene, — und, da diese Krystalle stets noch andere Symmetrieebenen haben, gleiche in den zu diesen — symmetrisch gelegenen Richtungen. Die optische Elasticitätsfläche muss symmetrisch zur Haupt-Symmetrieebene sein, ihr Durchschnitt mit dieser muss aber die Gestalt eines Kreises haben, da in dieser Ebene mehrere gleichwerthige Symmetrieaxen existiren, in welcher demnach auch die optische Elasticität gleich sein muss. Dagegen darf die Elasticitätsfläche nach keiner anderen Ebene einen kreisförmigen Durchschnitt zeigen, weil keine weitere reguläre Symmetrieebene vorhanden ist. Diesen Bedingungen genügt nur die Elasticitätsfläche der einaxigen Krystalle, und nur in dem Falle, dass die optische Axe mit der krystallographischen Hauptaxe zusammenfällt. Alsdann bildet die Haupt-Symmetrieebene den Kreisschnitt der Fläche und theilt sie auch symmetrisch. Die optische Elasticitätsfläche ist ausserdem noch symmetrisch zu allen Ebenen, welche sich in der Axe schneiden (ihren Hauptschnitten), aber zu keiner anderen Ebene, also können bei den einaxigen Krystallen ausser der regulären nur noch solche Symmetrie-

ebenen vorkommen, welche der Axe parallel sind. In der That giebt es bei den Krystallen mit einer Hauptaxe nur noch solche, welche normal zur Haupt-Symmetrieebene stehen. Was für die Strahlen des Lichtes gilt, findet auch für diejenigen der Wärme statt. Die Ausdehnung durch erhöhte Temperatur muss gleich sein in allen Richtungen parallel der Haupt-Symmetrieebene, und von dieser Ebene aus nach beiden Seiten symmetrisch zu- oder abnehmen, also muss die thermische Axe der Hauptaxe ebenfalls parallel sein. Die magnetischen oder diamagnetischen Eigenschaften müssen ihr Minimum oder ihr Maximum haben in der Richtung der Hauptaxe, und ihr Maximum, resp. Minimum parallel der Haupt-Symmetrieebene. Wir haben also aus dem allgemeinen Gesetz des Zusammenhanges zwischen Krystallform und physikalischen Eigenschaften zu schliessen, dass die Krystalle mit einer Haupt-Symmetrieebene physikalisch einaxig sind, und dass ihre physikalische Hauptaxe zusammenfällt mit ihrer krystallographischen.

3) Krystalle ohne reguläre Symmetrieebene: Wir haben bei den beiden ersten Klassen von Krystallen gesehen, dass einer Haupt-Symmetrieebene stets ein Kreisschnitt der optischen Elasticitätsfläche entspricht. Es lässt sich dieses aus folgenden Betrachtungen allgemein beweisen: Eine Haupt-Symmetrieebene muss nach dem Grundgesetz der physikalischen Krystallographie zugleich eine Symmetrieebene der Elasticitätsfläche sein; nehmen wir für diese den allgemeinsten Fall, dass ihre drei Axen, die Durchschnitte ihrer drei zu einander senkrechten Symmetrieebenen, ungleich sind (d. i. die Elasticitätsfläche der zweiaxigen Krystalle), so bildet jede krystallographische Symmetrieebene, weil sie mit einer solchen der Elasticitätsfläche zusammenfällt, mit ihr einen Durchschnitt, dessen Gestalt eine ellipsenähnliche Curve ist, deren grosse und kleine Axe sie symmetrisch theilen, weil sie zugleich die Durchschnittsrichtungen mit den beiden anderen Symmetrieebenen der krummen Oberfläche bilden. Aus diesem Grunde fallen sie zusammen mit den beiden Symmetrieaxen, welche in der ersterwähnten krystallographischen Symmetrieebene liegen; ist diese nun eine reguläre, d. h. sind die beiden in ihr liegenden Symmetrieaxen gleichwerthig, so müssen die grosse und kleine Axe jener Curve gleich werden, während sie nach beiden symmetrisch bleiben muss. Dies ist nur möglich, wenn sie in einen Kreis übergeht. Da sich die Ausdehnung durch die Wärme, die Leitung der Wärme u. a. physikalische Eigenschaften in ähnlicher Weise ändern, so ist auch auf diese der analoge Schluss anzuwenden, so dass nur aus dem empirischen Gesetz, welches wir diesen Betrachtungen zu Grunde gelegt haben, folgt: Alle Richtungen eines Krystalls, welche einer Haupt-Symmetrieebene desselben parallel gehen, haben gleiche Lichtgeschwindigkeit für jede einzelne Farbe, gleiche Wärmeleitungsfähigkeit, gleiche Ausdehnung durch die Wärme, gleiche Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wärmestrahlen und gleichen Para- oder Dia-

magnetismus. Umgekehrt gilt auch das Gesetz: Jede Ebene, in welcher alle Richtungen diese Gleichheit zeigen, ist eine Haupt-Symmetrieebene des betreffenden Krystalls. Bei den isotropen Krystallen erfüllen drei auf einander senkrecht stehende Ebenen diese Bedingungen, folglich müssen diese drei zu einander normale Haupt-Symmetrieebenen haben, wie es in der That der Fall ist. Bei den physikalisch einaxigen ist jene Gleichheit nur in der zur physikalischen Hauptaxe normalen Ebene der Fall, es kann also nur diese eine krystallographische Haupt-Symmetrieebene derselben sein.

Gehen wir nun endlich zu den Krystallen ohne Haupt-Symmetrieebene über, so folgt aus diesen Betrachtungen, dass in denselben keine Ebene existiren kann, in welcher alle Richtungen die oben näher bezeichnete physikalische Gleichheit besitzen. Alsdann müssen dieselben die Klasse der optisch zweiaxigen bilden, denn nur bei diesen fehlt eine solche Ebene. Je nachdem die Krystalle keine, eine oder mehrere gewöhnliche Symmetrieebenen besitzen, ist die gegenseitige Lage der Elasticitätsaxen für die Schwingungen des Lichtes, der Hauptrichtungen der thermischen Ausdehnung u. s. f. eine verschiedene oder die gleiche. Die mehrfachen, hier vorkommenden, von der Symmetrie der Krystalle abhängigen Verhältnisse werden wir bei der Betrachtung der einzelnen Abtheilungen der optisch zweiaxigen Krystalle kennen lernen.

§. 37. **Die Krystallsysteme.** Die theoretische Herleitung aller krystallonomisch möglichen Flächencomplexe lehrt, dass an denselben zweierlei Symmetrieebenen möglich sind, welche wir als reguläre und gewöhnliche unterschieden haben. Die Symmetrie einer Krystallgestalt ist gegeben, wenn wir deren Symmetrieebenen ihrer Lage nach kennen und wissen, welcher Art dieselben sind. Je mehr solcher vorhanden sind, desto höher ist der Grad der Symmetrie; von zwei Krystallformen, welche gleich viele Symmetrieebenen derselben Art besitzen, welche sich bei beiden unter denselben Winkeln schneiden, sagen wir, dass sie gleichen Grad der Symmetrie besitzen. Die Gesammtheit aller Krystallformen, welche gleichen Grad der Symmetrie besitzen, nennt man ein **Krystallsystem.**

Wie bereits bemerkt, ergiebt sich theoretisch aus dem Gesetz der Rationalität der Indices, dass unter allen krystallonomisch möglichen Flächencomplexen nur sechs Arten von Symmetrie vorkommen, es kann also nur sechs Krystallsysteme geben. Zu demselben Resultat gelangt man auf einem anderen, ebenfalls theoretischen Wege, wenn man von der Vorstellung der Zusammensetzung der Krystalle aus regelmässig netzförmig geordneten Molekülen und der durch die physikalischen Eigenschaften bewiesenen Thatsache ausgeht, dass die regelmässige Anordnung um jedes Theilchen herum die gleiche ist. Der hierauf gestützte Beweis, dass es nur sechs Krystallsysteme giebt, findet sich in besonders klarer und einfacher Form gegeben in der bereits erwähnten Arbeit von Sohnke, über die Anordnung der Moleküle in Krystallen (Poggendorff's Annalen der Physik, 132. Bd.).

Die auf so verschiedenem Wege gewonnenen theoretischen Schlüsse sind nun vollständig bestätigt worden durch die Erfahrung, indem man bis jetzt wohl Krystalle aller jener sechs Arten der Symmetrie, aber noch niemals einen gefunden hat, der nicht einem der sechs Krystallsysteme hinsichtlich seiner Symmetrie angehört hätte. Mehrere Krystallsysteme stimmen mit einander überein in der Zahl der regulären Symmetrieebenen und unterscheiden sich nur durch die gewöhnlichen; diese bilden dann zusammen eine näher zusammengehörige Gruppe, und solcher Hauptabtheilungen giebt es, wie wir im vor. § gesehen haben, drei, welche genau den drei physikalischen Abtheilungen der Krystalle entsprechen. Ebenso wenig, wie es zwischen diesen Uebergänge giebt, so giebt es auch keine solchen zwischen den verschiedenen Krystallsystemen, welche einer Hauptabtheilung angehören, wie dies bei der speciellen Betrachtung derselben nachgewiesen werden wird. Folgendes sind nun die sechs Krystallsysteme, geordnet nach dem Grade ihrer Symmetrie:

I. 1) Die Krystalle mit drei zu einander normalen regulären Symmetrieebenen bilden nur ein einziges Krystallsystem, welches, weil es den höchstmöglichen Grad von Symmetrie darstellt, das reguläre genannt wird, und besitzen ausserdem noch sechs, sich unter 120° durchschneidender Symmetrieebenen.

II. Die Krystalle mit einer Haupt-Symmetrieebene zerfallen in zwei Systeme:

2) Das hexagonale, so genannt, weil die Haupt-Symmetrieebene die Formen in hexagonalen Umrissfiguren schneidet, welche entweder gleichwinkelige Sechsecke oder einfach davon abzuleitende Formen sind. Die hexagonalen Krystalle besitzen ausser der einen regulären noch sechs zu jener normale, einander in der Hauptaxe unter Winkeln von 30° durchschneidende Symmetrieebenen.

Das 3. System heisst das tetragonale, weil seine Haupt-Symmetrieschnitte sämmtlich tetragonale, d. h. rechtwinkelige Vierecke oder davon abgeleitete Figuren sind. Die Krystalle desselben haben ausser der Haupt-Symmetrieebene noch vier andere, zu jener normal und einander (in der Hauptaxe) unter Winkeln von 45° schneidend.

III. Die Krystalle ohne Haupt-Symmetrieebene zerfallen in drei Systeme:

4) Das rhombische mit drei auf einander senkrechten Symmetrieebenen; der Name kommt daher, dass die Symmetrieschnitte aller Formen sämmtlich die Gestalt von Rhomben besitzen.

5) Das monosymmetrische*) Krystallsystem, der Inbegriff aller Formen, welche nur eine einzige Symmetrieebene haben.

6) Das asymmetrische*) System, d. h. die Krystalle ohne Symmetrieebene.

---

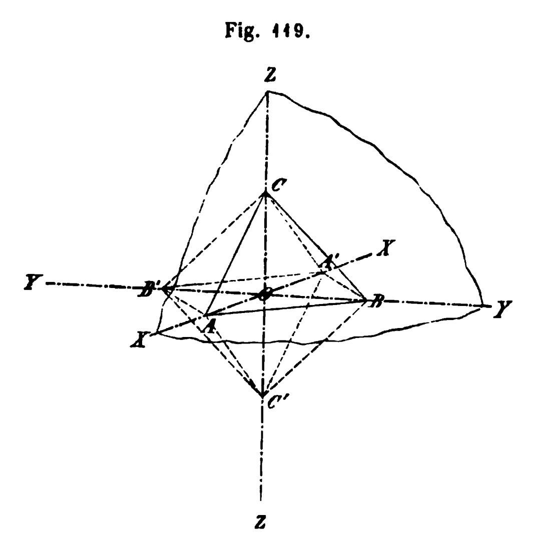
*) Die bisher gebrauchten Namen »monoklinisch« und »triklinisch« für das fünfte und sechste System sind nicht, wie die übrigen, auf die Gestalt der Symmetrieschnitte, also auf die Symmetrie, als das eigentliche Wesen des Krystallsystems, gegründet, sondern

Die folgende Tabelle wird am leichtesten eine Uebersicht über die Eintheilung der Krystalle in geometrischer und physikalischer Beziehung geben:

Geometr. Abth.	*Physikal. Abth.*	*Zahl und Art der Symmetrieebenen:*	*Krystallsystem:*
I. Kr. m. 3 Hauptaxen	Isotrope Kryst.	3 Hauptsymmetrieebenen u. 90°, 6 Symmetrieebenen u. 120°.	1) Reguläres Syst.
II. Kr. m. 1 Hauptaxe	Einaxige Kryst.	1 Hauptsymmetrieebene, 6 Symmetrieebenen u. 30°.	2) Hexagonales Syst.
		1 Hauptsymmetrieebene, 4 Symmetrieebenen u. 45°.	3) Tetragonales Syst.
III. Kr. ohne Hauptaxe	Zweiaxige Kryst.	3 Symmetrieebenen u. 90°.	4) Rhombisches Syst.
		1 Symmetrieebene.	5) Monosymm. Syst.
		Keine Symmetrieeb.	6) Asymmetr. Syst.

§. 38. **Einfache Krystallformen und Combinationen. Krystallreihe. Holoëdrie und Hemiëdrie.** Ehe wir zur speciellen Betrachtung der einzelnen, scharf von einander getrennten Klassen der Krystalle übergehen, sind noch einige allgemeine Verhältnisse zu erläutern.

Fig. 119.



Bei denjenigen Krystallen, welche eine oder mehrere Symmetrieebenen haben, erfordert die Existenz einer beliebigen Fläche (mit ihrer parallelen Gegenfläche, welche mit ihr als krystallonomisch ident betrachtet werden kann) diejenige einer oder mehrerer, welche in Bezug auf jene Ebenen symmetrisch zur ersten liegen. Nur durch die Coëxistenz dieser Flächen ist eben die Symmetrie der Krystalle erfüllt. Betrachten wir z. B. einen Krystall mit drei zu einander senkrechten Symmetrieebenen XOY, XOZ, YOZ Fig. 119, und sei ABC irgend eine Fläche desselben, so erfordert die Symmetrie nach der Ebene XOY die Existenz einer gleich geneigten ABC' auf

---

auf den rein willkürlichen Gebrauch, bei der Berechnung der Formen und Ableitung derselben von einer Grundform, drei Kanten als Krystallaxen zu Grunde zu legen, welche im monosymmetrischen System einen schiefen und zwei rechte Winkel bilden, im asymmetrischen natürlich drei schiefe Winkel bilden müssen.

der anderen Seite jener Symmetrieebene; die Symmetrie nach der Ebene *XOZ* erfordert ebenso zwei weitere Flächen *AB'C* und *AB'C'*, symmetrisch liegend zu *ABC* und *ABC'* in Bezug auf *XOZ*; endlich erfordert die Symmetrie nach *YOZ* zu allen vier bisher genannten Flächen vier symmetrisch in Bezug auf die Ebene *YOZ* liegende Flächen auf der hinteren Seite des Krystalls, nämlich *A'BC*, *A'BC'*, *A'B'C*, *A'B'C'*. Bei dem vorliegenden Grade der Symmetrie sind es also acht Flächen, welche sich vermöge desselben gegenseitig bedingen. Wäre nur eine Symmetrieebene vorhanden, so würde die Existenz irgend einer gegen dieselbe geneigten Krystallfläche nur diejenige einer zweiten, mit derselben Neigung auf der anderen Seite der Symmetrieebene liegenden Fläche erfordern, und weiter keiner. Ist endliech gar kine Symmetrieebene vorhanden, so bedingt keine Fläche ausser ihrer parallelen Gegenfläche die Existenz einer andern, und die gegenseitige Abhängigkeit der Flächen besteht nur noch darin, dass sie sämmtlich dem Gesetz der Rationalität der Indices genügen.

Die Gesammtheit aller der Flächen, deren Auftreten vermöge der Symmetrie des Krystalles durch die Existenz irgend einer derselben bedingt wird, nennt man eine einfache Krystallform. So bilden also die acht, aus vier parallelen Paaren bestehenden Flächen *ABC* u. s. f. Fig. 119 eine einfache Form, weil jede derselben wegen der drei normalen Symmetrieebenen die Existenz aller übrigen, aber weiter keiner, erfordert. So bilden ferner schon zwei parallele Flächenpaare, mit gleicher Neigung gegen die Symmetrieebene, sobald nur eine solche vorhanden ist, eine einfache Krystallform. Ist endlich keine Symmetrieebene da, so wird die vollständige einfache Form schon gebildet von jeder einzelnen Fläche mit ihrer parallelen Gegenfläche.

Man sieht nun leicht, dass die acht Flächen *ABC* u. s. f. Fig. 119, wenn man die drei Symmetrieaxen zu Axen im Sinne des §. 33, die drei Symmetrieebenen also zu Axenebenen wählt, sämmtlich gleich grosse Parameter besitzen, so dass sie also, wenn sie auf irgend eine andere Fläche als Grundform bezogen werden, sämmtlich gleiche Indices (abgesehen vom Vorzeichen) oder, was dasselbe bedeutet, gleiche Parametercoëfficienten erhalten. Wenn in Fig. 119 nur die Ebene *XOZ* eine Symmetrieebene ist, *XOY* und *YOZ* dagegen zwei beliebige Krystallflächen, welche sich in der Symmetrieaxe *OY* (normal zu *XOZ*) schneiden, und wir wählen wieder die Symmetrieebene als eine Axenebene, die erwähnten zwei Flächen als die beiden anderen, so erfordert die Existenz des Flächenpaares *ABC* und *A'B'C'* nur diejenige von *AB'C* und *A'BC'*, und diese vier Flächen haben bei dieser Wahl der Axen ebenfalls gleiche Indices; es existiren aber ausserdem noch vier andere mögliche Flächen desselben Krystalls *ABC'*, *AB'C'*, *A'BC* und *A'B'C*, welche die gleichen Indices besitzen, aber nicht zu derselben einfachen Form gehören, sondern für sich eine andere bilden. Sind endlich *XOY*, *XOZ* und *YOZ* drei beliebige Flächen eines Krystalls, welcher keine einzige Symmetrieebene besitzt, und wählen wir dieselben zu Axenebenen, so bildet, wie wir sahen, *ABC* mit ihrer Gegen-

fläche $A'B'C'$ allein die vollständige einfache Krystallform, es existiren aber noch drei Paare paralleler Flächen, also drei andere einfache Krystallformen, welche ebenfalls, abgesehen von Vorzeichen, dieselben Indices haben, wie jene.

Man ersieht aus diesen Beispielen, dass man die Wahl der Axenebenen zwar so treffen kann, dass alle Flächen einer einfachen Form die gleichen Indices erhalten, dass aber nicht immer die Gesammtheit aller Flächen mit gleichen Indices auch eine einzige einfache Krystallform bildet, sondern dieselben oft mehreren einfachen Formen angehören können. Da nun ausserdem auch noch die Wahl der Axenebenen eine ganz willkürliche ist, so darf man in keinem Falle die »einfache Form« definiren als den Inbegriff aller Flächen mit gleichen Indices, sondern nur als derjenigen aller durch die Symmetrie sich gegenseitig bedingenden Flächen. Da man zu Axenebenen jede beliebigen drei Flächen eines Krystalles wählen kann, und doch stets rationale Indices für alle übrigen Flächen erhält (Grundgesetz der Krystallographie, §. 33), so sind vielmehr bei beliebiger Wahl der Axenebenen die Indices der verschiedenen Flächen einer einfachen Form im Allgemeinen verschieden, und es bedarf einer ganz bestimmten Wahl der Axenebenen und somit der Axen, um sie gleich zu erhalten. Es ist nun allgemein üblich, die Axenebenen so auszuwählen, dass die Parameterlängen aller Flächen einer jeden einfachen Form dieselben werden, und wir werden bei der Betrachtung der einzelnen Formen demselben Grundsatze folgen, dürfen aber niemals dabei vergessen, dass diese Wahl ganz willkürlich ist, dass sie nicht aus theoretischen, sondern nur aus praktischen Gründen geschieht, weil dadurch das Verständniss der Formen und deren Berechnung erleichtert und vereinfacht werden.

Nur solche einfache Formen können allein die Umgrenzung eines vollständig ausgebildeten Krystalles bilden, welche für sich überhaupt einen Raum nach allen Seiten umschliessen können. Alle andern können nur zu mehreren an einem Krystall auftreten. Eine Krystallform, welche aus den Flächen mehrerer einfachen Formen zusammengesetzt ist, nennt man eine Combination, und unterscheidet zwei-, drei- und mehrzählige Combinationen, welche aus zwei, drei oder mehr einfachen Formen bestehen*). Die Durchschnittsrichtungen zweier Flächen, welche zwei verschiedenen einfachen Formen angehören, heissen Combinationskanten.

Aus dem Gesetz der Rationalität der Indices folgt unmittelbar, dass nur solche einfache Formen mit einander combinirt erscheinen können, deren entsprechende Parameter in rationalem Verhältniss zu einander stehen. Bei einem bestimmten Stoffe sind deren unendlich viele theoretisch möglich.

*) Will man an Modellen zweier einfacher, combinationsfähiger Formen sich davon Rechenschaft geben, in welcher Weise die Flächen der einen an der andern auftreten müssen, so hat man beide so neben einander zu halten, dass die zu Axen gewählten Richtungen, folglich auch alle Symmetrieebenen, bei beiden genau parallel sind, und alsdann die Flächen der ersteren sich parallel verschoben zu denken, bis sie die der andern schneiden. Alsdann fallen die Axen für beide zusammen und die Combination hat, wie dies vermöge des Grundgesetzes der Krystallographie nöthig ist, dieselben Symmetrieebenen, wie die einfachen, sie zusammensetzenden Formen.

von denen indess bei den allermeisten Körpern nur die mit den einfachsten Indices wirklich vorkommen, während bei denjenigen, deren Krystalle viele einfache Formen zu zeigen pflegen, natürlich auch solche mit weniger einfachen Indices vorkommen, aber im Durchschnitt um so seltener, je weniger einfach diese Zahlen sind*). Die Gesammtheit aller an einem Körper möglichen, einfachen Formen, also aller, welche mit einander combinirt auftreten können, nennt man die Krystallreihe desselben. Manche Stoffe zeigen, selbst wenn sie unter sehr abweichenden äussern Umständen zur Krystallisation gelangen, stets dieselben einfachen Formen, andere sind geneigt, bei geringer Verschiedenheit der Bildungszustände, andere Formen zu zeigen, ein Umstand, der zuweilen die Feststellung der Zugehörigkeit derselben zu einer Krystallreihe, also der Identität der Krystallform, erschwert. Da aber durch die Kenntniss der Elemente eines Krystalls die ganze Krystallreihe bestimmt ist, so muss es als ein Umstand von untergeordneter Wichtigkeit angesehen werden, welche von den möglichen einfachen Formen nun wirklich an den Krystallen des Körpers auftreten. Die Auffindung neuer einfacher Formen an Krystallen eines Körpers, dessen Krystallform bereits bekannt, ist demnach in rein krystallographischer Beziehung im Allgemeinen ohne Interesse, wenn es sich nicht um die Erforschung der Abhängigkeit handelt, in welcher das Auftreten gewisser Formen von den Umständen bei der Bildung des Krystalls steht.

Es ist soeben erwähnt worden, dass es im Allgemeinen von den äusseren Umständen während der Krystallisation abhängt, welche von den einfachen Formen einer Krystallreihe sich ausbilden. Die verschiedenen einfachen Formen einer und derselben Krystallreihe sind demnach hinsichtlich ihres Auftretens von einander völlig unabhängig. Es giebt nun aber eine Anzahl Substanzen, bei denen diese gegenseitige Unabhängigkeit des Auftretens auch stattfindet zwischen den beiden Hälften einer und derselben einfachen Form, welche hierdurch ganz in das Verhältniss zu einander treten, in welchem zwei verschiedene einfache Formen einer Krystallreihe stehen, welche sich durch Auftreten oder Fehlen**), Vorherrschen oder Unterordnung in den Combinationen, Oberflächenbeschaffenheit der Flächen u. s. f. unterscheiden können. Diese Erscheinung tritt als

*) Selbstverständlich hängt der Zahlenwerth derselben ganz von der Wahl der Grundform ab, und es empfiehlt sich daher aus praktischen Gründen, dieselbe so zu treffen, dass die Indices der beobachteten Formen möglichst einfach werden, ohne dass indess dieser Wahl irgend eine theoretische Wichtigkeit beizulegen ist.

**) In gewissen Fällen schliessen sich die beiden Hälften sogar aus, wenn nämlich mit dem Auftreten der einen und der andern entgegengesetzte physikalische Eigenschaften des Krystalls gesetzmässig verbunden sind. Ist dies jedoch nicht der Fall, so ist a priori zu schliessen, dass die beiden Hälftgestalten einer Form mit sehr einfachen Zahlenwerthen der Indices ungleich häufiger an einem Krystall zusammen auftreten werden, als diejenigen einer Form mit complicirten Indices; denn die letzteren sind an sich weit seltener, und somit die Wahrscheinlichkeit, dass beide, in ihrem Auftreten von einander ganz unabhängige, Hälften zusammen vorkommen, noch weit kleiner (das Quadrat der ersteren). In der That wird dieser Schluss durch die Erfahrung bestätigt.

etwas Gesetzmässiges nur dann ein, wenn in Bezug auf die Regelmässigkeit der Auswahl der Hälfte unter allen Flächen einer einfachen Form gewissen Bedingungen Genüge geleistet wird. Diese sind die folgenden:

Denken wir uns alle Flächen der einfachen Form gleich weit von einem Punkte entfernt, und in diesem sämmtliche vorhandenen Symmetrieaxen sich schneidend, so muss die Hälfte der Flächen in der Weise ausgewählt werden, dass, wenn sie allein vorhanden ist, die beiden Seiten jeder Symmetrieaxe, von jenem Durchschnittspunkte an gerechnet, in gleichen Abständen von gleich vielen Flächen, welche mit einander und mit der Symmetrieaxe in beiden Fällen gleiche Winkel einschliessen, geschnitten werden; diese Abstände und Winkel müssen aber auch noch die gleichen sein für verschiedene Symmetrieaxen, wenn diese gleichwerthig sind. Alsdann bildet die eine Hälfte der Flächen für sich eine Form, deren Flächen sämmtlich gleiche Umrissfigur haben.

Formen von der halben Flächenzahl der möglichen, welche diesen Bedingungen genügen, nennt man hemiëdrische, und diejenigen Körper, welche dergleichen Formen zeigen, hemiëdrisch krystallisirende. Nach der obigen Definition der Hemiëdrie ist es klar, dass eine solche nicht existiren kann im asymmetrischen Krystallsystem, weil daselbst jede einfache Form nur aus einer Fläche besteht. Es ist also nur bei den ersten fünf Krystallsystemen eine Hemiëdrie möglich. Bei der näheren Betrachtung werden wir aber sehen, dass bei den vier ersten, namentlich bei allen mit einer oder mehreren Haupt-Symmetrieebenen, sogar mehrere Arten von Hemiëdrie existiren. Es zeigt sich alsdann, dass ein hemiëdrisch krystallisirender Körper nicht nur niemals andere, als hemiëdrische Formen, sondern auch stets nur diejenigen einer Art von Hemiëdrie aufweist. Die ganzflächigen Formen nennt man entsprechend holoëdrische. Nach Obigem krystallisirt also ein Körper entweder holoëdrisch, und zeigt dann nur holoëdrische Formen, oder in einer bestimmten Art der Hemiëdrie und zeigt dann nur diejenigen Formen, welche derselben entsprechen.

In denjenigen Krystallsystemen, in welchen mehrere Arten von Hemiëdrie möglich sind, können die hemiëdrischen Formen einer Art noch einmal in zwei Hälften zerlegt werden nach dem Gesetz einer andern Art der Hemiëdrie, und können hierdurch Formen entstehen, welche nur ein Viertel der Flächenzahl der holoëdrischen besitzen, und doch den oben aufgestellten Bedingungen der Hemiëdrie vollständig genügen. Man nennt diese Erscheinung Tetartoëdrie, sobald die so entstandenen tetartoëdrischen Formen von einander unabhängig auftreten.

Die näheren Verhältnisse der Hemiëdrie und Tetartoëdrie können erst ihre Berücksichtigung finden bei der Betrachtung der einzelnen Krystallsysteme, zu welcher wir, die am Schluss des vorigen § gegebene Reihenfolge beibehaltend, nunmehr übergehen.

A. Krystalle mit drei Hauptaxen.

(Physikalisch isotrope Krystalle.)

Die Krystalle dieser Art besitzen nach §. 37 sämmtlich den gleichen Grad der Symmetrie, bilden also nur ein Krystallsystem. Dieses ist:

I. Das reguläre Krystallsystem.

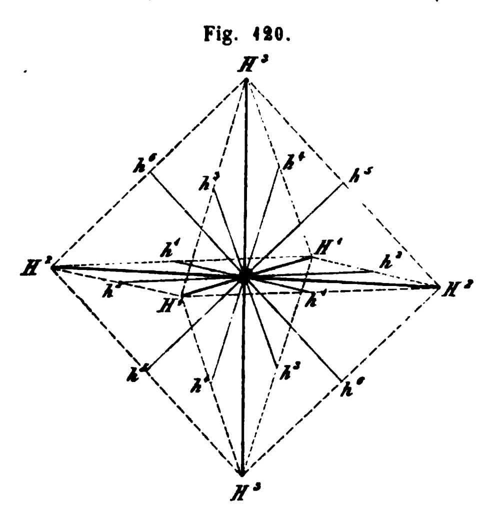
§. 39. **Begriff des regulären Systems.** Es ist bereits in §. 36 aus dem Grundgesetz der physikalischen Krystallographie abgeleitet worden, dass die regulären Krystalle in ihren drei gleichwerthigen Hauptaxen gleiche Elasticität und Cohäsion besitzen, und dass sich diese zwar mit der Richtung ändern, aber stets in allen denjenigen Richtungen, welche der Symmetrie der Krystalle wegen gleichwerthig sind, denselben Werth besitzen müssen; dass ferner jeder reguläre Krystall, so lange er homogen ist, in allen Richtungen gleiche Lichtgeschwindigkeit besitzt, also einfach brechend ist; dass derselbe nach allen Richtungen gleiches Wärmeleitungsvermögen, gleiche thermische Ausdehnung (daher die Winkel für alle Temperaturen denselben Werth haben), gleiche magnetische oder diamagnetische Eigenschaften u. s. f. besitzen muss; dass folglich die allgemeinen optischen, thermischen und magnetischen Eigenschaften aller regulären Krystalle dieselben sind, wie bei den ebenfalls isotropen, amorphen Körpern. Sie unterscheiden sich von diesen nur dadurch, dass sich ihre Elasticität und Cohäsion mit der Richtung ändert, während sie bei jenen constant bleibt. Die Aenderung dieser Eigenschaften mit der Richtung in einem regulären Krystall findet aber stets so statt, wie es die geometrische Symmetrie erfordert.

Das reguläre System bildet die Gesammtheit aller vollflächigen einfachen Formen, welche drei auf einander normale Haupt-Symmetrieebenen, und ausserdem noch sechs gewöhnliche Symmetrieebenen besitzen. Die Lage dieser neun Symmetrieebenen wird am leichtesten veranschaulicht*) durch die Richtung ihrer Normalen; in Fig. 120

*) Der Anfänger kann sich die Anschauung dieser Verhältnisse wesentlich erleichtern durch ein leicht anzufertigendes Modell, in welchem die einzelnen Symmetrieebenen

bedeuten H^1, H^2, H^3 die Normalen zu den drei Haupt-Symmetrieebenen, so dass H^1 normal zu derjenigen ist, in welcher H^2 und H^3 liegen, also kurz H^2OH^3, während H^1OH^2 und H^1OH^3 die beiden anderen regulären Symmetrieebenen sind. Von den Normalen zu den sechs übrigen Symmetrieebenen, h^1, h^2, h^3, h^4, h^5, h^6, liegen je zwei in einer Hauptsymmetrieebene und halbiren den rechten Winkel der beiden in denselben liegenden Hauptaxen, bilden also mit einander ebenfalls einen rechten Winkel. Die beiden zu einem solchen Paar von Symmetrieaxen normalen Symmetrieebenen sind also ebenfalls normal zu einander, während zwei solcher, deren Senkrechte in

Fig. 120.



verschiedenen Hauptsymmetrieebenen liegen, sich unter einem Winkel von 120° schneiden, wie weiterhin gezeigt werden soll. In jeder Hauptaxe schneiden sich demnach zwei Hauptsymmetrieebenen und zwei gewöhnliche, jedes Paar unter 90°, eine der ersteren mit einer der letzteren unter 45°.

Die drei Hauptaxen sind gleichwerthig, d. h. können beliebig mit einander vertauscht werden, ohne dass sich dadurch die Form ändert. Der einfachste Fall einer Form, welche diese Bedingung erfüllt, ist offenbar derjenige einer Fläche, welche sämmtliche drei Hauptaxen in gleichem Abstande schneidet, nebst den sieben, durch die Symmetrie nach den drei Haupt-Symmetrieebenen erforderlichen*), Flächen, welche mit ihr die ganze einfache Form liefern, wie sie in Fig. 120 durch die punktirten Linien dargestellt ist. Diese Linien bezeichnen die Kanten dieser Form, des Octaëders, welche sämmtlich gleiche Winkel haben, und je zwei Hauptaxen unter 45° durchschneiden.

Hierdurch ist jener Kantenwinkel sehr leicht zu berechnen: denkt man sich um

durch starkes Papier dargestellt sind, welches man am besten kreisförmig ausschneidet und dann in die einzelnen Segmente zerlegt, worauf diese in den richtigen Stellungen an einander gefügt werden.

*) Vergl. S. 182 und Fig. 119.

eine Octaëderecke, d. h. den Schnittpunkt von vier Flächen desselben, eine Kugelfläche construirt, so schneiden die beiden Haupt-Symmetrieebenen und eine Octaëderfläche, welche durch jenen Punkt gehen, auf jener ein sphärisches Dreieck ab, dessen einer Winkel ein rechter ist, nämlich derjenige zwischen den beiden Symmetrieebenen, und dessen beide anliegenden Seiten 45° sind, d. h. gleich den Bögen, welche zwischen einer Octaëderkante und der Hauptaxe liegen. Berechnet man hieraus die beiden dem rechten anliegenden Winkel des sphärischen Dreiecks, so findet man 54° 44',1; dies ist aber der Winkel, welchen eine Octaëderfläche mit einer Haupt-Symmetrieebene bildet, und da die benachbarte Octaëderfläche denselben Winkel mit dieser Symmetrieebene einschliesst, so ist der gesammte Winkel der Octaëderkanten = 109° 28',2.

Jede der acht Flächen des Octaëders schneidet die drei Hauptaxen in gleichem Abstande, alle müssen daher die gleichen Indices erhalten, wenn wir die Hauptaxen zu Axen, die drei Haupt-Symmetrieebenen also zu Axenebenen wählen. Obgleich wir bekanntlich jede beliebigen drei Flächen eines Krystalls zu Axenebenen wählen können, und doch für alle anderen rationale Indices erhalten, so wird doch die Betrachtung der Formen wesentlich erleichtert, wenn die Axenebenen so gewählt werden, dass alle Flächen einer jeden einfachen Form die gleichen Indices erhalten. Dies ist aber bei dem Octaëder und, wie wir sehen werden, auch bei allen anderen regulären Formen, nur dann der Fall, wenn wir die drei Haupt-Symmetrieebenen zu Axenebenen machen. Für diese Wahl spricht noch ein weiterer sehr wichtiger Umstand, d. i. die weit grössere Einfachheit der Berechnungen, da wir, weil die Axenebenen alsdann normal zu einander stehen, fast immer nur rechtwinkelige sphärische Dreiecke zu berechnen haben. Ebenso beliebig, wie die Wahl der Axen, ist nach §. 33 auch die der Grundform, und es handelt sich auch hier wieder um den rein praktischen Gesichtspunkt grösster Einfachheit der Ableitungen. Fassen wir diesen ins Auge, so ist es klar, dass keine Form geeigneter sein wird, als Grundform zu dienen, als das Octaëder, dessen Flächen die drei Hauptaxen in gleichen Abständen schneiden. Es sollen demnach im Folgenden alle Formen auf die drei Hauptaxen als Axen*), und auf eine Octaëderfläche als Grundform bezogen und dem entsprechend die Bezeichnung derselben durch ihre Indices gegeben werden.

Was zunächst das Octaëder selbst betrifft, so haben seine acht Flächen offenbar folgende Symbole:

$$(1\,1\,1)\ (1\,\bar{1}\,1)\ (\bar{1}\,1\,1)\ (\bar{1}\,\bar{1}\,1)$$
$$(1\,1\,\bar{1})\ (1\,\bar{1}\,\bar{1})\ (\bar{1}\,1\,\bar{1})\ (\bar{1}\,\bar{1}\,\bar{1})$$

wobei die hintere Hälfte der Axe H^1, die linke von H^2 und die untere von H^3 Fig. 120 als negative genommen worden sind. Der allgemeine Fall einer beliebigen anderen Fläche des regulären Systems ist ausgedrückt durch das Symbol $(h\,k\,l)$, d. i. dasjenige einer Fläche, deren Parameter sämmtlich ungleich sind, aber, weil die Grundform gleiche Parameter hat, sich wie

---

*) Und sollen die Formen stets so gestellt werden, dass eine der drei Axen vertical und eine zweite horizontal auf den Beobachter zuläuft; dann ist die dritte quer gehende natürlich auch horizontal.

rationale Zahlen verhalten. Da die drei Axen beliebig vertauschbar sind, so liegen in dem vorderen Octanten rechts oben, in welchem alle Parameter positiv sind, folgende Flächen der in Rede stehenden Form:

$$(hkl)\ (khl)\ (hlk)\ (klh)\ (lhk)\ (lkh)$$

In dem links oben vorn befindlichen Octanten liegen die Flächen:

$$(h\bar{k}l)\ (k\bar{h}l)\ (h\bar{l}k)\ (k\bar{l}h)\ (l\bar{h}k)\ (l\bar{k}h)$$

u. s. f. in jedem der acht Octanten sechs Flächen, so dass die vollflächige Form 48 Flächen besitzt. Dies ist jedoch nur der Fall, wenn h, k, l von einander und von Null verschieden sind. Es giebt sechs verschiedene Specialfälle jenes allgemeinen Falles, in welchen die Flächenzahl eine eingeschränktere ist; wenn zwei der Indices gleich sind, deren Vertauschung also keine neue Fläche liefert, Flächenzahl = 24; hierbei sind zwei Fälle zu unterscheiden: 1) der dritte Index grösser, 2) kleiner, als die beiden gleichen; 3) wenn einer der Indices = 0, je zwei Flächen, welche sich nur durch das Vorzeichen dieses Index unterscheiden, nur eine darstellen, Flächenzahl = 24; 4) wenn zwei Indices gleich, der dritte = 0, wobei je vier Flächen nur eine darstellen können, Flächenzahl = 12; 5) zwei Indices = 0, der dritte kann dann = 1 gesetzt werden, liefert die drei Axenebenen (001) (100) (010), Flächenzahl = 6; 6) alle Indices gleich, d. i. (111), das von uns zur Grundform gewählte Octaëder mit der Flächenzahl 8. Inclusive des allgemeinen Falles (hkl) resultiren also sieben verschiedene Arten von Flächensymbolen, entsprechend ebenso vielen verschiedenen Arten von einfachen Formen. Die Gestalt dieser wollen wir nun herleiten aus dem Verhältniss ihrer Parameter, indem wir diese als Vielfache der Parameter der Grundform betrachten.

§. 40. **Herleitung und Berechnung der regulären Krystallformen.** Da die Parameter unserer Grundform, des Octaëders, sämmtlich gleich sind, so können wir das Verhältniss derselben setzen

$$= a : a : a.$$

I. Dasjenige einer Fläche, deren Parameter sämmtlich ungleich sind, ist demnach

$$a : na : ma,$$

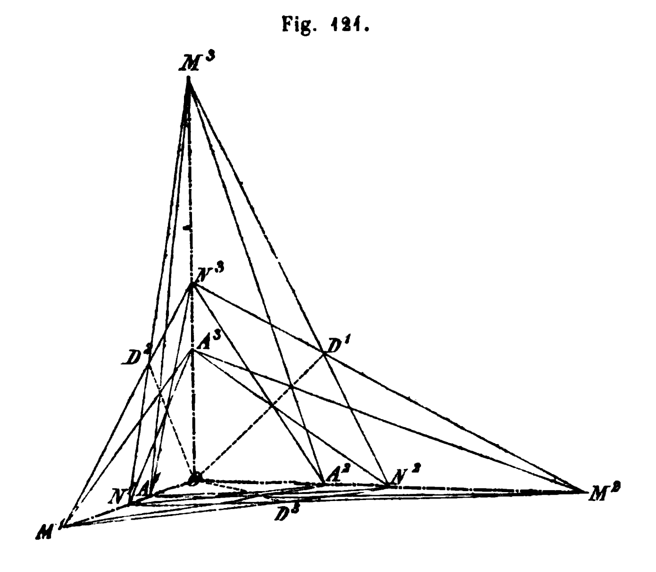
wo die Coëfficienten n und m (im Allgemeinen einfache) rationale Zahlen sind, welche grösser als 1, da wir stets den kleinsten Parameter gleich der beliebigen Zahl a setzen wollen. Sei in Fig. 121*), $OA^1 = OA^2 = OA^3 = a$, und wählen wir z. B. $n = \frac{3}{2}$, $m = 3$, so ist die Ebene, welche die drei Axen in den Punkten $A^1N^2M^3$ schneidet, kurz: die Ebene $A^1N^2M^3$, eine Krystallfläche mit dem obigen Parameterverhältniss.

*) Hier ist es für den Anfänger fast nothwendig, sich die Anschauung zu erleichtern durch ein Modell, bestehend in drei, sich rechtwinkelig durchkreuzenden Metallstäben, welche in bestimmten Abständen durchbohrt sind, um diese Punkte mittelst Fäden zu verbinden, wie die Punkte $A^1N^2M^3$ u. s. f. in Fig. 121 durch die feineren Geraden verbunden sind. Solche Axenmodelle für alle sechs Systeme fertigt Herr Fuess in Berlin (s. Vorrede).

Nun ist die Ebene, welche normal zur Haupt-Symmetrieebene A^2OA^3 den Winkel der beiden anderen Axenebenen halbirt (sie ist bestimmt durch die beiden Geraden OA' und OD'), ebenfalls eine Symmetrieebene der regulären Krystalle; die Symmetrie nach dieser fordert also die Existenz einer zweiten Fläche, welche in Bezug auf jene Ebene symmetrisch liegt zu $A^1N^2M^3$, dies ist die Fläche $A^1N^3M^2$, welche mit der vorigen die Punkte A' und D', also die Gerade zwischen beiden gemein hat. Ferner ist auch die Ebene A^2OD^2, welche den Winkel zwischen A^1OA^2 und A^3OA^2 halbirt, eine Symmetrieebene, also muss auch in Bezug auf diese eine zu $A^1N^2M^3$ symmetrische Fläche existiren; diese ist $A^3N^2M^1$. Endlich ist auch die den Winkel zwischen A^3OA^1 und A^3OA^2 halbirende Ebene eine Symmetrieebene, so dass durch die Existenz von $A^1N^2M^3$ auch diejenige der symmetrisch liegenden $A^2N^1M^3$ gegeben ist. $A^3N^2M^1$ erfordert ihrerseits wieder das Auftreten einer in Bezug auf die Ebene A^3OD^3 zu ihr symmetrisch liegenden Fläche $A^3N^1M^2$, und $A^2N^1M^3$ das einer Fläche $A^2N^3M^1$, welche in Bezug auf A^2OD^2 zu ihr symmetrisch liegt.

Hieraus ersieht man, dass in dem rechten oberen Octanten der Vorderseite allein durch die Symmetrie sechs verschiedene Flächen erfordert werden, deren Schnittpunkte mit den drei Axen man erhält, wenn man die Längen a, na und ma auf den drei Hauptaxen aufträgt und dann alle möglichen Vertauschungen derselben vornimmt. Das Resultat ist also ganz dasselbe, welches

Fig. 121.



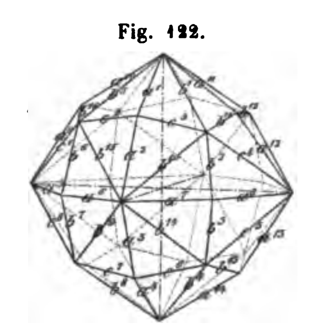
uns im vorigen § die Vertauschung der Indices (hkl) geliefert hat. Wegen der einen Haupt-Symmetrieebene müssen in dem links oben anliegenden Octanten sechs ganz gleich liegende Flächen vorhanden sein, zu diesen 12 weitere 12, symmetrisch zur horizontalen Haupt-Symmetrieebene gelegene, endlich zu diesen 24 noch ebenso viele in Bezug auf die dritte

Haupt-Symmetrieebene symmetrisch liegende auf der abgewandten Seite des Krystalls. Die vollständige einfache Form Fig. 122, deren Parameterverhältniss

$$a : na : ma,$$

hat somit 48 Flächen und heisst deshalb 48-Flächner oder Hexakisoctaeder. Da die Fig. 122 diese Form, wie es weiterhin mit allen einfachen Formen geschehen soll, mit gleichem Abstand aller Flächenpaare darstellt, so zeigt dieselbe unmittelbar die Symmetrie nach den neun Symmetrieebenen. Die drei Haupt-Symmetrieebenen gehen durch folgende Kanten: Die 1. durch a^1, a^2, a^3, a^4 und die entsprechenden der abgewandten Seite, die 2. durch a^5, a^6, a^7, a^8 u. s. f., die 3. durch a^9, a^{10}, a^{11}, a^{12}, a^{13}, a^{14}. Die sechs gewöhnlichen Symmetrieebenen, durch deren jede der 48-Flächner ebenfalls in zwei gleiche und entgegengesetzte Hälften zerlegt wird, gehen durch die Kanten 1. b^1, b^2, b^3, b^4 u. s. f., 2. b^5, b^6, b^7, b^8 u. s. f., 3. b^9, b^{10}, b^{11}, b^{12} u. s. f., 4. b^{13}, b^{14}, b^{15}, b^{16} u. s. f., 5. c^1, c^2, c^3, c^4 u. s. f., 6. c^5, c^6, c^7, c^8 u. s. f.

Fig. 122.



Im Folgenden sollen diese neun Symmetrieebenen stets durch die Kanten, welche sie schneiden und deren Winkel sie jedesmal halbiren (da natürlich die beiden die Kante bildenden benachbarten Flächen gleiche Neigung gegen die Symmetrieebene haben), bezeichnet werden, und ferner jede Fläche durch die Signaturen der drei sie umgebenden Kanten. Alsdann können wir zur Berechnung des Parameterverhältnisses eines Hexakisoctaëders aus seinen Kantenwinkeln schreiten, bei welcher wir, wie bei allen folgenden Berechnungen, unter »Bildung eines sphärischen Dreiecks aus drei Flächen« verstehen wollen: man denke sich diese drei Flächen allein, falls dies nicht schon am Krystall geschieht, sich in einem Punkte schneidend, und um diesen eine Kugelfläche gelegt, so schneiden jene auf dieser ein sphärisches Dreieck ab, dessen Winkel gleich den Kantenwinkeln, unter denen sich je zwei jener Flächen schneiden, und dessen Seiten gleich den Flächenwinkeln auf jenen drei Ebenen sind, d. h. den ebenen Winkeln, welchen auf einer Fläche die beiden sie seitlich begrenzenden Kanten mit einander einschliessen. Alle krystallographischen Berechnungen beruhen nun darauf, solche sphärische Dreiecke am Krystall ausfindig zu machen, in denen drei jener sechs Elemente (drei Kanten- und drei Flächenwinkel) bekannt sind und somit die drei anderen aus ihnen berechnet werden können.

Es seien die Winkel der Kanten a' und b' durch Messung bestimmt, so bilde man das sphärische Dreieck aus der Fläche $a^1b^1c^8$ und den beiden, sich unter 45^0 schneidenden Symmetrieebenen $a^1a^2a^3a^4$ und $b^1b^2b^3b^4$; in diesem ist ein Winkel $= 45°$, die beiden andern sind die halben Winkel der Kanten a' und b'; berechnet man hieraus die beiden, den letzteren gegenüberliegenden Seiten des sphärischen Dreiecks, so sind diese die Winkel, welchen a' und b' mit der verticalen Hauptaxe einschliessen. Die Tangente des ersteren dieser beiden ist direct $= n$, dem einen der gesuchten Verhältnisse der Parameter; der andere Winkel bestimmt das Verhältniss zwischen den Katheten eines rechtwinkeligen Dreieckes, gebildet aus der Kante b', der verticalen Hauptaxe von der Mitte aus bis zum Durchschnitt mit b^1, und einer Geraden, welche den Mittelpunkt des Krystalls verbindet mit demjenigen Punkte, in welchem die verlängerte Kante b^1 die hori-

zontale Symmetrieebene $a^5a^6a^7a^8$ schneidet. Diese Gerade ist in Fig. 123 durch OC dargestellt, wenn OA die Richtung der auf den Beobachter zu laufenden Hauptaxe und OB die der zweiten horizontalen Hauptaxe ist. Wenn A der Schnittpunkt der Kante a' mit der horizontalen Symmetrieebene, also $OA = na$ ist, so berechnet man aus $OA = na$, $OC = n'a$ (wo der Factor n' das oben erwähnte Verhältniss der Länge OC zur Länge der verticalen Hauptaxe von der Mitte bis zum Durchschnitt mit b' bedeutet) und dem Winkel $AOC = 45°$, den Winkel OAC; dessen Tangente ist aber $= \frac{ma}{na}$ und hierdurch auch das Verhältniss des zweiten und dritten Parameters gegeben. So findet man das Verhältniss:

$$a : na : ma,$$

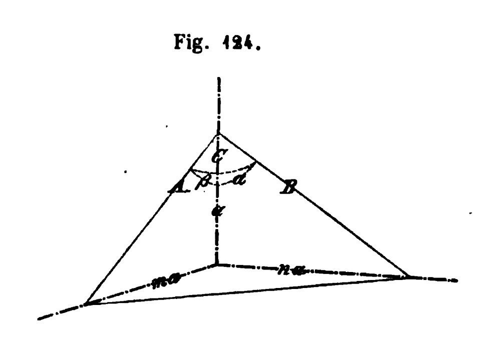
wenn die beiden Kanten a' und b, Fig. 122 gegeben sind.

Fig. 123.

Hat man dagegen die Kanten a^1 und c^3 gemessen, so ist die Berechnung noch einfacher: Man bilde ein sphärisches Dreieck aus der Fläche $a^1b^1c^3$ und den Symmetrieebenen $a^1a^2\cdots$ und $c^2c^3\cdots$; dieses ist rechtwinkelig, weil die beiden genannten Symmetrieebenen sich unter 90° schneiden, die beiden anderen Winkel desselben sind die halben gemessenen Winkel der Kanten a^1 und c^3. Aus diesen berechnet man die beiden dem rechten Winkel anliegenden Seiten, deren eine wieder den Winkel der Kante a^1 mit der verticalen Hauptaxe und demnach unmittelbar den Coëfficienten n liefert. Aus der andern Seite findet man m genau in derselben Weise, wie in der vorigen Berechnung.

Ganz unmittelbar ergiebt sich das Verhältniss $a : na : ma$ aus der Grösse des Winkels a^{11} ($= a^1$) und desjenigen, welchen die Flächen $b^1b^{11}a^{11}$ und $b^5b^{16}a^{10}$ mit einander einschliessen*); der erstere wird nämlich von der Ebene $a^{11}a^{12}\cdots$, der zweite von der Ebene $a^1a^2\cdots$ halbirt; diese beiden Haupt-Symmetrieebenen stehen aber normal zu einander, bildet man also aus ihnen und der Fläche $b^1b^{11}a^{11}$ ein sphärisches Dreieck, so ist dieses rechtwinkelig und die beiden andern Winkel sind gleich den Hälften der beiden gemessenen. In Fig. 124 ist dieses sphärische Dreieck angedeutet, und man sieht leicht, dass man, nach Berechnung der beiden Seiten α und β aus den beiden gemessenen Winkeln A und B, aus jenen unmittelbar m und n findet.

Fig. 124.



*) Diese beiden Flächen treffen in der Figur nur in einer Ecke zusammen; an einem natürlichen Krystall, dessen Flächen ungleich gross ausgebildet sind, wird man leicht zwei derartige Flächen finden, welche sich in einer Kante direct schneiden, die dann unschwer zu centriren und zu justiren ist.

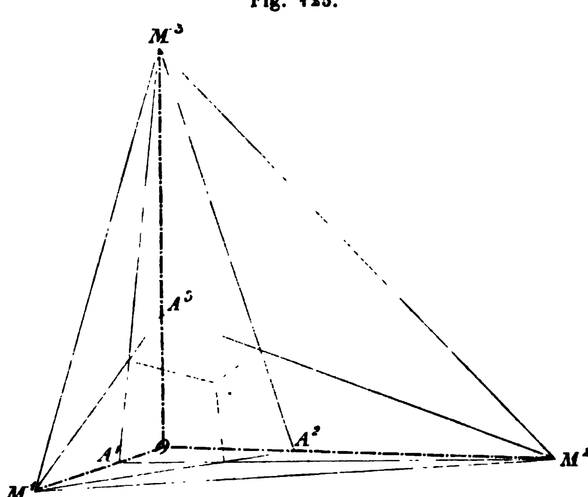
Ganz dieselben Rechnungsmethoden umgekehrt angewendet liefern die Winkel eines 48-Flächners, wenn für denselben die Zahlen m und n bekannt sind (einige Beispiele sind im nächsten § angegeben).

II. Wir sahen, dass sämmtliche Flächen mit dem Parameterverhältniss $a : na : ma$ innerhalb eines Octanten dadurch erhalten wurden, dass die Grössen a, na, ma auf je einer Axe aufgetragen und dann so oft, als es möglich ist, vertauscht wurden. In dem speciellen Falle nun, dass zwei der Parameter gleich gross sind, kann offenbar ihre Vertauschung mit einander keine neue Fläche mehr liefern, es wird also für je zwei Flächen des Hexakisoctaëders nur eine auftreten, d. h. wir erhalten eine aus 24 Flächen bestehende einfache Krystallform. Hierbei sind jedoch zwei Fälle zu unterscheiden: entweder sind die beiden gleichen Parameter grösser als der dritte, oder kleiner. Behandeln wir zunächst den ersten Fall; in diesem ist das Parameterverhältniss, da $m = n$,

$$= a : ma : ma.$$

Die sämmtlichen möglichen Flächen dieser Form in einem Octanten, z. B. dem rechten oben vorn, werden wir wieder am leichtesten mittelst eines

Fig. 125.



Axenmodelles finden, wie es Fig. 125, ganz entsprechend der Fig. 121, perspectivisch darstellt, in welcher aber nunmehr die Punkte N mit denen M zusammenfallen. In Folge dessen wird die erste Hauptaxe in A^1 nur von einer Fläche geschnitten, welche die beiden anderen Axen im m-fachen (in Fig. 125 ist $m = 3$) Abstand trifft; es ist dies $A^1M^2M^3$; durch A^2 geht nur die Fläche $A^2M^1M^3$ und durch A^3 nur $A^3M^1M^2$. Es können also in diesen Octanten nur drei Flächen der Form, deren Parameterverhältniss

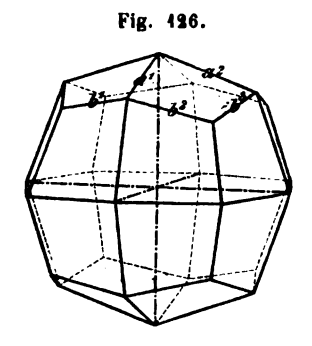
$$a : 3a : 3a$$

ist, auftreten, deren Durchschnittsrichtungen durch die punktirten Linien

angegeben sind. Wegen der Symmetrie nach den drei Haupt-Symmetrieebenen muss in allen acht Octanten das Gleiche stattfinden, und somit eine Form resultiren, welche in Fig. 126 dargestellt ist und ein Ikositetraëder genannt wird. An dem Modell einer solchen Form wird man unschwer die Existenz der neun Symmetrieebenen constatiren können.

Zur Berechnung des Parameterverhältnisses einer solchen Gestalt genügt die Kenntniss eines Kantenwinkels, da es sich nur um die Bestimmung einer Unbekannten, des Coëfficienten m, handelt. Ist z. B. der Winkel der Kante $a^1 = a^2$ gegeben, so bilde man aus der Fläche $a^1a^2b^2b^3$ und den beiden, die Kantenwinkel a^1 und a^2 halbirenden Haupt-Symmetrieebenen ein sphärisches Dreieck, welches rechtwinkelig ist, und dessen beide anderen Winkel gleich der Hälfte desjenigen der Kante a^1 oder a^2. Die diesen gegenüberliegenden Seiten sind die Winkel zwischen der Kante a^1 oder a^2 und der verticalen Hauptaxe; die Tangente dieses Winkels ist die gesuchte Zahl m. Ist dagegen der Winkel b^2 durch Messung gefunden, so hat man dieselbe Krystallfläche mit der durch a^1 gehenden Haupt-Symmetrieebene und der dazu normalen Symmetrieebene b^1b^2 zu einem sphärischen Dreieck zu verbinden, mit dessen Hülfe man ebenfalls die Richtung der Kante a^1 berechnen kann.

Fig. 126.



III. In dem bereits erwähnten Falle, dass zwei Parameter gleich, aber kleiner als der dritte sind, ist deren Verhältniss:

$$a : a : ma.$$

Die Lage der möglichen Flächen einer solchen Krystallform, wenn z. B. $m = 2$ ist, wird in der bisherigen Weise gefunden, wie es Fig. 127 zeigt.

Fig. 127.

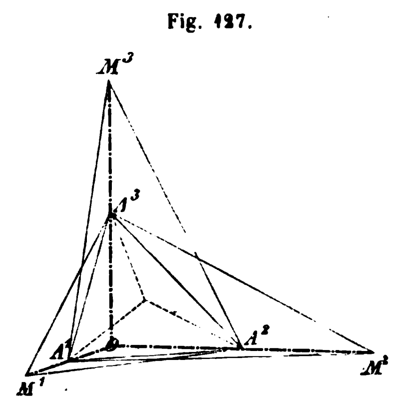
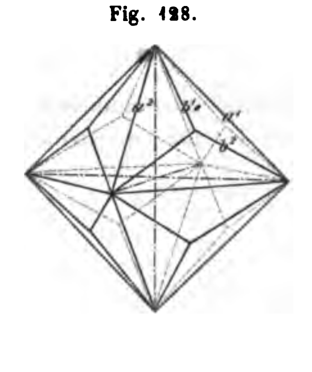


Fig. 128.



Durch den Punkt M^1, dessen Abstand von der Mitte $= 2 \cdot OA^1$ ist, geht nur eine Fläche, welche die beiden anderen Hauptaxen in gleichen Abständen ($OA^2 = OA^3 = OA^1$) durchschneidet, nämlich $M^1A^2A^3$, durch M^2 die Fläche $M^2A^1A^3$, endlich durch M^3 die Fläche $M^3A^1A^2$. Die punktirten Linien bezeichnen wiederum die Kanten, in denen die drei Flächen des betreffenden

Octanten sich schneiden. Fig. 128 stellt die vollständige Form, ergänzt durch die in den übrigen Octanten erforderlichen Flächen, dar. Dieselbe wird ein Triakisoctaëder oder Pyramidenoctaëder genannt.

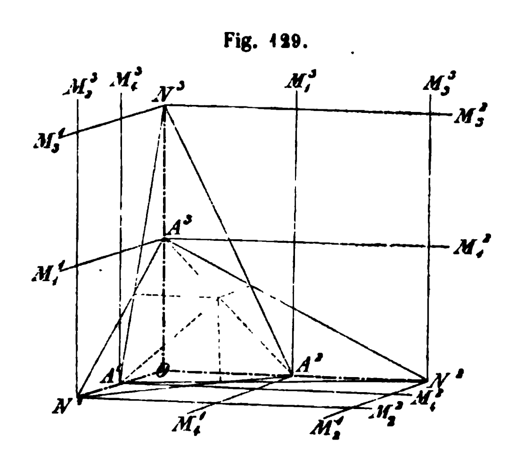
Zur Berechnung des Coëfficienten genügt wieder der Winkel einer Kante, z. B. a^1, indem man die Fläche $a^1b^1b^2$ mit den beiden verticalen Haupt-Symmetrieebenen zu einem sphärischen Dreieck verbindet, aus welchem der Winkel berechnet wird, den die Durchschnittsrichtung jener Krystallfläche und der durch a^2 gehenden Symmetrieebene mit der verticalen Hauptaxe bildet. Die Tangente dieses Winkels ist $= m$.

IV. Für einen besonderen Fall, wenn nämlich m gleich seinem obersten Grenzwerth ∞ ist, während n einen endlichen Werth hat, das Parameterverhältniss also

$$= a : na : \infty a,$$

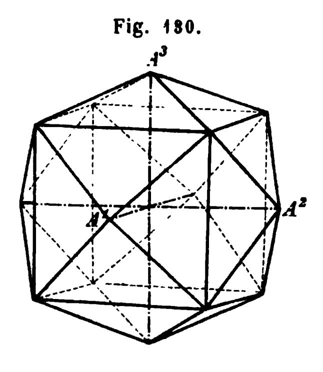
entsteht eine vierte besondere Form. Setzen wir z. B. $n = 2$, so ist aus Fig. 129 ersichtlich, dass in einem Octanten, wie beim 48-Flächner, sechs Flächen durch die Symmetrie erfordert werden, denn der Hauptaxe OA^1 parallel (sie im Abstand ∞ schneidend) gehen nothwendigerweise zwei Flächen, welche die beiden anderen Hauptaxen, die eine im Verhältniss $1 : n$*), die andere in $n : 1$ schneiden; es sind dies die Flächen $A^2N^3M^1_3M^1_4$ und $A^3N^2M^1_1M^1_2$; der Hauptaxe OA^2 parallel gehen: $A^1N^3M^2_3M^2_4$ und $A^3N^1M^2_1M^2_2$; endlich der Hauptaxe OA^3 parallel: $A^1N^2M^3_3M^3_4$ und $A^2N^1M^3_1M^3_2$.

Fig. 129.



Die Durchschnittsrichtungen dieser sechs Flächen sind wiederum durch punktirte Gerade angedeutet, von denen natürlich drei den drei Hauptaxen parallel laufen. Gehen wir von diesen sechs Flächen zu den durch die Symmetrie erforderten Flächen der anderen Octanten über, so liegt auf der Hand, dass je zwei jener sechs mit zwei eines benachbarten Octanten zusammenfallen müssen, weil sie auf einer Haupt-Symmetrieebene normal stehen und die Fläche, welche zu einer Symmetrieebene normal ist, in Bezug auf diese, nur sich selbst, keiner andern symmetrisch sein kann. Während die so entstehende Form in jedem der acht Octanten

Fig. 130.



*) In der Figur ist $n = 2$ gesetzt.

sechs Flächen hat, ist die Gesammtzahl ihrer möglichen Flächen demnach nur 24, wie sie Fig. 130 mit gleicher Ausdehnung zeigt. Diese Form wird ein Tetrakishexaëder oder Pyramidenwürfel genannt.

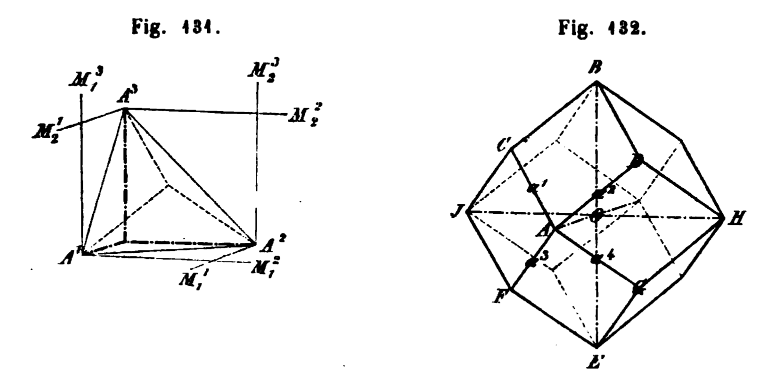
Die Berechnung des Parameterverhältnisses derselben aus einem der Kantenwinkel bedarf nach den bisherigen Beispielen keiner Erläuterung mehr.

V. Zu einer weiteren fünften Form führt der Fall, dass in dem Parameterverhältniss zwei derselben gleich, der dritte den Maximalwerth ∞ erreicht. Alsdann ist dieses Verhältniss

$$a : a : \infty a.$$

Während die bisherigen Formen stets Beispiele aus je einer Klasse von Formen waren, deren so viele möglich sind, als rationale Zahlenwerthe für die Coëfficienten m und n denkbar, kann das obige Parameterverhältniss nur einer einzigen Form angehören. Die Flächen derselben schneiden je zwei Axen in gleichem Abstand und sind der dritten parallel, es müssen in einem Octanten also drei Flächen: $A^1A^2M^3{}_1M^3{}_2$, $A^1A^3M^2{}_1M^2{}_2$ und $A^2A^3M^1{}_1M^1{}_2$ Fig. 131 derselben existiren. Da jede derselben aber einer Hauptaxe

Fig. 131. Fig. 132.



parallel, also normal zu einer Haupt-Symmetrieebene ist, so muss ihre symmetrische Gegenfläche im anstossenden Octanten mit ihr identisch sein; statt $3 \times 8 = 24$ kann die ganze Form Fig. 132 also nur 12 Flächen besitzen und heisst deshalb das Dodekaëder (auch Rhombendodekaëder nach der Gestalt ihrer Flächen).

Verbindet man eine Fläche derselben, z. B. $ABCD$, mit der senkrechten Haupt-Symmetrieebene ABO (welche sie unter 90° schneidet) und der Symmetrieebene AOD zu einem sphärischen Dreieck, so ist von dessen Winkeln einer (an der Kante AB) = 90°, ein zweiter (an der Geraden AO) = 45° und eine Seite, welche den Winkel BAO bildet, = 45°. Daraus findet man den der letzteren Seite gegenüber liegenden Winkel genau = 60°. Da dies aber die Hälfte des Winkels der Kante AD ist, so beträgt dieser 120°. Da man jede beliebige andere Fläche des Dodekaëders mit zwei Symmetrieebenen zu einem sphärischen Dreieck verbinden kann, dessen Bestimmungsstücke dieselben Werthe wie die des obigen haben, so folgt, dass alle Kantenwinkel des Dodekaëders = 120° sind. Zwei an einer Ecke, an welcher sich vier Flächen schneiden, z. B. A, einander gegenüber liegende Flächen müssen einen Winkel von 90° einschliessen, da die längere Diagonale jeder derselben mit einer Hauptaxe 45° bildet.

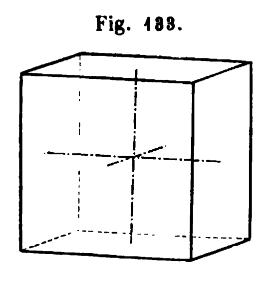
Construiren wir an dem Dodekaëder Fig. 132 ausser den drei Haupt-Symmetrieebenen, welche durch die Hauptaxen unmittelbar gegeben sind, noch die sechs anderen nach der S. 188 gegebenen Definition derselben, so gehen diese durch den Mittelpunkt O und durch folgende Kanten: die 1. durch BD, EG; die 2. durch BC, EF; die 3. durch AC, AG; die 4. durch AD, AF; die 5. durch GH, FJ und die 6. durch DH, CJ. Jeder dieser sechs Symmetrieebenen ist aber ein paralleles Flächenpaar des Dodekaeders parallel, weil dieses, wie jene Symmetrieebenen, einer Hauptaxe parallel, die beiden anderen unter 45° schneidet. Die sechs gewöhnlichen Symmetrieebenen des regulären Systems sind demnach die Flächen des Dodekaëders, und es ist leicht, an Modellen der bisher betrachteten 48- und 24-Flächner zu constatiren, dass sie nach allen Dodekaëderflächen symmetrisch sind. Das Dodekaëder ist die erste Form, von der wir die Eigenschaft kennen lernen, dass sie nach ihren eigenen Flächen symmetrisch ist.

VI. Wir hatten gefunden, dass zwei Fälle zu unterscheiden sind, sobald zwei Parameter gleich und der dritte davon verschieden ist, dass nämlich eine andere Form resultirt, wenn dieser dritte grösser als die beiden anderen, ein anderer, wenn er kleiner ist. Dies muss auch für $m = \infty$ gelten. Das Parameterverhältniss, in welchem zwei Parameter gleich, der dritte $= \infty$, lieferte das Dodekaëder: der entgegengesetzte Fall, dass nämlich zwei Parameter gleich und unendlich gross, der dritte kleiner, also endlich ist, muss daher eine weitere reguläre Krystallform liefern, deren Parameterverhältniss

$$a : \infty a : \infty a.$$

Es bedarf keiner Figur, um zu sehen, dass eine Form mit diesem Parameterverhältniss nur aus drei, den drei Haupt-Symmetrieebenen parallelen Flächenpaaren bestehen kann, wie es Fig. 133 zeigt. Die Flächen dieser Form, des Hexaëders oder des Würfels, liegen so, dass in jeden Octanten drei fallen, von denen jede eine Hauptaxe in endlichem Abstande von der Mitte schneidet, da sie aber zu zwei Haupt-Symmetrieebenen normal ist, mit ihren symmetrischen Flächen in den Nachbaroctanten zusammenfällt. Man sieht leicht ein, wenn man durch einen Punkt der verticalen Hauptaxe oberhalb der Mitte eine Ebene legt, welche die beiden horizontalen Hauptaxen in unendlichem Abstand schneidet, diese in allen vier oberen Octanten die gleiche sein muss, nämlich die parallele Ebene zur horizontalen Haupt-Symmetrieebene. Die vollständige Form kann also statt $3 \times 8 = 24$ nur den vierten Theil, d. i. sechs Flächen haben. Diese schneiden sich, da sie den Haupt-Symmetrieebenen parallel sind, unter rechten Winkeln, und aus demselben Grunde ist auch diese Form nach ihren eigenen Flächen symmetrisch.

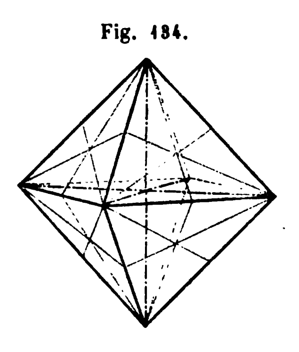
Fig. 133.



VII. Der letzte mögliche specielle Fall ist derjenige, dass alle drei Parameter gleich gross sind. Dieser führt uns zu der Grundform zurück, von der wir ausgingen, und zu welcher in jedem Octanten nur eine Fläche gehören kann, da die Vertauschung der drei gleichen Parameter keine neue Fläche liefert. Diese ist das Octaëder Fig. 134 mit dem Parameterverhältniss

$$a : a : a.$$

Fig. 134.



Auch diese Form ist symmetrisch nach den sechs Dodekaëderflächen, deren Durchschnitte mit den ihrigen auf Fig. 134 mit schwächeren Linien eingezeichnet sind. Man sieht daraus unmittelbar, dass jede Octaëderfläche von drei dodekaëdrischen Symmetrieebenen unter rechten Winkeln geschnitten, dass also zwei parallele Octaëderflächen zu sechs Flächen des Dodekaëders normal stehen.

Die sieben Arten von Formen, welche wir aus den möglichen Fällen des Verhältnisses dreier Parameter auf rechtwinkeligen gleichwerthigen Axen hergeleitet haben, unterscheiden sich in solche, deren nur eine einzige möglich ist (das Octaëder, das Hexaëder und das Dodekaëder), und solche, deren mehrere mit verschiedenen Ableitungscoëfficienten möglich sind (die Hexakisoctaëder, die Tetrakishexaëder, die Triakisoctaëder und die Ikositetraëder). Von jeder der letzteren vier Arten von Formen sind eigentlich unendlich viele krystallonomisch möglich, da es unendlich viele rationale Zahlen als Werthe der Coëfficienten m oder n giebt, von diesen ist aber nur eine beschränkte Zahl mit meist sehr einfachen Coëfficienten bisher beobachtet worden.

Das Octaëder mit den Kantenwinkeln von 109° 28',2 ist die einzige Form, welche unter allen regulären Formen (d. h. denjenigen, die symmetrisch sind zu den drei Würfel- und zu den sechs Dodekaëderflächen) drei gleiche Parameter haben kann, wenn wir die Normalen zu den Hexaëderflächen (die Hauptaxen) zu Axen wählen. In Folge dessen ist das Octaëder zweier verschiedener, regulär krystallisirender Körper krystallographisch vollkommen identisch, d. h. seine Flächen schneiden sich bei beiden unter genau denselben Winkeln, nämlich 109° 28',2. Da aber alle anderen regulären Formen sich durch rationale Vervielfältigung der Parameter des Octaëders von diesem ableiten, so müssen auch alle Formen eines regulär krystallisirenden Stoffes an den Krystallen eines andern identisch, d. h. mit denselben Winkeln, auftreten können. Die Krystallformen zweier regulär krystallisirender Körper können (abgesehen von etwaiger Hemiëdrie) in rein krystallographischer Hinsicht keine anderen Unterschiede zeigen, als sie die verschiedenen Krystalle eines und desselben Körpers ebenfalls auf-

weisen, d. h. sie können wohl aus verschiedenen Formen bestehen, welche sich aber durch rationale Coëfficienten von einander ableiten lassen, welche also einer Krystallreihe angehören. Alle regulären Krystallformen bilden eine Krystallreihe, und diese ist zugleich diejenige aller regulär krystallisirenden Substanzen.

§. 41. **Beschreibung und Bezeichnung der regulären Krystallformen.** Im Folgenden sind nun für sämmtliche reguläre Formen, von den einfachsten ausgehend, die üblichen Bezeichnungen, ihre näheren geometrischen Eigenschaften und die Art und Weise angegeben, wie sie in Combinationen zusammen auftreten.

1) Die holoëdrischen Formen des regulären Systems.

1) Das Octaëder Fig. 135 kann durch die Parameter bezeichnet werden (nach Weiss, vergl. §. 33) mit

$$(a : a : a),$$

Fig. 135.

während das Miller'sche Zeichen

$$= (1\,1\,1).$$

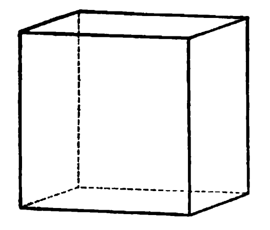
In der abgekürzten Naumann'schen Bezeichnungsweise wird es einfach durch seinen Anfangsbuchstaben O gegeben, und werden alsdann mit diesem Zeichen die Coëfficienten der Parameter, falls sie von 1 verschieden sind, in der Weise verbunden, dass der grössere, m, vor dasselbe, der kleinere, n, dahinter gesetzt und so die vom Octaëder abgeleiteten übrigen regulären Formen bezeichnet werden.

Das Octaëder, dessen Kantenwinkel $= 109^0\,28',2$ bereits angegeben wurden, hat bei gleicher Centraldistanz der Flächen 12 Kanten, von denen je vier in einer Haupt-Symmetrieebene liegen, während je zwei parallele jedesmal einer der sechs gewöhnlichen Symmetrieebenen parallel gehen. Die sechs Ecken des Octaëders werden, da in denselben vier gleiche, d. h. gleichwinkelige, Kanten zusammenstossen, als vierkantige bezeichnet.

2) Das Hexaëder Fig. 136 erhält nach Weiss die Bezeichnung

$$(a : \infty a : \infty a),$$

Fig. 136.



nach Miller:

$$(0\,0\,1),$$

welche eigentlich nur eines seiner drei Flächenpaare angiebt; die anderen sind $(1\,0\,0)$ und $(0\,1\,0)$. Von dem Parameterverhältniss leitet sich nach Obigem das abgekürzte Naumann'sche Zeichen ab

$$= \infty O \infty.$$

Der Würfel, dessen Flächen den Haupt-Symmetrieebenen parallel sind und

sich daher unter 90° schneiden, besitzt 12 Kanten, welche zu acht dreikantigen Ecken zusammenstossen. Die sechs gewöhnlichen Symmetrieebenen halbiren je einen Kantenwinkel.

Bringt man die Symmetrieebenen des Würfels und des Octaëders zur Deckung, so erscheint, je nach der Centraldistanz der Flächen der einen und der anderen Form das Octaëder als gerade Abstumpfung*) der Ecken des Würfels Fig. 137, oder das Hexaëder als gerade Abstumpfung der Ecken des Octaëders, Fig. 138. Wie aus diesen beiden Figuren hervorgeht, liegt jede Würfelfläche in zwei Zonen, deren jede durch zwei Octaëderflächen bestimmt ist. Leitet man nach §. 34 die beiden Zonensymbole ab, so ergiebt sich in der That daraus das Symbol der Würfelfläche.**)

Fig. 137.

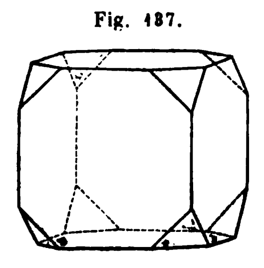
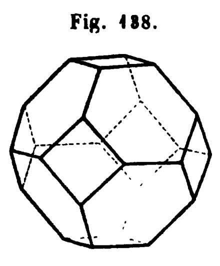


Fig. 138.

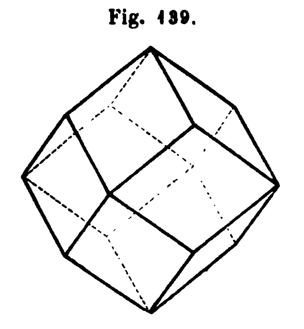


3) Das Dodekaëder Fig. 139

$= (a : a : \infty a)$ nach Weiss,
$= \infty O$ nach Naumann,
$= (1 0 1)$ nach Miller,

hat die sechs gewöhnlichen Symmetrieebenen zu Flächen. Je zwei benachbarte Flächen desselben bilden 120°, je zwei an einer vierkantigen Ecke gegenüber liegenden bilden 90° mit einander. Von den vierkantigen Ecken liegen je vier in einer Haupt-Symmetrieebene, welche die Flächen in der Richtung ihrer grösseren Diagonale durchschneidet. Ausser den sechs vierkantigen Ecken besitzt das Dodekaëder noch acht dreikantige, deren jede genau symmetrisch in der Mitte eines Octanten liegt. Von den 24 Kanten sind je sechs einander parallel, so dass je sechs Flächen eine Zone bilden, wie sich aus der Bedingung der Tautozonalität, §. 34, leicht beweisen lässt; solcher Zonen existiren also vier. Jede Dodekaëderfläche liegt in zwei dieser Zonen.

Fig. 139.



Das Octaëder muss wegen der erwähnten Lage der dreikantigen Ecken

*) Eine gerade Abstumpfung einer Ecke oder Kante ist: das Auftreten einer Fläche statt derselben, welche mit allen die Ecke oder Kante bildenden Krystallflächen gleiche Winkel einschliesst.

**) Der Anfänger möge zur Uebung diese Ableitung im vorliegenden und in den folgenden Fällen ausführen.

diese gerade abstumpfen Fig. 140, und da zwei benachbarte Octaëderflächen mit der zwischenliegenden Dodekaëderfläche parallele Kanten bilden (alle drei schneiden dieselben beiden Hauptaxen in gleichem Abstand), so muss

Fig. 140.

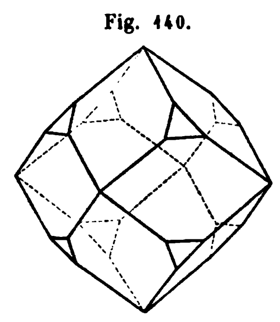
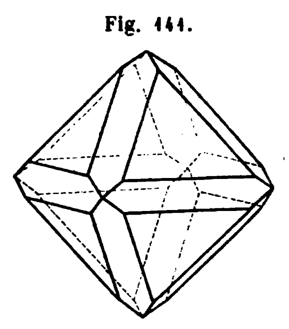


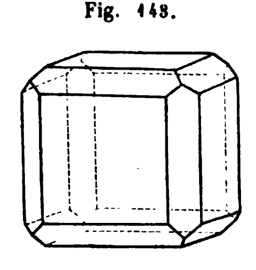
Fig. 141.



das Dodekaëder die Kanten des Octaëders gerade abstumpfen, Fig. 141. Nach der obigen Angabe der Lage der drei Haupt-Symmetrieebenen müssen die Würfelflächen die vierkantigen Ecken des Dodekaëders gerade abstumpfen, Fig. 142, d. h. jede derselben muss in zwei Zonen liegen, welche durch

Fig. 142.

Fig. 143.



je zwei an einer vierkantigen Ecke gegenüber liegende Dodekaëderflächen gegeben sind, wie sich leicht aus den Indices ergiebt. Da die Combinationskanten zweier Hexaëderflächen mit einer und derselben Dodekaëderebene parallel sind, so stumpft das Dodekaëder die Kanten des Würfels gerade ab, Fig. 143.

4) Die Ikositetraëder mit den Zeichen

$(a : ma : ma)$ nach Weiss,
mOm nach Naumann,
(hll) nach Miller,

in welch letzterem Zeichen $\frac{h}{l} = m$, denn das Parameterverhältniss

$$a : ma : ma$$

ist
$$= 1 : m : m$$
$$= \frac{1}{m} : \frac{1}{1} : \frac{1}{1}.$$

Die Indices sind demnach $m, 1, 1$, nach dem Miller'schen Zeichen $h, l, l = \frac{h}{l}, 1, 1$;

Fig. 144.

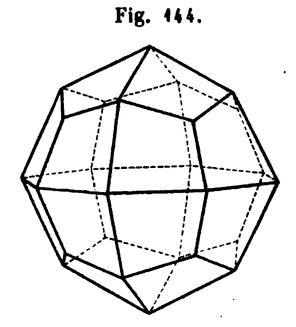
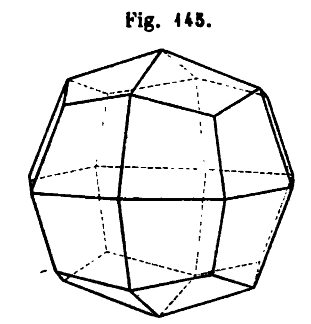


Fig. 145.



also ist $\frac{h}{l} = m$; im Falle, dass $l = 1$, ist $h = m$. Da m stets grösser als 1, so ist $h > l$. Die am häufigsten vorkommenden Ikositetraëder sind:

$$(a : 2a : 2a) = 2O2, \text{ Fig. 144,}$$

und
$$(a : 3a : 3a) = 3O3, \text{ Fig. 145,}$$

deren Symbole, da $\frac{h}{l} = 2$, resp. 3 ist, $= (2\,1\,1)$ und $(3\,1\,1)$. Von andern weniger häufigen sei z. B.

$$(a : \tfrac{3}{2}a : \tfrac{3}{2}a) = \tfrac{3}{2}O\tfrac{3}{2}$$

erwähnt, welche $m = \frac{h}{l} = \frac{3}{2}$ ergiebt, folglich $h = 3$, $l = 2$, und somit das Miller'sche Zeichen $(3\,2\,2)$.

Die Ikositetraëder besitzen zweierlei Kanten: 1) 24, zu je 4 in sechs vierkantigen Ecken zusammenstossende, sämmtlich in den Haupt-Symmetrieebenen liegend; deren Winkel ist um so stumpfer, je grösser m ist; er beträgt z. B.

$$\text{für } 2O2 = 131^\circ\,49'$$
$$\text{für } 3O3 = 144^\circ\,54'.$$

2) 24 andere, deren je 3 in einem Octanten zu einer dreikantigen Ecke zusammenstossen, und deren Winkel um so kleiner ist, je grösser m. Er beträgt z. B.

$$\text{für } 2O2 = 146^\circ\,27'$$
$$\text{für } 3O3 = 129^\circ\,31'.$$

Die Ecken, in denen je zwei Kanten der ersten und zwei der zweiten Art zusammentreffen, nennt man 2 + 2 kantige (zweiundzweikantige).

In Combination mit dem Octaëder erscheint ein Ikositetraëder als vier-

flächige Zuspitzung*) der Ecken desselben, wobei die Zuspitzungsflächen auf die Flächen des Octaëders so aufgesetzt sind, dass die Combinationskanten beider mit einer dieselbe Octaëderfläche begrenzenden Octaëderkante parallel sind. Fig. 146 stellt die Combination $O, 2O2$ dar. Umgekehrt stumpft das Octaëder die dreikantigen Ecken jedes Ikositetraëders ab, Fig. 147.

Fig. 146.

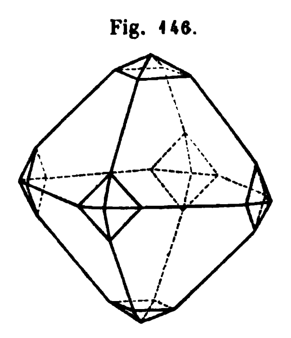
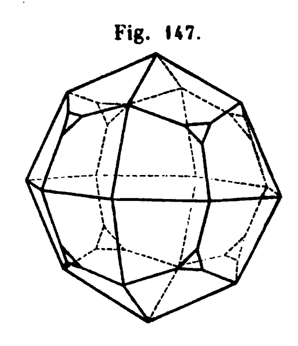


Fig. 147.



An dem Hexaëder tritt ein Ikositetraëder als dreiflächige Zuspitzung der Ecken auf, Fig. 148, wobei die Zuspitzungsflächen auf die Flächen des Würfels aufgesetzt sind, so dass die beiden Würfelkanten (= 2 Axen) in gleichem Abstand geschnitten werden, die Combinationskante also der Diagonale der Würfelfläche parallel läuft. Dieselbe Richtung hat aber auch die Combinationskante derselben Hexaëderfläche mit der geraden Abstumpfung der gleichen Ecke, d. i. die Kante $\infty O \infty : O$, folglich liegt die Fläche eines Ikositetraëders stets in einer Zone mit einer Octaëder- und einer Würfelfläche, sie stumpft die Combinationskante beider ab, s. Fig. 149. Das Hexaëder stumpft die vierkantigen Ecken der Ikositetraëder gerade ab, Fig. 150.

Fig. 148.

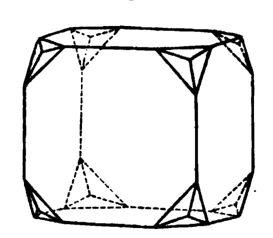


Fig. 149.

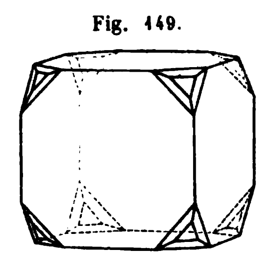
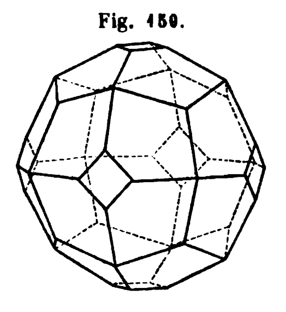


Fig. 150.



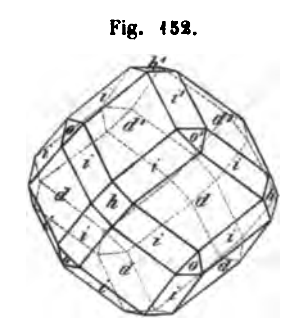
Die Combinationen der verschiedenen Ikositetraëder mit dem Rhombendodekaëder haben ein verschiedenes Ansehen, je nach den Indices der erste-

*) Eine Zuspitzung ist das Eintreten einer Ecke für eine andere, wobei natürlich die neue Ecke die stumpfere ist, so dass es eigentlich »Zustumpfung« heissen müsste; je nachdem die neue Ecke von 3, 4, . . . Flächen gebildet wird, heisst die Zuspitzung drei-, vierflächig u. s. w.

ren Form. Die Fig. 151 stellt z. B. das Dodekaëder mit der geraden Abstumpfung aller seiner 24 Kanten dar, d. h. mit einer Form, welche zu der Klasse der Ikositetraëder gehören muss, da jede ihrer Flächen gleiche Neigung gegen zwei Dodekaëderflächen, also auch gegen die beiden Hauptaxen, denen jene parallel laufen, hat, folglich diese beiden in gleichem Abstande schneidet. Es liegt deshalb auch jede solche Abstumpfungsfläche in der Zone einer Hexaëder- und einer Octaëderfläche, wie aus Fig. 152 hervorgeht, in

Fig. 151.

Fig. 152.

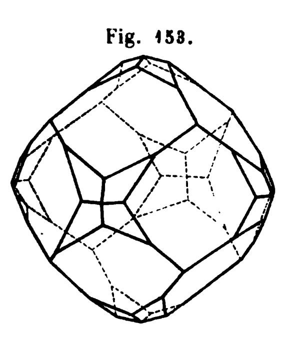


welcher $d = \infty\, O$, $h = \infty\, O\, \infty$, $o = O$ und i das Ikositetraëder bedeutet. Da die mit i^1 bezeichnete Fläche in zwei Zonen des Krystalls liegt, so sind auch ihre Indices rational, sie selbst krystallonomisch möglich. Die Indices der Flächen d^1 und d^2 sind $(1\,0\,1)$ und $(0\,1\,1)$, das Symbol ihrer Zone somit $[\bar{1}\,\bar{1}\,1]$; die Indices von h^1 und o^1: $(0\,0\,1)$ und $(1\,1\,1)$, das Symbol ihrer Zone folglich $[\bar{1}\,1\,0]$; die in beiden Zonen liegende Fläche hat demnach das Zeichen $(\bar{1}\,\bar{1}\,\bar{2})$; dieses bezeichnet aber die Parallelfläche von $(1\,1\,2)$, die selbstverständlich auch in denselben beiden Zonen liegt. Das Ikositetraëder i, welches die Dodekaëderkanten gerade abstumpft, hat demnach das Parameterverhältniss

$$a : 2a : 2a;$$

es ist unter allen Ikositetraëdern das häufigste und dasjenige mit dem einfachsten Parameterverhältniss. Ein Ikositetraëder, dessen Coëfficient $m > 2$, hat, der Fläche i^1 entsprechend, eine solche, deren Neigung gegen die Horizontalebene eine geringere ist, als bei i^1, welche also mit d^1 und d^2 Kanten bildet, die nach unten convergiren. Eine solche Form, z. B. $3O3$ in Fig. 153, bildet eine vierflächige Zuspitzung der vierkantigen Ecken des Dodekaëders, die Zuspitzungsflächen auf die Dodekaëderkanten aufgesetzt.

Fig. 153.

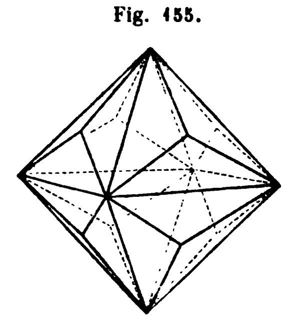


Ist endlich $m < 2$, z. B. $\frac{3}{2}$, so bildet dieses Ikositetraëder eine dreiflächige Zuspitzung der dreikantigen Ecken des Dodekaëders, die Zuspitzungsflächen auf dessen Kanten aufgesetzt, wie es Fig. 154 zeigt, weil die der Fläche i^1

(in Fig. 152) entsprechende nunmehr eine steilere Lage hat, als die Kante $d^1 : d^2$, also mit diesen beiden Flächen nach oben convergirende Kanten bilden muss.

Fig. 154.

Fig. 155.



5) Die **Triakisoctaëder** oder **Pyramidenoctaëder** sind zu bezeichnen

$(a : a : ma)$ nach Weiss,
mO nach Naumann
und (hhl) nach Miller.

Hierbei ist wiederum $h > l$ und $\frac{h}{l} = m$. Das häufigste Triakisoctaëder ist

$$2O = (a : a : 2a) = (221), \text{ Fig. 155.}$$

Die Pyramidenoctaëder besitzen zweierlei Kanten: 1) 12 zu je 4 in einer Haupt-Symmetrieebene liegende, den Kanten des Octaëders parallele, deren Winkel um so stumpfer ist, je grösser m; er beträgt für

$$2O = 141^\circ 3';$$

Fig. 156.

2) 24 andere, von denen je 3 in einem Octanten zu einer dreikantigen Ecke zusammenstossen und deren Winkel um so kleiner ist, je grösser m. Er beträgt

für $2O = 152^\circ 44'$.

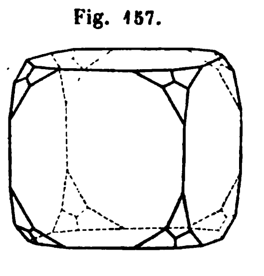
Die Ecken, in denen vier Kanten der ersten mit vier der zweiten Art zusammenstossen, heissen **vierundvierkantige**.

Da die Triakisoctaëderflächen zu je zwei sich in einer Kante schneiden, welche die Richtung einer Octaëderkante hat, so müssen sie in Combination mit dem Octaëder als eine **Zuschärfung***) der Kanten des-

*) Unter einer **Zuschärfung** einer Kante versteht man das Auftreten einer ihr parallelen Kante, welche von zwei, natürlich sich unter stumpferem Winkel schneidenden Kanten gebildet wird, so dass es eigentlich »Zustumpfung« heissen müsste. Auch eine Ecke wird als zugeschärft bezeichnet, wenn statt derselben eine Kante erscheint.

selben erscheinen, Fig. 156, während umgekehrt das Octaëder die dreikantigen Ecken der Pyramidenoctaëder gerade abstumpft. Am Hexaëder treten diese Formen als dreiflächige Zuspitzung der Ecken auf, Fig. 157, wobei die Zuspitzungsflächen auf die Kanten des Würfels aufgesetzt sind. Das Hexaëder stumpft die vierund-vierkantigen Ecken der Pyramidenoctaëder gerade ab. An dem Dodekaëder erscheinen diese Formen als dreiflächige Zuspitzungen der dreikantigen Ecken, die Zuspitzungsflächen so auf die Dodekaëderflächen aufgesetzt, dass jede dieser letzteren in der Zone zweier Triakisoctaëderflächen liegt, wie Fig. 158 zeigt. Es ist also das Dodekaëder die gerade Abstumpfung der 12 Kanten erster Art an dem Pyramidenoctaëder.

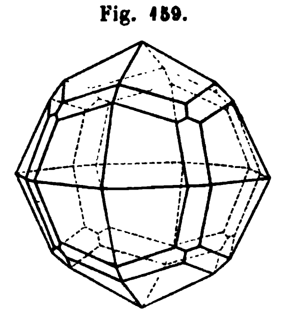
Fig. 157.



Die Combinationen einer solchen Form mit einem Ikositetraëder haben natürlich ein ganz verschiedenes Aussehen, je nach dem speciellen Werthe der Coëfficienten m. So ist z. B. die gerade Abstumpfung aller 24 Kanten der zweiten Art bei einem Ikositetraëder ein Pyramidenoctaëder, wie aus Fig. 159

Fig. 158.

Fig. 159.



zu ersehen ist. Da eine solche Fläche nicht nur in der Zone zweier Ebenen des betreffenden Ikositetraëders, sondern auch in derjenigen einer Octaëder- und einer Dodekaëderfläche liegt, so ist sie durch die Indices des Ikositetraëders bestimmt und nach bekannter Methode zu berechnen; so findet man z. B., dass die gerade Abstumpfung jener Kanten an dem Ikositetraëder $2O2 = (112)$, das Pyramidenoctaëder $\frac{3}{2}O = (233)$ ist.

6) Die **Tetrakishexaëder** oder **Pyramidenwürfel** bezeichnet man folgendermassen:

$(a : \infty a : na)$ nach Weiss,

∞On nach Naumann,

$(hk0)$ nach Miller,

worin $\frac{h}{k} = n > 1$. Am häufigsten findet sich der Pyramidenwürfel

$$\infty O2 = (a : \infty a : 2a) = (120), \text{ Fig. } 160.$$

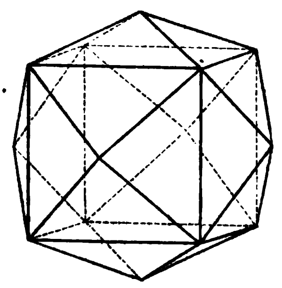
Die Tetrakishexaëder haben ebenfalls zweierlei Kanten: 1) 12 denjenigen

des Hexaëders parallele, deren Winkel um so stumpfer ist, je kleiner n ist, d. h. je weniger es sich von 1 unterscheidet. Derselbe beträgt:

$$\text{für } \infty O2 = 143^{0}\,8'.$$

2) 24, zu je 4 in einer vierkantigen Ecke zusammenstossend, gleichsam eine auf jede Würfelfläche aufgesetzte vierseitige Pyramide bildend. Der Winkel dieser ist um so stumpfer, je grösser n ist und beträgt

Fig. 160.



$$\text{für } \infty O2 = 143^{0}\,8'.$$

Für diesen einzigen Pyramidenwürfel sind demnach beide Kantenwinkel gleich gross, so dass je drei Kanten der ersten mit dreien der zweiten Art in einer sechskantigen Ecke zusammentreffen, während die entsprechenden Ecken bei allen anderen Pyramidenwürfeln dreiunddreikantige sind.

In Combination mit dem Octaëder müssen die Tetrakishexaëder als vierflächige Zuspitzung der Ecken jenes erscheinen, die Zuspitzungsflächen auf die Octaëderkanten aufgesetzt, Fig. 161. Umgekehrt stumpft das Octaëder die dreiunddreikantigen Ecken der Pyramidenwürfel gerade ab. Die letzteren Formen bilden ferner eine Zuschärfung der Kanten des Hexaëders, Fig. 162, während dieses die vierkantigen Ecken der Pyramidenwürfel gerade abstumpft. In der Zone zweier Hexaëderflächen und derjenigen eines Pyramidenwürfels, welche die Kante jener zuschärfen, liegt auch die Dodekaëderfläche, welche dieselbe Würfelkante abstumpft, folglich bildet das Rhombendodekaëder die Abstumpfung aller Kanten erster Art an den Tetrakishexaëdern, und diese spitzen die vierkantigen Ecken des Dodekaëders derart zu, dass die Zuspitzungsflächen auf dessen Flächen gerade aufgesetzt erscheinen, Fig. 163. Was die Combinationen der Pyramidenwürfel mit den Ikositetraëdern und Triakisoctaëdern betrifft, so sind dieselben sehr mannigfaltige, je nach den bestimmten Werthen von m der einen und n der anderen Form. So ist z. B. leicht einzusehen, dass die gerade Abstumpfung aller

Fig. 161.

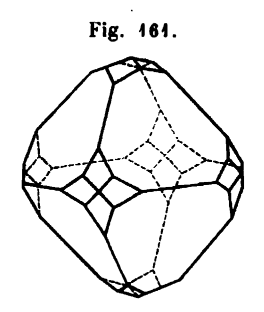


Fig. 162.

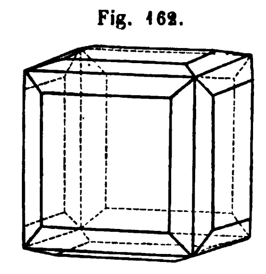
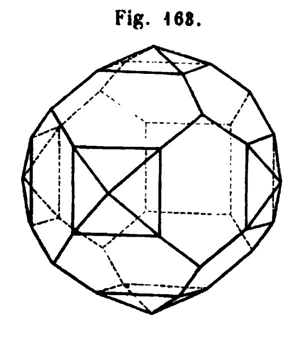


Fig. 163.



in den Haupt-Symmetrieebenen liegenden Kanten des Ikositetraëders $2O2$ den Pyramidenwürfel $\infty O2$ liefert u. s. f.

7) Die **Hexakisoctaëder** oder **Achtundvierzigflächner** werden bezeichnet:

$(a : ma : na)$ nach Weiss,
mOn nach Naumann,
(hkl) nach Miller,

in welchem Zeichen stets h den kleinsten, l den grössten Index bedeutet.

Da das Parameterverhältniss

$$a : ma : na = \frac{1}{mn} : \frac{1}{n} : \frac{1}{m},$$

so sind die Indices $= mn, n, m$, welche natürlich auf den einfachsten Ausdruck durch ganze Zahlen zu bringen sind. Wegen der obigen Reihenfolge ist zu setzen $h = n$, $k = m$, $l = mn$. Am häufigsten kommen folgende 48-Flächner vor:

$$3O\tfrac{3}{2} = (a : 3a : \tfrac{3}{2}a) = (123) \text{ Fig. } 164,$$
$$4O2 = (a : 4a : 2a) = (124) \text{ Fig. } 165.$$

Fig. 164.

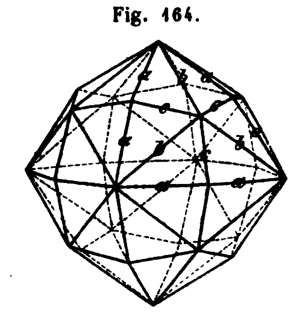
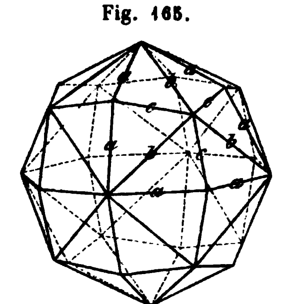


Fig. 165.



Diese Formen besitzen dreierlei Kanten, deren Winkel im Allgemeinen verschieden sind: 1) 24 mit a bezeichnete, sämmtlich in den Haupt-Symmetrieebenen gelegen; 2) 24 längere b und 3) 24 kürzere c, in den Dodekaëderebenen liegende Kanten. Diejenigen, welche in Figg. 164 und 165 mit a und b bezeichnet sind, bilden sechs vierundvierkantige Ecken; die Kanten a und c 12 zweiundzweikantige, endlich b und c 8 dreiunddreikantige Ecken. Die Winkel dieser Kanten sind für die beiden angeführten Hexakisoctaëder:

	a	b	c
für $3O\frac{3}{2}$:	$= 149^0\ 0'$	$= 158^0\ 13'$	$= 158^0\ 13'$,
für $4O2$:	$= 154\ \ 47$	$= 162\ \ 15$	$= 144\ \ \ 3$.

In Combination mit dem Octaëder bildet jeder 48-Flächner eine achtseitige Zuspitzung der Octaëderecken, Fig. 166, während letztere Form die dreiunddreikantigen Ecken der ersteren gerade abstumpft. An dem Hexa-

eder treten die Hexakisoctaëder als sechsflächige Zuspitzungen der Ecken auf, Fig. 167, während der erstere die vierundvierkantigen Ecken der letzteren gerade abstumpft. Die Combinationen der 48-Flächner mit dem Rhombendodekaëder sind verschieden, je nach den Werthen von m und n; es giebt eine bestimmte Klasse unter denselben, deren Kanten b Fig. 164 genau den Kanten des Dodekaëders parallel sind; ein solcher erscheint also als Zuschärfung der Dodekaëderkanten, Fig. 168. Das Verhältniss, in welchem hierbei m und n stehen müssen, ist leicht zu finden: Aus der S. 169 entwickelten Bedingungsgleichung für die Lage einer Fläche in der Zone zweier anderer ergiebt sich für diesen Fall, da das Symbol der Zone zweier Dodekaëderflächen $= [1\,1\,\bar{1}]$,

Fig. 166.

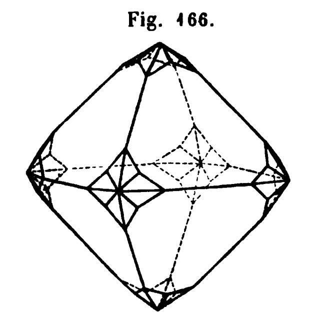


Fig. 167.

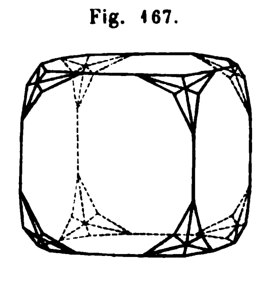
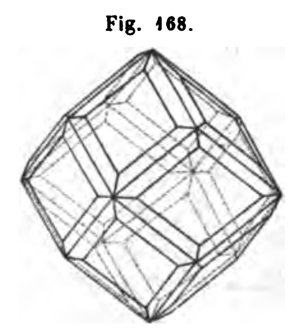


Fig. 168.



$$h + k = l$$

als die Bedingung, welcher die drei Indices eines Hexakisoctaëders genügen müssen, damit eine Fläche desselben in die Zone zweier Dodekaëderflächen falle. Setzt man für diese Werthe diejenigen, auf m und n bezogenen ein, so wird diese Bedingung:

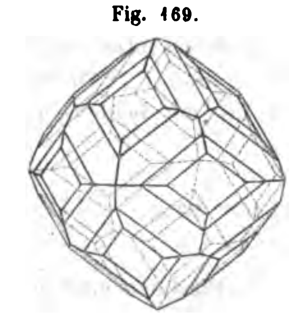
$$m + n = mn$$

d. i.

$$n = \frac{m}{m-1}.$$

Das in Fig. 168 in Combination mit dem Dodekaëder dargestellte Hexakisoctaëder ist $3\,O\frac{3}{2}$, welches dieser Bedingung genügt; das Symbol derselben Form ist $(1\,2\,3)$, in welchem, wie es die Bedingungsgleichung fordert, die Summe zweier Indices dem dritten gleich ist.

Fig. 169.



Da die 48-Flächner dieser Klasse die Kanten des Dodekaëders besitzen, diese aber durch das Ikositetraëder $2\,O\,2 = (1\,1\,2)$ abgestumpft werden, so müssen dessen Flächen auch die entsprechenden Kanten eines derartigen Hexakisoctaëders abstumpfen, wie Fig. 169 zeigt, in welcher dieselben Flächen, wie in Fig. 168, und zu diesen noch das Ikositetraëder $2\,O\,2$ hinzutretend, dargestellt sind.

§. 42. Die Beziehungen der regulären Krystallformen zu einander. Die Hexakisoctaëder stellen, wie bereits bemerkt, den allgemeinen Fall einer regulären Form dar, von welcher die übrigen sechs nur specielle Fälle sind, in welchen die Coëfficienten m und n besondere Werthe ($m = n$, 1, oder ∞) haben. Je mehr die Zahlenwerthe eines 48-Flächners sich einem dieser speciellen Fälle nähern, desto ähnlicher muss daher die Gestalt desselben derjenigen sein, welche die den speciellen Fall realisirende Krystallform besitzt. Sind z. B. die Zahlenwerthe m und n eines Hexakisoctaëders nur wenig verschieden (etwa 3 und $\frac{5}{2}$), so müssen die Kanten b Fig. 170 sehr stumpfwinkelig sein, und zwar um so mehr, je geringer jener Unterschied ist; die Form ähnelt alsdann immer mehr einem Ikositetraëder, und fällt vollkommen mit einem solchen zusammen, wenn die Flächen 1 und 2 u. s. f. sich in ihrer Lage nicht mehr unterscheiden, in eine Ebene fallen, d. h. wenn m nicht von n verschieden ist. Das Ikositetraëder mit den Parametern $1 : n : n$ ist alsdann dasjenige Hexakisoctaëder, in welchem m nicht mehr von n verschieden ist, d. h. jedes Ikositetraëder ist das eine Grenzglied einer Reihe von möglichen 48-Flächnern, der es selbst als specieller Fall angehört. Eine solche, sich immer mehr der Form von $2O2$ nähernde Reihe ist z. B.

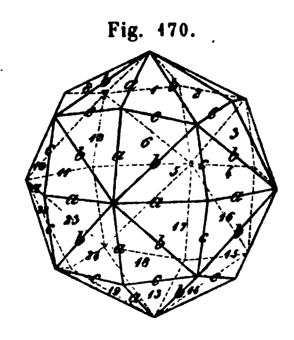
$$\ldots,\ 4O2,\ 3O2,\ \tfrac{5}{2}O2,\ \tfrac{7}{3}O2,\ 2O2.$$

Jede derartige Reihe, innerhalb welcher der Coëfficient n constant bleibt, und nur m variirt, muss nun noch eine Grenze nach der anderen Seite haben, welche einer Form entspricht, der sich die Glieder der Reihe um so mehr nähern, je mehr m von n verschieden ist, d. h. je grösser m wird. Die oberste Grenze, welche der Zahlenwerth dieses Coëfficienten erreichen kann, ist aber $= \infty$, und derjenige 48-Flächner, dessen $m = \infty$ ist, heisst Tetrakishexaëder. Die vorhin beispielsweise gewählte Reihe, nach der anderen Seite fortgesetzt:

$$\infty O2,\ \ldots\ 16O2,\ 8O2,\ 4O2\ \ldots$$

enthält Hexakisoctaëder, deren Gestalt um so ähnlicher der Grenzform $\infty O2$ ist, je grösser m ist, um so stumpfwinkeliger sind alsdann die Kanten a, Fig. 170. Für $m = \infty$ werden diese $= 180^0$, d. h. die Flächen 1 und 7 u. s. w. Fig. 170 fallen in eine Ebene. Danach haben wir auch jeden Pyramidenwürfel als einen 48-Flächner zu betrachten, und zwar als Grenzform einer Reihe von Hexakisoctaëdern, welche sämmtlich denselben Coëfficienten n haben und deren zweite Grenzform dasjenige Ikositetraëder ist, dessen m demselben Zahlenwerth gleich ist. Da in allen Formen einer derartigen Reihe, incl. der beiden Grenzformen, zwei Hauptaxen in dem constanten Verhältniss $1 : n$ geschnitten werden, so sind die Flächen aller Formen jener Reihe parallel Geraden, welche zwei jener Axen in dem-

Fig. 170.



selben Verhältniss schneiden, d. h. die entsprechenden Flächen aller derselben liegen in einer Zone.*) Demnach liegt eine beliebige Fläche irgend eines der Hexakisoctaëder einer bestimmten Reihe stets mit parallelen Kanten zwischen je einer Fläche der beiden Grenzformen derselben Reihe, also ist auch die Lage der Flächen aller einer Reihe angehörigen 48-Flächner eine zwischen inneliegende zwischen denjenigen des Pyramidenwürfels und des Ikositetraëders, welche die Grenzformen der Reihe bilden.

Ist in dem Parameterverhältniss eines Hexakisoctaëders der kleinere Coëfficient n nur wenig von 1 verschieden, z. B. $\frac{4}{3}$, so können sich die Flächen 1 und 6 Fig. 170, ebenso 7 und 12 u. s. f. nur wenig in ihrer Richtung unterscheiden, d. h. die Kanten c müssen sehr stumpfwinkelig sein. Die Form ähnelt alsdann einem Pyramidenoctaëder, und zwar um so mehr, je weniger n grösser als 1 ist. Das Triakisoctaëder mit demselben m endlich ist derjenige 48-Flächner, dessen $n = 1$ ist. So giebt es denn wieder eine Reihe von möglichen Hexakisoctaëdern, deren m gleich ist, deren n dagegen variirt; die untere Grenzform bildet das Triakisoctaëder $(1 : 1 : m)$, in welchem n seinen kleinsten Werth hat; die obere Grenze der Reihe bildet das Ikositetraëder $(1 : m : m)$, in welchem n, da es der kleinere Coëfficient ist, seinen grösstmöglichsten Werth erreicht. Die entsprechenden Flächen einer solchen Reihe bilden ebenfalls eine Zone, zu deren Flächen auch die der beiden Grenzformen, zwischen denen die übrigen liegen, gehören, da sie sämmtlich einer Geraden parallel sind, welche zwei Hauptaxen in dem für diese Reihe constanten Verhältniss $1 : m$ schneidet.

Endlich können auch eine ganze Reihe von möglichen 48-Flächnern mit parallelen Kanten liegen zwischen den Flächen eines beliebigen Tetrakishexaëders und eines Pyramidenoctaëders; seien diese $\infty O n = (1\,0\,n)$ und $m O = (m\,1\,m)$, so ergiebt sich die Bedingungsgleichung

$$km \cdot (n-1) + l = hn;$$

jeder 48-Flächner, dessen Indices in Bezug auf ein bestimmtes m und n dieser Gleichung genügen, stumpft die Combinationskante jener beiden Flächen mit parallelen Kanten ab. Umgekehrt kann man für ein beliebiges Hexakisoctaëder aus obiger Gleichung das Verhältniss berechnen, in welchem das m des Triakisoctaëders zu dem n des Pyramidenwürfels stehen muss, damit jener in die zwischen diesen beiden Grenzformen liegenden Reihe von 48-Flächnern gehöre.

Daraus ergiebt sich, dass jedes Hexakisoctaëder ein Glied dreier verschiedener Ableitungsreihen ist, 1) einer solchen, deren Endglieder ein Ikositetraëder und ein Pyramidenwürfel sind; 2) einer von einem Triakisoctaëder und einem Ikositetraëder begrenzten; 3) von einer Reihe, deren Grenzformen ein Pyramidenwürfel und ein Triakisoctaëder sind. So bilden die drei Vierundzwanzigflächner die Grenzformen für alle 48-Flächner, deren

*) Wie auch leicht durch Einsetzen ihrer Indices in die Bedingungsgleichung der Tautozonalität bewiesen werden kann.

Flächen sämmtlich zwischen den Grenzen liegen, welche durch die Flächen jener bestimmt sind. Dieser drei Grenzformen giebt es aber ebenfalls eine beliebige Zahl möglicher Einzelformen, welche unter einander selbst wieder eine Ableitungsreihe mit bestimmten Grenzformen bilden.

Betrachten wir zunächst die Ikositetraëder ($1 : m : m$), welche sich durch den bestimmten Zahlenwerth von m von einander unterscheiden, so ist klar, dass die vierkantige Ecke, in welcher die Kanten a Fig. 171 zusammenstossen, um so stumpfwinkeliger wird, je grösser m ist; mit steigendem Zahlenwerth dieses Coëfficienten nähern sich die vier, eine solche Ecke bildenden, Flächen in ihrer Lage einander immer mehr. Wenn m seinen höchstmöglichen Werth ∞ erreicht, so fallen jene vier Flächen in eine Ebene, welche der einen Haupt-Symmetrieebene parallel ist, folglich einer Würfelfläche entspricht. Das Hexaëder, d. h. dasjenige Ikositetraëder, dessen $m = \infty$ ist, bildet somit nach einer Seite hin die Grenzform der sämmtlichen Ikositetraëder. Je kleiner dagegen m ist, desto spitzer erscheinen die vierkantigen Ecken dieser Formen, desto stumpfwinkeliger dagegen die Kanten b Fig. 172 $= \frac{1}{2}O\frac{1}{2}$, welche die dreikantigen Ecken bilden. Bei einem

Fig. 171.

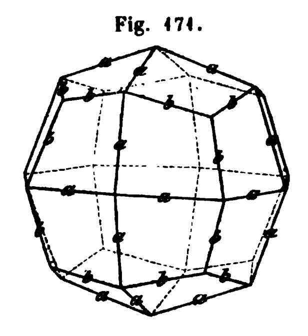
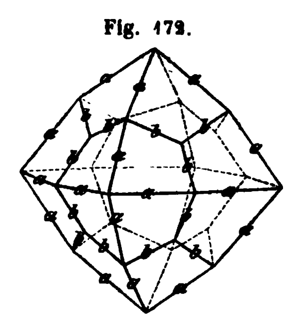


Fig. 172.



bestimmten Werthe von m, wenn dies nämlich $= 1$ ist, werden die letzteren Kanten 180^0, d. h. die drei in einem Octanten liegenden Flächen dieses Ikositetraëders unterscheiden sich in ihrer Lage nicht mehr von einander, wir nennen es dann Octaëder, und haben in demselben die andere Grenzform der Reihe aller Ikositetraëder gefunden. Da die Flächen aller Glieder dieser Reihe zwei Hauptaxen in gleichem Abstande schneiden, so müssen die einander entsprechenden Flächen sämmtlich einer Geraden parallel sein, welche zwei Axen in demselben Verhältniss schneidet, sie müssen also sämmtlich einer Zone angehören, welche durch die beiden Endglieder der Reihe, durch die Würfel- und die Octaëderfläche bestimmt ist. Alle Ikositetraëder liegen mit parallelen Kanten zwischen Hexaëder und Octaëder.

Gehen wir über zu der Betrachtung der Triakisoctaëder, deren Parameterverhältniss $1 : 1 : m$, so ist klar, dass dieselben eine Reihe bilden, deren untere Grenze das Octaëder ist, d. h. dasjenige Triakisoctaëder, dessen m den kleinstmöglichen Werth 1 hat, weshalb sich die drei in einem

Octanten liegenden Flächen desselben in ihrer Lage nicht von einander unterscheiden. Je grösser der Zahlenwerth von m ist, desto stumpfwinkeliger werden die Kanten, welche denen des Octaëders parallel laufen, und für $m = \infty$ werden diese $= 180^0$, d. h. die beiden in einer Octaëderkante zusammenstossenden Flächen fallen in eine Ebene, welche einer Dodekaëderfläche entspricht. Das Octaëder und das Rhombendodekaëder sind die beiden Grenzformen der Reihe der Pyramidenoctaëder; die Flächen der letzteren liegen sämmtlich mit parallelen Kanten zwischen je einer Octaëder- und einer Dodekaëderfläche.

Die dritte Klasse von 24-Flächnern, die Tetrakishexaëder, mit dem Parameterverhältniss $1 : n : \infty$, bilden ebenfalls eine einzige Ableitungsreihe, deren Anfangsglied das Dodekaëder ist, d. h. derjenige Pyramidenwürfel, dessen $n = 1$, bei welchem sich also je zwei, in einer Hexaëderkante zusammenstossende Flächen in ihrer Lage nicht mehr unterscheiden. Das Endglied der Reihe ist offenbar der Würfel, derjenige Pyramidenwürfel, dessen $n = \infty$, bei welchem folglich je vier in einer vierkantigen Ecke sich schneidende Flächen in eine Ebene fallen. Je grösser n, desto ähnlicher muss die Form dem Hexaëder werden. Da die Flächen aller Pyramidenwürfel einer Hauptaxe, d. i. einer Würfelkante, parallel sind, so liegen sie stets in der Zone zweier Würfelflächen; in dieselbe fällt auch die Dodekaëderfläche, welchen die Würfelkante gerade abstumpft, also liegen die Flächen aller Tetrakishexaëder mit parallelen Kanten zwischen je einer Hexaëder- und einer Dodekaëderfläche.

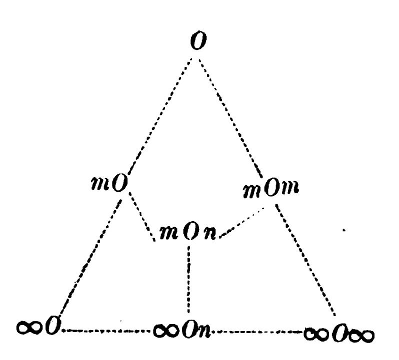
Das Rhombendodekaëder haben wir soeben betrachten gelernt als dasjenige Triakisoctaëder, dessen $m = \infty$, oder als denjenigen Pyramidenwürfel, dessen $n = 1$ ist. Da diese beiden 24-Flächner selbst aber nur Grenzglieder der verschiedenen Reihen von 48-Flächnern sind, so können wir nunmehr das Rhombendodekaëder bezeichnen als denjenigen speciellen Fall der Hexakisoctaëder, in welchem $m = \infty$ und $n = 1$ ist, und es ist klar, dass es nur einen einzigen 48-Flächner mit diesem Parameterverhältniss geben kann. Es ist derjenige, bei welchem je 4 Flächen, z. B. 1, 6, 7, 12 Fig. 170, in eine Ebene fallen.

Das Hexaëder ergab sich aus obigen Betrachtungen als dasjenige Ikositetraëder, dessen $m = \infty$, sowie auch als der Pyramidenwürfel, dessen n denselben Werth hat, wir können es folglich auch auffassen als denjenigen 48-Flächner, dessen m und n beide den höchstmöglichen Werth ∞ haben, und bei welchem sich je 8 Flächen, z. B. 5, 6, 11, 12, 17, 18, 23, 24 Fig. 170, in ihrer Lage nicht mehr unterscheiden.

Endlich ist das Octaëder dasjenige Ikositetraëder, dessen $m = 1$, oder dasjenige Triakisoctaëder, dessen m denselben kleinsten Werth hat, es ist also auch dasjenige Hexakisoctaëder, bei welchem m und $n = 1$, folglich die sechs in einen Octanten fallenden Flächen sämmtlich einander parallel sind und somit nur eine einzige Fläche bilden.

Den Zusammenhang aller Ableitungsreihen ersieht man am leichtesten

durch das folgende Schema, in welchem ausser den Endgliedern nur noch das allgemeine Glied jeder Reihe aufgeführt ist und alle durch Linien verbundene Zeichen eine Ableitungsreihe bilden:



Wir gelangen somit zu der Vorstellung, dass es im regulären System eigentlich nur eine Art holoëdrischer Formen giebt, welche im Allgemeinen 48 Flächen besitzen, von denen aber bei besonderen Zahlenwerthen der Parametercoëfficienten je 2, 4, 6 oder 8 parallel werden können, und somit Formen mit 24, 12, 8 oder 6 Flächen entstehen. Diese letzteren müssen, da sie ja nur specielle Fälle der Hexakisoctaëder sind, allen denselben krystallographischen Gesetzen unterworfen sein, wie jene. Dieser Umstand ist von besonderer Wichtigkeit für das Gesetz der Hemiëdrie. Es ist bereits in §. 38 bei der allgemeinen Besprechung desselben erwähnt worden, dass erfahrungsgemäss ein Körper, welcher hemiëdrisch krystallisirt, nur eine bestimmte Art der Hemiëdrie zeigt, und niemals andere Formen, als hemiëdrische, welche jener Art von Hemiëdrie entsprechen. Nach Obigem muss es genügen, die Art der Hemiëdrie an den 48-Flächnern eines regulären Krystalls zu bestimmen, um die resultirenden Formen aus den übrigen sechs Gestalten zu kennen. Da diese letzteren nur specielle Fälle der Hexakisoctaëder sind, so muss für sie ganz das Gleiche gelten; sind diese an einem Körper nach einem bestimmten Gesetz hemiëdrisch, so müssen es auch die übrigen Formen, und zwar nach demselben Gesetz sein.

Ehe wir die möglichen Arten der Hemiëdrie des regulären Systems besprechen, sollen im folgenden § zunächst die wichtigsten holoëdrisch regulär krystallisirenden Substanzen aufgezählt und ihre häufigsten Krystallformen und physikalischen Eigenschaften zusammengestellt werden:

§. 43. **Beispiele.** Phosphor = *P*. Krystallisirt aus Chlorschwefel u. a. Lösungsmitteln in Dodekaëdern.

Eisen = *Fe*. Kleine octaëdrische, nach den Hauptaxen an einander gereihte Krystalle in porös erstarrtem Roheisen: hexaëdrische Spaltbarkeit sehr deutlich in manchen Meteoreisen.

Kupfer = *Cu*. In Schlacken abgeschiedenes und galvanisch gefälltes zeigt meist O, die natürlichen Krystalle $\infty O \infty$, O, ∞O, $\infty O 3$ (Fig. 162) u. s. f.

Blei = *Pb* erstarrt aus dem geschmolzenen Zustand in Combination von O, $\infty O \infty$.

Quecksilber = *Hg* erstarrt in Octaëdern.

Silber = *Ag*. Galvanisch abgeschiedene und natürliche Krystalle: $\infty O \infty$, O, ∞O, $3O3$ u. s. f.

Gold = *Au* zeigt dieselben Formen.

Platin = *Pt*. Natürlich $\infty O \infty$.

Chlorkalium *KCl*. Aus wässeriger Lösung $\infty O \infty$, aus roher Pottaschelösung O; natürlich $\infty O \infty$, O. Spaltbar $\infty O \infty$ vollkommen. Brechungsexponent $n = 1,49031$ für Natriumflamme.*) Diatherman in hohem Grade.

Jod-, Brom-, Cyan- und Fluorkalium = *KJ*, *KBr*, *KCy*, *KF* krystallisiren aus wässeriger Lösung alle in $\infty O \infty$.

Salmiak = NH^4Cl. An sublimativ gebildeten Krystallen: O, $\infty O \infty$, ∞O, $2O2$ u. a., einzeln oder in Combinationen.

Chlornatrium (nat. Steinsalz) = *NaCl*. Aus wässeriger Lösung $\infty O \infty$, aus harnstoffhaltiger O. Spaltbar nach $\infty O \infty$ vollkommen, daher die Härte sehr verschieden in verschiedenen Richtungen. So ist nach den Untersuchungen Exner's (s. §. 2) die Härtecurve auf den Hexaëderflächen symmetrisch sowohl zu den Seiten, als zu den Diagonalen derselben und zeigt parallel den ersteren vier Minima, parallel den letzteren vier Maxima, wobei sich die Radien, welche der Härte proportional sind, in dem einen und dem andern Falle verhalten wie 1 : 1,3. Directe Messungen der Zugfestigkeit in verschiedenen Richtungen stellte Sohnke (Poggend. Ann. 137 Bd. 177) an und fand das Gewicht, welches nöthig ist, um ein Steinsalzprisma von 1 Quadratmillim. Querschnitt zu zerreissen, = 35 Loth, wenn die Längsaxe des Prismas senkrecht zum Hexaëder, über 105 Loth, wenn dieselbe senkrecht zu einer Octaëderfläche ist. Mit dieser grossen Differenz der Cohäsion in verschiedenen Richtungen dürfte es wohl zusammenhängen, dass auch der Elasticitätscoëfficient sich mit der Richtung erheblich ändert; nach den Messungen Voigt's (»Untersuchung über die Elasticitätsverhältnisse des Steinsalzes, Dissertat. Lpz. 1874) ist der Elasticitätscoëfficient

parallel den drei Hauptaxen	= 4,17	Mill. Gramm,
normal zu ∞O	= 3,40	„ „
normal zu O	= 3,18	„ „

und ist in allen krystallographisch gleichwerthigen Richtungen gleich gross. Die Gleitflächen des Steinsalzes sind die sechs Dodekaëderflächen; stumpft man zwei gegenüberliegende Kanten eines Würfels durch Schleifen ab und presst das Stück senkrecht zu diesen Flächen zusammen, so entsteht eine bleibende Verdichtung in der Richtung der Diagonale und daher ein das Licht doppeltbrechender Streifen; durch stärkeren Druck kann man eine glänzende Bruchfläche nach der diagonalen Dodekaëderebene erhalten. Ein von den sechs Würfelflächen begrenztes Prisma von den Endflächen her, also in der Richtung einer Hauptaxe, zusammengepresst, wird kürzer und dicker durch Glieten der Theilchen nach den Dodekaëderflächen, und lassen

*) Für andere Wellenlängen s. Stefan, Wien. Ak. Sitz.-Ber. 63 Bd. II, 241.

sich so bedeutende Deformationen hervorbringen, ohne dass das Stück zerbricht. Hierbei, sowie beim Zerschlagen, Schleifen u. s. w. entstehen aber immer lokale Verdichtungen im Steinsalz, welche sich durch Doppelbrechung (Aufhellung zwischen gekreuzten Nicols) zu erkennen geben. Man findet sogar selten ganz homogene und von doppeltbrechenden Stellen freie Steinsalzstücke. Die Gleitflächen erhält man auch durch die Körnerprobe, indem die Schlagfigur auf den Würfelflächen ein rechtwinkeliges Kreuz darstellt, dessen Radien den Diagonalen parallel laufen (Reusch, Poggend. Ann. 132. Bd. 441).

Brechungsexponent des Steinsalzes

$$n = 1{,}54418 \text{ für Natriumflamme}$$

(s. Stefan, a. a. O.)*

Chlorsilber = $AgCl$. Aus ammoniakalischer Lösung und natürliche Krystalle: $\infty O\infty$, O, ∞O.

Fluorcalcium (nat. Flussspath) = CaF^2. An natürlichen Krystallen sehr viele Formen bekannt; am häufigsten: $\infty O\infty$, O, ∞O, $\infty O3$, $3O3$, $4O2$ (s. Figg. 162, 167). Spaltbar nach O.

Bleisulfid (nat. Bleiglanz) = PbS. Künstliche $\infty O\infty$, natürliche Krystalle: $\infty O\infty$, O, ∞O, $2O$, $2O2$ (s. Figg. 137, 138, 149, 156). Spaltbar $\infty O\infty$ vollkommen.

Silbersulfid (nat. Silberglanz) = Ag^2S. Natürliche Krystalle $\infty O\infty$, O, ∞O, $2O2$ (Figg. 137, 138, 140, 144).

Kupferoxydul (nat. Rothkupfererz) = Cu^2O. Natürliche Krystalle: O, $\infty O\infty$, ∞O, $2O2$.

Arsenige Säure = As^2O^3. Aus Lösungen und sublimirt O.

Antimonoxyd (nat. Senarmontit) = Sb^2O^3. Die natürlichen Krystalle zeigen häufig unregelmässige Erscheinungen der Doppelbrechung in Folge innerer Spannungen, welche bei der Krystallisation entstanden (vergl. §. 23).

Spinell (nat.) = $MgAl^2O^4$: O oder Comb. O, $3O3$ Fig. 146.

Eisenoxydoxydul (nat. Magneteisenerz) = $Fe\,Fe^2\,O^4$. O oder ∞O, O.

Granat (nat.) = $\overset{''}{R}{}^3\,\overset{VI}{R}{}^2\,Si^3\,O^{12}$*), worin $\overset{''}{R} = Ca, Mg, Fe$ oder Mn,

$$\overset{VI}{R}{}^2 = Al^2,\ Fe^2 \text{ oder } Cr^2.$$

Häufigste Formen: ∞O, $-\infty O$, $2O2$ Fig. 151, $-\infty O$, $2O2$, $3O\frac{3}{2}$ Figg. 168, 169. Brechungsexp. $n = 1{,}77$ (roth) bei rothen Granaten.

Analcim (nat.) = $Na^2\,Al^2\,Si^4\,O^{12} + 2H^2O$. $\infty O\infty$, $2O2$ Figg. 148, 150. $n = 1{,}487$ roth. Die Krystalle dieses Körpers zeigen sehr häufig Erscheinungen der Doppelbrechung, analog denen der gekühlten Gläser, hervorgebracht durch innere Spannungen (s. Brewster, Transact. of the Roy. Soc. of Edinburg, 1824).

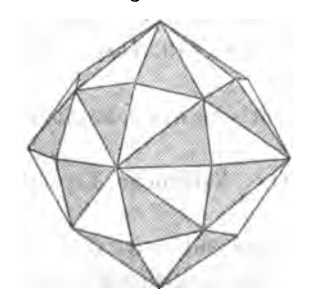
---

*) Die chemischen Formeln sind in der Weise dargestellt, wie in des Verfassers: »Tabellar. Zusammenstellung der einfachen Mineralien, nach ihren chem.-krystall. Beziehungen geordnet, Braunschweig 1874.«

2) Hemiëdrische Formen des regulären Systems.

§. 44. **Mögliche Arten der Hemiëdrie.** Um die möglichen Arten der Hemiëdrie im regulären System zu erfahren, ist es, wie wir sahen, nur nöthig, zu bestimmen, auf welche Arten aus einem Hexakisoctaëder eine hemiëdrische Form entstehen kann, da hierdurch die entsprechenden Hemiëder aller übrigen Formen als specielle Fälle gegeben sind. Im Folgenden soll also untersucht werden, auf welche Art man aus den 48 Flächen eines Hexakisoctaëders 24 so auswählen kann, dass sie für sich eine Form umschliessen, welche den bereits gegebenen Bedingungen der Hemiëdrie genügt, d. h. deren Flächen bei gleichem Abstand von dem Durchschnittspunkte der drei Hauptaxen, deren sechs Hälften (von jenem Punkte an gerechnet) in gleichem Abstande, in gleicher Zahl und unter gleichen Winkeln durchschneiden. Das Nächstliegende ist offenbar, alle abwechselnde Flächen zu wählen, so dass von je zwei im 48-Flächner in einer Kante zusammenstossende Flächen eine ausgelassen wird; die so ausgelassenen Flächen sind in Fig. 173 (und in allen folgenden) schraffirt und deshalb die Zeichnung der Rückseite des Krystalls nicht ausgeführt. Die so ausgewählte Hälfte der Flächen bildet für sich eine rings geschlossene Figur, welche in der That den Bedingungen der Hemiëdrie entspricht, denn jede der erwähnten sechs Halbaxen wird geschnitten im Abstand 1 von 4 Flächen, im Abstand n wiederum von 4, endlich auch im Abstande m von 4 Flächen und die von je 4 solchen Flächen gebildeten vierkantigen Ecken sind für alle sechs Halbaxen genau congruent, wie mit Hülfe eines Modells, dessen abwechselnde Flächen schwarz gefärbt sind,*) leicht einzusehen ist. Hiermit haben wir also eine mögliche Art der Hemiëdrie gefunden.

Fig. 173.



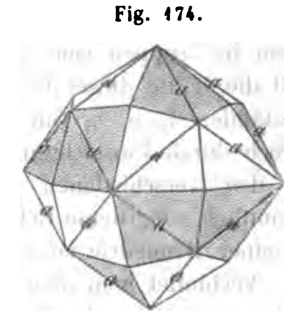
Statt die einzelnen Flächen abwechselnd auszuwählen, könnte man auch die Gruppen von je zwei Flächen alternirend wählen, um weitere Hemiëdrien zu erhalten. Dies ist aber auf dreierlei Weise möglich: 1) je zwei Flächen, welche in einer Kante a Fig. 174, oder welche 2) in einer Kante b Fig. 175, oder 3) in einer Kante c Fig. 176 zusammenstossen.

1) Alle abwechselnden, an einer 4 + 4kantigen Ecke gegenüberliegende Paare von je zwei in einer Kante a sich schneidender Flächen werden ausgelassen; Fig. 174 stellt die einzig mögliche Art der Auswahl dar, bei welcher jede der Hauptaxen in gleichem Verhältniss von gleich vielen Flächen geschnitten wird. Die Winkel indess, unter welchen diese Flächen

*) Für den Anfänger wird das Studium der Hemiëdrie durch derartig colorirte Modelle, welche auch durch die Mineralienhandlung des Hrn. Dr. Hintze in Strassburg käuflich zu haben sind, wesentlich erleichtert.

einander und die Axen schneiden, sind für die drei Hauptaxen nicht gleich. Betrachten wir z. B. die nach vorn gelegene Hälfte der auf den Beobachter zu laufenden Hauptaxe, so wird diese im Abstand 1 geschnitten von 4, eine zweiundzweikantige Ecke bildenden Flächen; im Abstand n von 4, welche eine **vierkantige** Ecke bilden; endlich im Abstand m von 4 Flächen, die ebenfalls in einer vierkantigen Ecke zusammenstossen. Betrachten wir dagegen die obere Hälfte der verticalen Hauptaxen, so schneiden diese zwar im Abstande 1 auch 4, eine 2+2kantige Ecke bildende Flächen; dagegen im Abstande n vier, welche nicht eine vierkantige, sondern eine zweiundzweikantige Ecke bilden; endlich im Abstand m auch 4, welche sich wieder in einer zweiundzweikantigen Ecke schneiden. Diese Auswahl der Hälfte der Flächen liefert also keine Form, welche den Bedingungen der Hemiëdrie entspricht.

Fig. 174.



2) Alle abwechselnden Gruppen von je zwei Flächen, welche in den Kanten b zusammenstossen, werden fortgelassen, Fig. 175. In diesem Falle wird die nach vorn gehende Hauptaxe geschnitten: im Abstand 1 von 4 Flächen (Ecke 2+2kantig), im Abstand n von ebenso vielen (Ecke 2+2kantig) und im Abstand m ebenfalls von 4 (Ecke 2+2kantig). Hier sind aber von den dreierlei Ecken, welche je vier, eine Hauptaxe im Abstand 1, m und n schneidende Flächen mit einander bilden, die entsprechenden an den anderen Hauptaxen genau congruent jenen ersterwähnten. Diese Auswahl der Flächen liefert also eine zweite Art von hemiëdrischen Formen.

3) Die Hälfte aller Flächenpaare, deren Einzelflächen in den Kanten c zusammenstossen, wird wiederum so ausgewählt, dass jede Hauptaxe auf

Fig. 175.

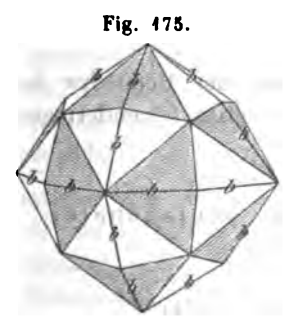
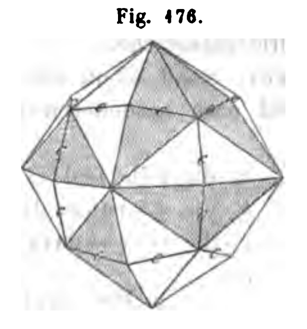


Fig. 176.



jeder Seite von vier Flächen im Abstand 1, von vier im Abstand n und von ebenso vielen in m geschnitten wird. Dies ist nur so möglich, wie es Fig. 176 darstellt. Aus derselben ist aber sofort ersichtlich, dass die erste

jener drei Kategorien von Flächen eine vierkantige Ecke bilden an der dem Beobachter zugekehrten Halbaxe, eine zweiundzweikantige an der nach oben gerichteten Halbaxe. Diese Auswahl entspricht also nicht einer möglichen Hemiëdrie.

Weiterhin ist es möglich, die 48 Flächen des Hexakisoctaëders zu zerlegen in Gruppen von drei oder von vier benachbarten Flächen, und jedesmal die Hälfte dieser Gruppen so auszuwählen, dass jede Halbaxe in den Abständen 1, *n*, *m* von je vier Flächen geschnitten wird. Man kann sich jedoch durch Einzeichnung in ein Modell leicht davon überzeugen, dass die an den verschiedenen Halbaxen einander entsprechenden Flächen nicht sämmtlich congruente Ecken bilden, dass also durch derartige Auswahl nicht zu einer Hemiëdrie zu gelangen ist.

Verbindet man aber je sechs benachbarte Flächen zu einer Gruppe, so giebt es eine Art der Auswahl der Hälfte dieser Gruppen, welche eine hemiëdrische Form liefert. Wenn man nämlich in den alternirenden Octanten, in deren jedem je sechs Flächen liegen, diese fortfallen lässt, so erhält man, Fig. 177, eine Form, deren Flächen zu je vier eine Halbaxe im Abstand 1 schneiden; die 2 + 2kantigen Ecken, welche diese bilden, sind für alle sechs Halbaxen congruent; jede der Halbaxen wird ferner im Abstand *n* ebenfalls von vier Flächen geschnitten, und die hierdurch entstehenden 2 + 2kantigen Ecken sind wiederum congruent; endlich ist das Gleiche der Fall mit den sechs zweiundzweikantigen Ecken, welche von den im Abstand *m* die Hauptaxen durchschneidenden Flächen gebildet werden. Somit hätten wir eine dritte mögliche Art der Hemiëdrie aufgefunden.

Fig. 177.

Diese ist aber auch die letzte, denn es gelingt nicht, durch Verbindung von 8 oder 16 benachbarten Flächen Gruppen zu bilden, deren regelmässig ausgewählte Hälfte den Bedingungen der Hemiëdrie entspräche.

Die drei, somit allein möglichen Arten der Hemiëdrie des regulären Systems sind nach besonderen Formen derselben folgendermassen benannt worden:

a) die plagiëdrische,
b) die dodekaëdrische oder pentagonale;
c) die tetraëdrische Hemiëdrie.

a) Die plagiëdrische Hemiëdrie.

§. 45. 1) Die plagiëdrisch-hemiëdrischen Formen des Hexakisoctaëders entstehen durch Auswahl aller abwechselnden einzelnen Flächen, Fig. 178. Die weiss gelassenen Flächen für sich liefern die in Fig. 179 *a*, die schwarzen die in Fig. 179 *b* dargestellte Form, deren Flächen bei gleicher Ausdehnung

die Gestalt ungleichseitiger Fünfecke haben. Keine Kante eines solchen 24-Flächners, welcher Pentagon-Ikositetraëder genannt wird, geht einer Symmetrieebene parallel, und da zu jeder Fläche des 48-Flächners die, sei es nach einer Würfel-, sei es nach einer Dodekaëderebene, symmetrisch gelegene Fläche dem entgegengesetzten Hemiëder angehört, so ist ein solches Pentagon-Ikositetraëder eine geometrische Form, welche keine einzige Symmetrieebene besitzt. Alle hemiëdrische Formen, welche sich von solchen holoëdrischen ableiten, die Symmetrieebenen haben, selbst aber keine solchen besitzen, zeigen eine gemeinsame geometrische Eigenschaft: die beiden Hälftgestalten können durch keine Aenderung der Stellung des einen zur Congruenz gebracht werden, sie verhalten sich zu einander, wie ein rechter zu einem linken

Fig. 178.

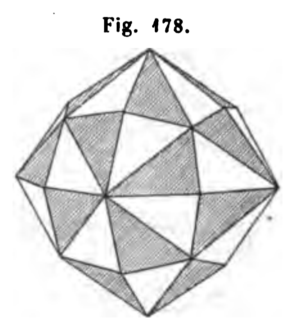


Fig. 179 *a*.

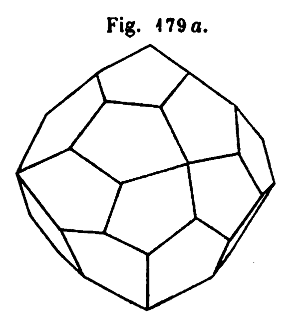
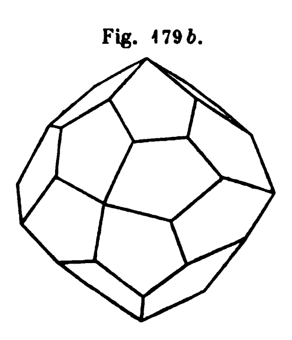


Fig. 179 *b*.



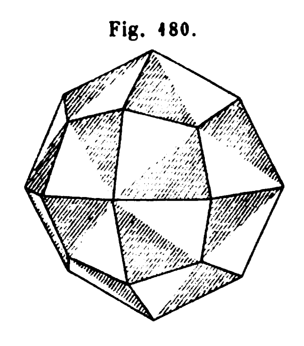
Handschuh. Man nennt solche entgegengesetzte hemiëdrische Formen enantiomorph, und eine Hemiëdrie, welche dergleichen liefert, ebenfalls eine enantiomorphe. Da die Flächen des einen Pentagon-Ikositetraëders die symmetrisch zugehörigen zu allen Flächen des anderen sind, so sind die beiden Formen zu einander natürlich symmetrisch, sowohl in Bezug auf die Ebenen des Hexaëders, als auch in Bezug auf die des Dodekaëders, d. h. das eine ist das Spiegelbild des andern, möge als Spiegelebene eine Würfel- oder eine Dodekaëderfläche dienen.

Stellt man irgend eine der drei Hauptaxen des Hexakisoctaëders vertical aufrecht, und betrachtet die sechs, einem Octanten angehörigen Flächen, so gehört jedesmal von den beiden obersten Flächen die rechts gelegene dem einen Pentagon-Ikositetraëder, die links gelegene dem entgegengesetzten an; man nennt daher das erstere das rechte Fig. 179 *a*, das letztere das linke Fig. 179 *b*, und gebraucht diese Bezeichnung überhaupt nur für enantiomorphe Gestalten.

2) Diejenigen 48-Flächner, deren m und n gleich gross sind, die Ikosi-

tetraëder, müssen an den Krystallen, an denen die übrigen Hexakisoctaëder als Pentagonikositetraëder erscheinen, derselben Hemiëdrie unterliegen. Die beiden Flächen, von denen die eine dem rechten, die andere dem linken Hemiëder angehört, fallen hierbei, wie Fig. 180 zeigt, in eine Ebene, die beiden Hälftgestalten unterscheiden sich daher weder von einander, noch von der holoëdrischen Gestalt. Dieselben sind nunmehr aufzufassen als diejenigen Pentagon-Ikositetraëder, deren $m = n$, daher die in den vierkantigen Ecken zusammenstossenden Kanten in die Haupt-Symmetrieebenen fallen. Dieser Gestalt nähert sich die eines Pentagonikositetraëders um so mehr, je weniger sich m von n unterscheidet. Das Ikositetraëder ist die Grenzform der Reihe der ersteren.

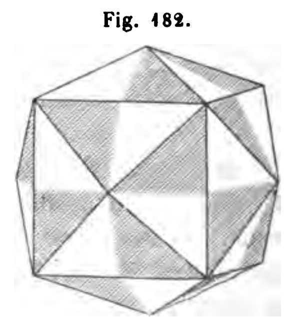
Fig. 180.



3) Diejenigen Hexakisoctaëder, deren $n = 1$ ist, die Pyramidenoctaëder, entstehen dadurch, dass stets zwei an den kürzesten Kanten des 48-Flächners benachbarte Flächen in eine Ebene fallen; von diesen gehört aber, Fig. 181, die eine jedesmal der einen Hälftform, die andere der zweiten an; die Pyramidenoctaëder, dieser Hemiëdrie unterworfen, liefern demnach ebenfalls zwei Formen, welche geometrisch mit einander und der holoëdrischen ganz identisch sind.

Fig. 181.

Fig. 182.



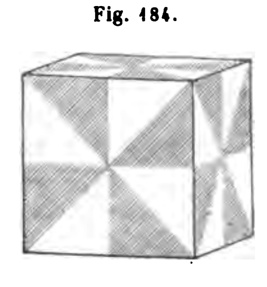
4) Die Tetrakishexaëder, als diejenigen 48-Flächner, deren $m = \infty$ ist, müssen als hemiëdrische Formen nach diesem Gesetz der Hemiëdrie, wie aus Fig. 182 ersichtlich, ebenfalls mit allen Flächen, wie die holoëdrischen erscheinen, da die eine Hälfte der Flächen mit der anderen genau zusammenfällt.

5) Das Rhombendodekaëder ist derjenige 48-Flächner, von welchem je vier Flächen in eine Ebene fallen; von diesem gehören nun zwei dem einen, die beiden anderen dem zweiten Hemiëder an; diese beiden Formen müssen daher gänzlich zusammenfallen und sich nicht von dem holoëdrischen Dodekaëder unterscheiden (s. Fig. 183).

6) Das Hexaëder ist derjenige 48-Flächner, bei welchem je acht, eine 4 + 4kantige Ecke bildenden Flächen dieselbe Lage haben; davon gehören vier dem einen, vier dem anderen Pentagon-Ikositetraëder an; diese beiden haben in diesem speciellen Falle zur Grenzform das Hexaëder (s. Fig. 184).

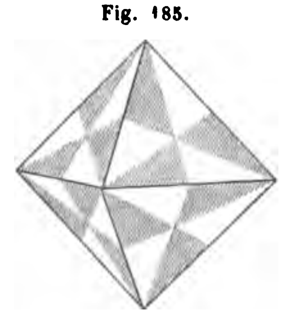
Fig. 183.

Fig. 184.



7) Dasjenige Pentagon-Ikositetraëder endlich, dessen $m = n = 1$, hat in jedem Octanten drei Flächen, welche in eine Ebene fallen, und diese ist die Octaëderfläche; das entgegengesetzte hat ebenfalls drei Flächen in jedem Octanten, die in die gleiche Ebene zusammenfallen. Das Octaëder, vollkommen dem holoëdrischen gleichend, ist die Grenzgestalt, sowohl der rechten, als der linken Pentagonikositetraëder, wenn deren m und n sich der 1 nähert.

Fig. 185.



Die hemiëdrische Krystallreihe, welche wir soeben kennen gelernt haben, ist bisher noch an keinem Körper nachgewiesen worden. In derselben gleichen, wie wir sahen, alle Formen den holoëdrischen, mit Ausnahme der 48-Flächner, welche nur mit der Hälfte ihrer Flächen auftreten. Wenn also, wie dies bei vielen der Fall ist, an den Krystallen eines Stoffes noch keine Hexakisoctaëder beobachtet worden sind, so könnte es zweifelhaft erscheinen, ob er der Holoëdrie oder dieser Hemiëdrie angehöre. Hier würde aber eine physikalische Eigenschaft die Unterscheidung ermöglichen. Man hat nämlich gefunden, dass alle Substanzen, welche in einer enantiomorphen Hemiëdrie oder Tetartoëdrie krystallisiren, die Polarisationsebene des Lichtes drehen, wenn sie überhaupt der Circularpolarisation fähig sind, d. h. wenn sie zu den isotropen oder den einaxigen gehören. Wenn man also an den Krystallen einer Substanz nur Octaëder, Würfel, Dodekaëder und verschiedene 24-Flächner in holoëdrischer Ausbildung kennen würde, hätte aber gefunden, dass dieselben circularpolarisirend seien, so müsste man nach Analogie mit den übrigen, die gleiche optische Eigenschaft zeigenden Körpern, jene Krystalle als plagiëdrisch hemiëdrisch betrachten, und

erwarten, dass die Hexakisoctaëder, wenn sie an denselben auftreten, als rechte oder linke Pentagon-Ikositetraëder erscheinen würden.

b) Die pentagonale Hemiëdrie.

§. 46. 1) Die Hälftflächner der Hexakisoctaëder nach diesem Gesetze bestehen je aus der halben Anzahl derjenigen Flächenpaare, welche an den mittleren Kanten liegen, s. Fig. 186. Die in dieser Figur weiss gelassenen Flächen für sich geben die Form Fig. 187 *a*, die schwarzen diejenige Fig. 187 *b*, zwei Formen, welche nicht zu den enantiomorphen gehören, da die eine durch eine Drehung um 90° (Drehungsaxe eine Hauptaxe) mit der anderen zur Deckung gebracht werden kann. Was die Symmetrie dieser Hemiëdrie betrifft, so sind zwar die Dodekaëderflächen nicht mehr Symmetrieebenen der hemiëdrischen Gestalten, wohl aber noch die Würfelflächen. Die beiden, aus einem 48-Flächner entstehenden Hälftgestalten heissen **Dyakisdodekaëder** (auch **Diploëder**) und werden bezeichnet

Fig. 186.

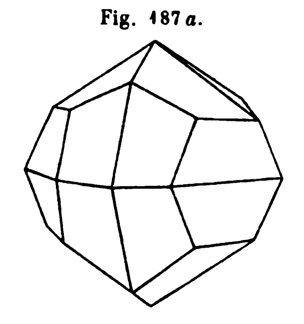


Fig. 187 *a*.

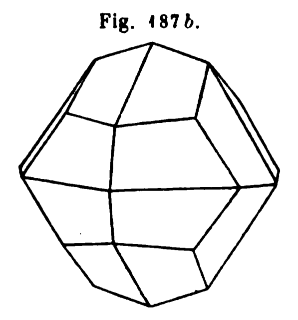


Fig. 187 *b*.

$$+\left[\frac{mOn}{2}\right] \text{ und } -\left[\frac{mOn}{2}\right],$$
$$\tfrac{1}{2}\,(a : ma : na),$$
$$\pi\ (hkl),$$

um anzudeuten, dass dieselben aus parallelen*) Flächenpaaren bestehen, weshalb die in Rede stehende Hemiëdrie zum Unterschied von der folgenden (der geneigtflächigen) auch die **parallelflächige** genannt wird. Welches von den beiden Dyakisdodekaëdern man als positives, welches als negatives bezeichnet, ist der freien Wahl überlassen; ist dieselbe aber für einen Krystall einmal getroffen, so ist damit das Vorzeichen aller übrigen hemiëdrischen Formen desselben bestimmt.

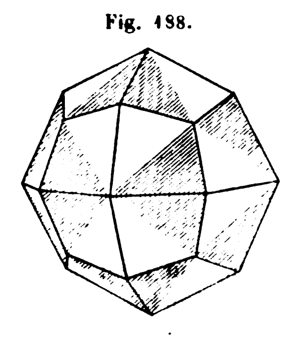
---

*) π als Abkürzung von παράλληλος.

Die Dyakisdodekaëder besitzen je 12 Kanten, welche mit den Kanten b des ursprünglichen 48-Flächners identisch sind, 12 schärfere, welche ebenfalls in den drei Haupt-Symmetrieebenen liegen, endlich 24, in welchen sich je zwei Flächen eines Octanten schneiden. Die Ecken sind daher 2+2kantige, 2+1+1kantige und dreikantige. Was die Combinationen verschiedener Dyakisdodekaëder mit einander betrifft, so sind diese sehr mannigfaltig je nach dem Parameterverhältniss und der Gleichheit oder Verschiedenheit ihres Vorzeichens. S. u. Beisp.

2) Bei den Ikositetraëdern fallen je zwei Flächen in eine Ebene (Fig. 188), von denen die eine dem +, die andere dem — Diploëder angehört; die beiden letzteren unterscheiden sich also weder von einander, noch von der holoëdrischen Form. Wenn demnach an einem hierher gehörigen Krystall die Flächen eines Ikositetraëders vorkommen, so tritt diese Form anscheinend holoëdrisch auf. Die Grenzform der Dyakisdodekaëder, welcher sich dieselben nähern, wenn die Zahlen m und n nur wenig verschieden sind, ist ein Ikositetraëder, welches sich geometrisch nicht unterscheiden lässt von dem holoëdrischen. Dieses ist jedoch aufzufassen als derjenige 48-Flächner, dessen $m = n$ ist; das der hemiëdrischen Krystallreihe angehörige Ikositetraëder als dasjenige Dyakisdodekaëder, dessen $m = n$ ist, in Folge dessen alle in den Haupt-Symmetrieebenen liegenden Kanten gleiche Winkel haben.

Fig. 188.



3) Bei den Pyramidenoctaëdern findet genau das Gleiche statt, sie müssen mit allen Flächen an einem hierher gehörigen hemiëdrischen Krystall auftreten, weil dasjenige positive Dyakisdodekaëder, dessen $n = 1$, voll-

Fig. 189.

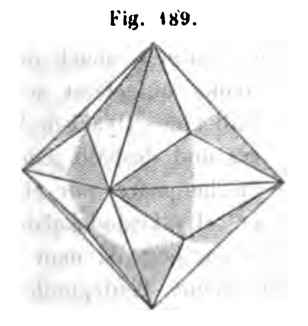
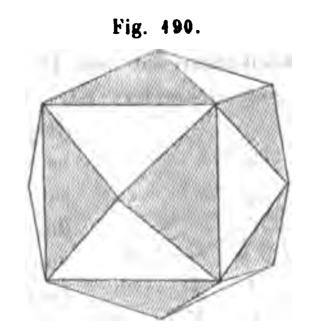


Fig. 190.



kommen zusammenfällt mit dem zugehörigen negativen (s. Fig. 189), die gemeinschaftliche Grenzform beider das scheinbar holoëdrische Triakisoctaëder ist.

4) Betrachten wir dagegen die Tetrakishexaëder, d. h. diejenigen 48-Flächner, deren $m = \infty$, so finden wir, dass hier durch die Hemiëdrie

eine Gestalt entsteht, welche nur die halbe Flächenzahl besitzt. Denn der Pyramidenwürfel ist ein Hexakisoctaëder, bei welchem je zwei, an einer in der Haupt-Symmetrieebene liegenden Kante zusammenstossende Flächen in eine Ebene fallen, da $m = \infty$ ist. Von diesen Flächenpaaren ist in dieser Hemiëdrie nur die Hälfte vorhanden, also auch nur die Hälfte der Flächen des Pyramidenwürfels, Fig. 190. Die weiss gelassenen Flächen für sich liefern die in Fig. 191 *a*, die schwarzen die in Fig. 191 *b* dargestellte Form, welche nach der Gestalt ihrer Flächen Pentagondodekaëder

Fig. 191 *a*.

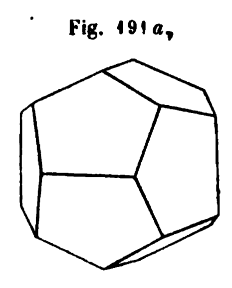
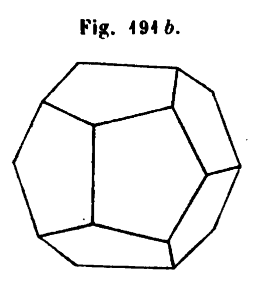


Fig. 191 *b*.

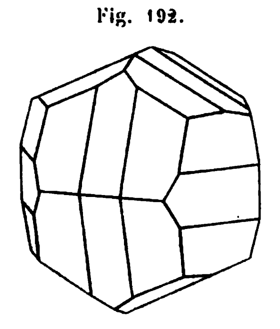


heissen, und nach denen die in Rede stehende Hemiëdrie benannt ist. Die Pentagondodekaëder besitzen sechs Kanten, welche je einer Hauptaxe parallel gehen und um so stumpfwinkeliger sind, je grösser der Coëfficient n ist, und 24 Kanten, von denen je drei in einem Octanten eine dreikantige Ecke bilden; die von Kanten der ersten und zweiten Art gebildeten Ecken sind 2+1kantige. Die beiden durch diese Hemiëdrie aus einem Tetrakishexaëder entstehenden Formen werden bezeichnet:

$$+\left[\frac{\infty O n}{2}\right] \text{ und } -\left[\frac{\infty O n}{2}\right].$$

Ebenso, wie ein Pyramidenwürfel das Grenzglied einer Reihe von 48-Flächnern bildet, so ist jedes Pentagondodekaëder die Grenzform derjenigen Ableitungsreihe von Dyakisdodekaëdern, deren n gleich demjenigen des Pentagondodekaëders ist. Dasselbe muss daher aufgefasst werden als derjenige specielle Fall eines Dyakisdodekaëders, in welchem $m = \infty$ und deshalb jedes der zusammengehörigen Flächenpaare nur eine Ebene darstellt. Der Name »Dyakisdodekaëder« rührt von derselben Auffassung her, da man sich diese Form als ein »gebrochenes Pentagondodekaëder« vorstellen kann.

Fig. 192.



Die Combination eines Dyakisdodekaëders mit demjenigen Pentagondodekaëder, dessen n denselben Werth 2 hat, ist in Fig. 192 dargestellt; das letztere muss, wenn beide gleiche Vorzeichen haben, die Kanten zwischen den zu-

sammengehörigen Flächen gerade abstumpfen. In der Combination mehrerer Pentagondodekaëder gleichen Vorzeichens schärft dasjenige mit grösserem n die »Hauptkanten« (die den Hauptaxen parallelen Kanten) des anderen zu. Die bei den Krystallen dieser Hemiëdrie sehr häufigen Combinationen der Pentagondodekaëder mit den einfachsten Formen des Systems sollen bei den Beispielen angeführt werden.

5) Das Rhombendodekaëder ist derjenige 48-Flächner, bei welchem je vier Flächen in eine Ebene fallen, von denen zwei, s. Fig. 193, dem positiven, die anderen beiden dem negativen Dyakisdodekaëder angehören: in diesem Falle können sich also die beiden Hälftformen weder von einander, noch von dem holoëdrischen Dodekaëder unterscheiden.

Fig. 193.

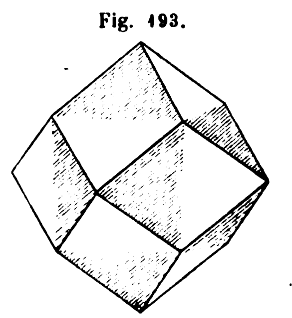
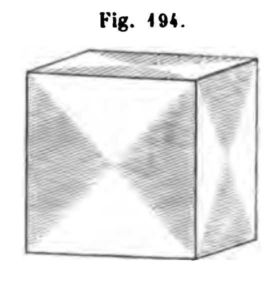


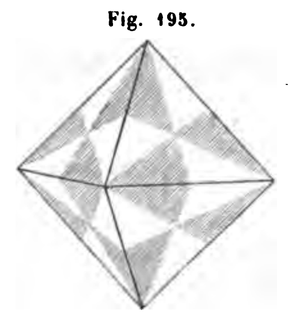
Fig. 194.



6) Das Hexaëder, als dasjenige Hexakisoctaëder, dessen $m = n = \infty$, hat acht in eine Ebene fallende Flächen, deren vier dem einen, vier dem anderen Dyakisdodekaëder angehören, Fig. 194. Die Grenzgestalt beider für jenen speciellen Werth der Coëfficienten ist also identisch der Würfel, welcher somit scheinbar holoëdrisch auftreten muss.

7) Das Gleiche ist beim Octaëder der Fall, denn dieses repräsentirt in jeder Fläche die Lage von sechs Hexakisoctaëderflächen für den Fall, dass $m = n = 1$; von diesen sechs gehören drei der einen, drei der anderen hemiëdrischen Form an, Fig. 195; diese beiden fallen also vollkommen zusammen und gleichen geometrisch dem holoëdrischen Octaëder.

Fig. 195.



Das Gesetz der pentagonalen Hemiëdrie bringt somit nur bei den 48-Flächnern und den Pyramidenwürfeln geometrisch abweichende Gestalten hervor, die Dyakisdodekaëder und die Pentagondodekaëder, welche nur nach den Hexaëder-, nicht nach den Dodekaëderflächen symmetrisch sind; die übrigen Formen bleiben unverändert. Wenn demnach an einem regulär krystallisirenden Körper nur der Würfel, das Octaëder, Dodekaëder, ferner Ikositetraëder und Pyramidenoctaëder gefunden werden, so bleibt es unentschieden, ob derselbe der holoëdrischen oder der pentagonal-hemiëdrischen Abtheilung des regulären Systems angehört. Treten aber die Flächen von Pyramidenwürfeln und 48-Flächnern auf, und zeigt sich ein constanter Unterschied der beiden Hälften dieser

Formen, so dass die eine entweder gar nicht, oder mit anderer Oberflächenbeschaffenheit oder dergl. erscheint, so krystallisirt die betreffende Substanz hemiëdrisch.

§. 47. **Beispiele:** Zinnjodid = $Sn\,J^4$. Aus Schwefelkohlenstoff in grossen Krystallen zu erhalten: O, $\left[\frac{\infty O 2}{2}\right]$, $\infty O \infty$, $2\,O\,2$.

α-Eisenbisulfid (nat. Eisenkies) = $Fe\,S^2$. Es finden sich sehr mannigfaltige Combinationen, von denen die häufigsten: $\infty O \infty$ — $\infty O \infty$, $\left[\frac{\infty O 2}{2}\right]$ Fig. 196; — $\infty O \infty$, O — $\left[\frac{\infty O 2}{2}\right]$ — O, $\left[\frac{\infty O 2}{2}\right]$ Fig. 197; — $\infty O \infty$, $\left[\frac{3 O \frac{3}{2}}{2}\right]$ Fig. 198; — $\left[\frac{\infty O 2}{2}\right]$, O, $\left[\frac{3 O \frac{3}{2}}{2}\right]$ Fig. 199, eine Combination, in welcher die letzte Form die Combinationskanten der beiden ersteren abstumpft. Nicht selten ist auch die in Fig. 192 abgebildete Combination: $\left[\frac{\infty O 2}{2}\right]$, $\left[\frac{4 O 2}{2}\right]$.

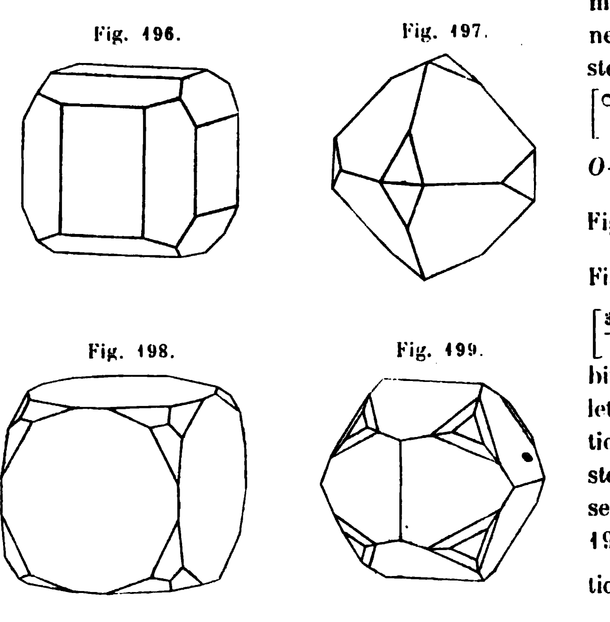


Fig. 196. Fig. 197. Fig. 198. Fig. 199.

α-Kobaltbiarsenid (nat. Speiskobalt) = $Co\,As^2$. Gewöhnliche Combination: $\infty O \infty$. O, weniger häufig. ∞O, $2\,O\,2$; äusserst selten $\left[\frac{\infty O 3}{2}\right]$, $\left[\frac{\infty O 5}{2}\right]$ u. a.

Nat. Glanzkobalt = $(Co, Fe)\,(As, S)^2$. Combinationen gewöhnlich: O, $\left[\frac{\infty O 2}{2}\right]$, $\infty O \infty$.

Die drei letztgenannten Mineralien, von denen namentlich das erste, der Eisenkies, ausserordentlich häufig krystallisirt vorkommt, haben den Umstand gemeinsam, dass an einem Krystall sich stets nur die hemiëdrischen Formen eines Vorzeichens finden, also niemals oder doch fast niemals positive Pentagondodekaëder mit negativen, oder mit negativen Dyakisdodekaëdern. Zugleich haben dieselben drei Körper eine physikalische Eigenschaft gemein: während nämlich ein Theil der Krystalle jedes dieser Mineralien thermoëlectrisch sich gegen Kupfer positiv verhält, sind die übrigen negativ gegen dieses Metall (vergl. S. 150). Rose hat (Ber. d. Berl. Akad. 1870) die Vermuthung aufgestellt, dass die positiven Krystalle die hemiëdrischen Formen der einen Stellung, die electrisch negativen die entgegen-

gesetzten zeigten, und hat auch mehrfache krystallographische Unterschiede zwischen beiden Klassen gefunden, welche für jene Hypothese sprechen.

Baryumnitrat $= Ba\,N^2\,O^6$. Aus wässeriger Lösung: O, $\infty O \infty$, $\left[\frac{\infty O 2}{2}\right]$.

Strontiumnitrat $= Sr\,N^2\,O^6$. dto.

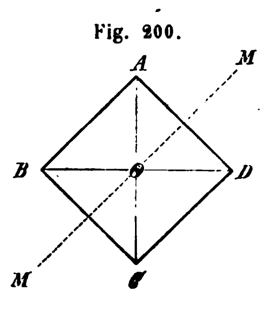
Bleinitrat $= Pb\,N^2\,O^6$. dto.

Diese drei Körper zeigen oft dieselben optischen Erscheinungen, welche an der folgenden Substanz sogleich näher erläutert werden sollen.

Kalialaun $= K^2\,SO^4 + Al^2\,S^3\,O^{12} + 24\,H^2\,O$. Aus wässeriger Lösung O, untergeordnet ∞O, $\infty O \infty$; aus alkalischer Lösung $\infty O \infty$; aus salzsaurer $\infty O \infty$, $\left[\frac{\infty O 2}{2}\right]$.

Die Krystalle des Alauns zeigen sehr oft eine Einwirkung auf das polarisirte Licht, welche man früher dadurch zu erklären suchte, dass sie aus getrennten dünnen Schichten zusammengesetzt seien, und somit, wie ein Satz dünner Glasplatten, das durchgehende Licht theilweise polarisiren (Lamellarpolarisation). Reusch (Poggendorff's Ann. d. Phys., 132. Bd. 618) zeigte zuerst, dass die beobachteten Erscheinungen sich so nicht erklären lassen, da dieselben u. A. gerade um so besser auftreten, je klarer die Krystalle im Innern sind. Schleift man aus einem solchen octaëdrischen Krystall eine Platte parallel einer Würfelfläche, $ABCD$ Fig. 200, wo AC, BD und die Normale zur Platte die Richtungen der drei Hauptaxen sind, und bringt diese im parallelen Licht zwischen gekreuzte Nicols, so dass AC der Schwingungsebene des einen, BD derjenigen des andern parallel ist, so erscheinen nur zwei Streifen, AC und BD, ein durch die Mitte gehendes Kreuz bildend, dunkel, und bleiben es auch bei der Drehung des Präparates, während die vier dreikantigen Felder AOB, AOD, BOC und COD aufgehellt erscheinen und meist das Hellblau der Interferenzfarben erster Ordnung zeigen. Presst man den Krystall $\parallel MM$, nachdem man $\parallel AD$ und BC Dodekaëderflächen angeschliffen hat, so hellen sich die Felder AOD und BOC noch mehr auf, während AOB und COD sich verdunkeln und bei einer bestimmten Pressung völlig einfach brechend erscheinen. Dies beweist, dass die Schichten des Krystalls in den vier Sectoren eine Spannung, parallel deren Hypothenuse, besitzen, welche veranlasst, dass in den Feldern AOD und BOC die optische Elasticität in der Richtung AD und BC kleiner ist, als senkrecht dazu; in den Sectoren AOB und COD in den Richtungen AB und CD kleiner, als in der normalen. Eine Pressung parallel MM muss nun die optische Elasticität in dieser Richtung vergrössern, also in den Feldern AOD und BOC die Differenz derselben vergrössern, daher die Aufhellung, in den Feldern AOB und COD dieselben indess verringern, daher

Fig. 200.



die Verdunkelung. Wie die Entstehung einer solchen Spannung zu denken ist, wurde bereits S. 117 auseinandergesetzt; bei den Alaunkrystallen muss demnach zuerst ein Krystallgerippe, drei sich durchschneidende dünne Schichten parallel den drei Haupt-Symmetrieebenen, und begrenzt von den Octaëderkanten, in nahezu ungestörter Lagerung der Theilchen sich gebildet haben; die hohlen Octaëderflächen sind dann durch allmählichen Absatz von Schichten, parallel den Octaëderflächen, ausgefüllt worden, wobei diese Schichten durch eine beim Festwerden vor sich gehende Contraction eine Spannung parallel ihrer Flächenausdehnung erfuhren.

Die folgenden analog zusammengesetzten Verbindungen gehören ebenfalls in diese Abtheilung des regulären Systems, zeigen aber nur O und $\infty O \infty$:

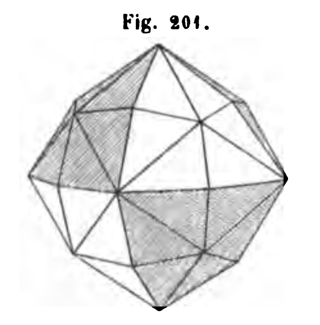
$$Na^2 SO^4 + Al^2 S^3 O^{12} + 24\, H^2 O$$
$$Li^2 SO^4 + Al^2 S^3 O^{12} + 24\, H^2 O$$
$$(NH^4)^2 SO^4 + Al^2 S^3 O^{12} + 24\, H^2 O$$
$$Rb^2 SO^4 + Al^2 S^3 O^{12} + 24\, H^2 O$$
$$Co^2 SO^4 + Al^2 S^3 O^{12} + 24\, H^2 O$$
$$Tl^2 SO^4 + Al^2 S^3 O^{12} + 24\, H^2 O$$
$$K^2 SO^4 + Fe^2 S^3 O^{12} + 24\, H^2 O$$
$$K^2 SO^4 + Cr^2 S^3 O^{12} + 24\, H^2 O$$
$$K^2 SO^4 + Mn^2 S^3 O^{12} + 24\, H^2 O$$

und die entsprechenden selensauren Salze.

c) Die tetraëdrische Hemiëdrie.

§. 48. Die Hälftgestalten der 48-Flächner nach dem Gesetz der tetraëdrischen Hemiëdrie entstehen dadurch, dass in den abwechselnden Octanten (Fig. 201) sämmtliche Flächen ausfallen. Da somit zu jeder Fläche die parallele dem entgegengesetzten Hemiëder angehört, so sind die hierdurch entstehenden Formen nicht parallelflächig, sondern geneigtflächig, weshalb man auch oft diese Hemiëdrie die geneigtflächige nennt. Die in Fig. 201 weiss gelassenen Flächen bilden die Form Fig. 202*a*, die schwarzen Fig. 202*b*. Jede derselben besteht aus vier Gruppen von je sechs Flächen, welche ebenso auch dem holoëdrischen Körper angehören, sich also auch in denselben Kanten schneiden; diese letzteren sind in den Figuren etwas schwächer gezeichnet, als die den Hemiëdern eigenthümlichen schärferen, welche dadurch entstehen, dass die Flächen verschiedener Octanten, zwischen denen solche ausgefallen sind, zum Durchschnitt gelangen. Dadurch tritt das tetraëderähnliche Aussehen mehr hervor, welchem diese Formen ihren Namen »Hexakistetraëder« verdanken. Man bezeichnet dieselben mit

Fig. 201.



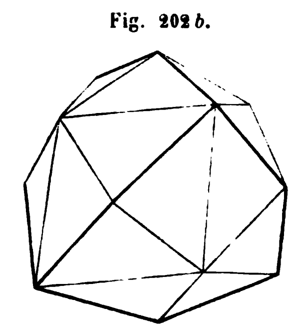
$$+\frac{mOn}{2} \text{ und } -\frac{mOn}{2}$$

oder $\pm \frac{1}{2}(a : ma : na)$

oder $\varkappa\,(hkl)$ *).

Natürlich ist es auch hier gleichgültig, welche der beiden Hälften man mit +, welche mit — bezeichnet; nach getroffener Wahl muss man indess

Fig. 202 a. Fig. 202 b.



auch alle anderen, deren Flächen in denselben Octanten liegen, wie die des positiven, mit + bezeichnen. Da zu einer jeden Fläche eines Hexakistetraëders diejenige, welche zu ihr symmetrisch ist in Bezug auf die Würfelfläche, dem entgegengesetzten Hexakistetraëder angehört, so sind diese Formen nicht symmetrisch nach den Hexaëderflächen; sie sind es jedoch in Bezug auf die Flächen des Dodekaëders, da diese jeden Octanten symmetrisch halbiren und vier der letzteren vollzählig vorhanden sind.

Fig. 203.

2) Bei den Ikositetraëdern, Fig. 203, gehört ebenfalls keine Fläche gleichzeitig zwei benachbarten Octanten an, folglich ist sie entweder nur eine solche des einen oder nur des anderen Hemiëders, jedes dieser letzteren besitzt demnach nur halb so viele Flächen, als die holoëdrische Gestalt. Die in Fig. 203 weiss gelassenen Flächen bilden die hemiëdrische Form Fig 204 a, die schwarzen Fig. 204 b, welche Triakistetraëder oder Pyramidentetraëder genannt werden. Ihre Bezeichnung ist

$$+\frac{mOm}{2} \text{ und } -\frac{mOm}{2}$$

$$\pm \frac{1}{2}(a : ma : ma)$$

$$\varkappa\,(hhl).$$

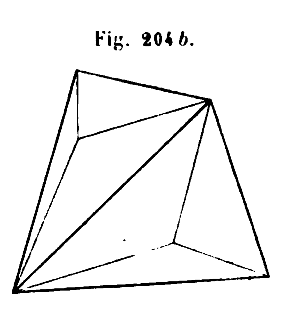
Je drei benachbarter Flächen eines solchen sind identisch in ihrer Lage mit je drei des zugehörigen Ikositetraëders, bilden also dieselben dreikantigen

*) $\varkappa$ als Abkürzung von κλῖνος.

Ecken, deren Kanten in beiden Figuren schwächer gezeichnet sind. Ebenso, wie in der holoëdrischen Form, sind diese Kanten um so stumpfwinkeliger, je weniger der Zahlenwerth m von 1 verschieden ist. Derartige Gruppen von je drei Flächen hat jedes Pyramidentetraëder vier, also 12 Kanten, welche denselben Winkel haben, wie die betreffenden Ikositetraëderkanten.

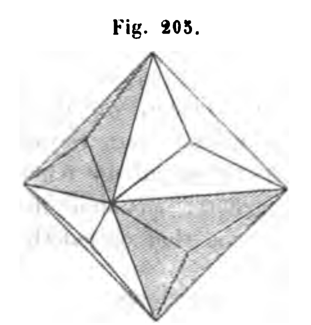
Fig. 204 *a*.

Fig. 204 *b*.



Je zwei Flächen verschiedener Octanten schneiden sich in Kanten, welche um so schärfer sind, je kleiner m ist, und die je einer Diagonale einer Würfelfläche parallel laufen. Je drei solcher Kanten, deren im Ganzen sechs vorhanden sind, bilden mit drei der ersteren Art vier 3+3kantige Ecken.

Fig. 205.



3) Die Pyramidenoctaëder, demselben Gesetz der Hemiëdrie unterworfen, Fig. 205, liefern zwei sogenannte Deltoiddodekaëder Fig. 206 *a* und *b*, welche, wie die beiden Pyramidentetraëder, einander vollkommen congruent sind, wenn man das eine um eine Hauptaxe um 90° dreht. Ihre Bezeichnungen sind:

$$+\frac{mO}{2} \text{ und } -\frac{mO}{2},$$

$$\pm\tfrac{1}{2}(a : a : ma),$$

$$\varkappa\,(hkk).$$

Fig. 206 *a*.

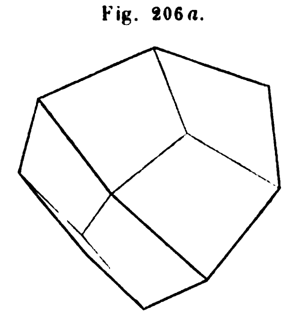
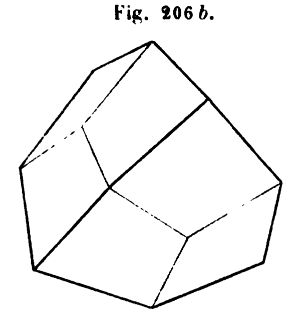


Fig. 206 *b*.



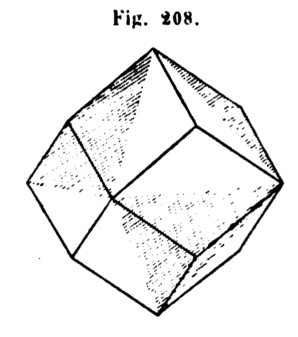
Auch hier liegen wieder in jedem Octanten drei Flächen, welche in derselben Lage auch dem holoëdrischen Pyramidenoctaëder angehören, folglich

haben die dreikantigen Ecken, deren jedes Deltoiddodekaëder vier hat, dieselben Kantenwinkel, wie die dreikantigen Ecken des Triakisoctaëders. Bei gleicher Ausdehnung der Flächen dieser Hemiëder haben die ersteren die Gestalt von »Deltoiden«, d. h. Vierecken mit dreierlei Winkeln, indem nur zwei gegenüberliegende gleich sind. Die (in den Figg. 206 stärker gezeichneten) 12 Kanten, welche dadurch entstehen, dass Flächen verschiedener Octanten zum Durchschnitt gelangen, bilden vier dreikantige Ecken und mit denen der ersten Art sechs 2+2kantige.

4) Gehen wir nun zur Anwendung dieser Hemiëdrie auf diejenigen 48-Flächner über, deren je zwei in benachbarten Octanten gelegene Flächen in eine Ebene fallen, d. h. die Pyramidenwürfel, so muss aus diesem Grunde die eine hemiëdrische Form derselben vollkommen mit der anderen zusammenfallen. Dasjenige positive Hexakistetraëder, dessen $m = \infty$, hat die Gestalt des Tetrakishexaëders, das entsprechende negative hat dieselbe Form, Fig. 207. Durch die tetraëdrische Hemiëdrie werden also die Pyramidenwürfel scheinbar nicht verändert.

Fig. 207.

Fig. 208.



5) Dasselbe findet statt bei dem Dodekaëder, Fig. 208, da seine Flächen ebenfalls zwei benachbarten Octanten angehören, und deshalb die beiden hemiëdrischen Formen zusammenfallen.

6) Dasjenige Hexakistetraëder, dessen m und $n = \infty$ sind, hat sechs den drei Haupt-Symmetrieebenen parallele Flächen, unterscheidet sich also nicht vom holoëdrischen Würfel, noch von der entgegengesetzten Hälftgestalt; Fig. 209.

Fig. 209.

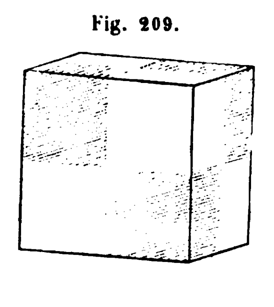
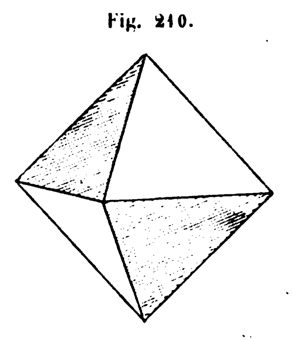
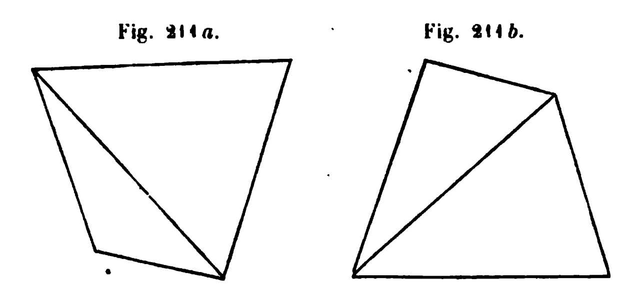


Fig. 210.



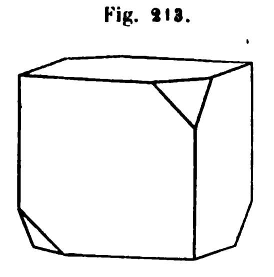
7) Das Octaëder

Fig. 210, derselben Hemiëdrie unterworfen, liefert die beiden Tetraëder, Fig. 211 *a* den weissen Flächen, Fig. 211 *b* den schwarzen Flächen der vorigen Figur entsprechend. Die beiden entgegengesetzten Formen

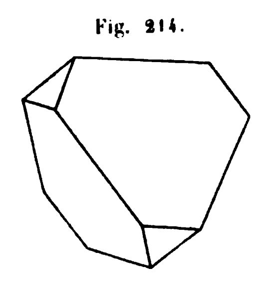

Fig. 211 *a*. Fig. 211 *b*.

$$+\frac{O}{2} \text{ und } -\frac{O}{2}$$
$$\pm \tfrac{1}{2}(a : a : a)$$
$$\varkappa\,(111)$$

sind vollkommen congruent, da sie, wie alle Formen dieser (nach ihnen genannten) Hemiëdrie durch eine Drehung von 90° um eine Hauptaxe zur Deckung gebracht werden können. Jedes der beiden Tetraëder besteht nur aus vier Flächen, welche sich in sechs, den Diagonalen der Hexaëderflächen parallelen Kanten schneiden, deren Winkel gleich dem Supplement des Octaëderwinkels, d. i. 70° 32′ beträgt. Die gerade Abstumpfung dieser sechs Kanten liefert demnach den Würfel, Fig. 212. Die Combination beider Formen mit vorherrschendem Hexaëder stellt Fig. 213 dar, aus welcher zugleich der krystallographische Unterschied des hemiëdrischen Würfels vom holoëdrischen erhellt: an


Fig. 212. Fig. 213.

dem letzteren sind die acht Ecken vollkommen gleichwerthig, da sie je einem der gleichwerthigen acht Octanten angehören, an dem hemiëdrischen Würfel sind vier Ecken ungleichwerthig den vier anderen, die Abstumpfung der einen ist unabhängig von derjenigen der anderen. Da das Octaëder zu den häufigsten, weil einfachsten, Formen gehört, so gilt das Gleiche auch für die beiden Tetraëder, und es ist deshalb natürlich, dass nicht selten auch beide an demselben Krystall zusammen auftreten, wobei sie sich aber durch ihre Grössenausdehnung, ihre Oberflächenbeschaffenheit u. dergl. unterscheiden. Die Combination $+\frac{O}{2}, -\frac{O}{2}$, das eine die Ecken des anderen abstumpfend, s. Fig. 214. Weitere Combinationen folgen bei den Beispielen.


Fig. 214.

§. 49. **Beispiele***: Diamant = C. Die Krystallformen erscheinen sehr oft holoëdrisch, besonders O und $3O\frac{3}{2}$ dadurch, dass beide Hälftgestalten gleichartig ausgebildet erscheinen, oder durch eine eigenthümliche, später (s. Zwillinge) zu besprechende Art regelmässiger Durchwachsung; doch kommen auch $\frac{O}{2}$ und $\frac{3O\frac{3}{2}}{2}$ einzeln vor, ausserdem ∞O, $\infty O \infty$ u. a. Spaltbarkeit nach dem Octaëder. Brechungsexponent n = 2,413 roth, 2,419 gelb, 2,428 grün (Des Cloizeaux). Sehr häufig zeigen die Krystalle Doppelbrechungserscheinungen, wie der Alaun (s. d. S. 229), nur weniger regelmässig. Ausdehnung durch die Wärme sehr gering: 0,00000354 (kubisch).

Zinksulfid (nat. Zinkblende) = $Zn\,S$. Vorherrschend: ∞O (d), $+\frac{O}{2}$ (t, glänzend), $-\frac{O}{2}$ ($-t$, meist weit matter); untergeordnet: $+\frac{3O3}{2}$ (y), $-\frac{2O2}{2}$ ($-i$), $\infty O \infty$ (h). Alle diese Formen sind in der Combination Fig. 215 dargestellt. Spaltbar vollkommen nach ∞O. Diatherman.

---

*) Bei mehreren der folgenden hemiëdrischen Körper sind die Formen nach ihrer Oberflächenbeschaffenheit in positive und negative unterschieden, in der Art, dass z. B. bei Zinkblende stets das glänzende Tetraëder das positive, das matte das negative genannt wird, und alsdann diejenigen anderen Formen (Triakistetraëder etc.), welche in denselben Octanten, wie das glänzende Tetraëder, liegen, als positive, die in denselben mit dem matten Tetraëder liegenden als negative bezeichnet sind. Es ist aber wohl zu beachten, dass durch Nichts bewiesen ist, dass dasjenige Tetraëder, welches an einem Krystall glänzend auftritt, dasselbe ist, welches an einem anderen Krystall als das glänzendere erscheint, denn die beiden von einander unabhängigen Gestalten $+\frac{O}{2}$ und $-\frac{O}{2}$ verhalten sich zu einander, wie zwei verschiedene Formen, — und wir finden z. B. an demselben Fundort Flussspathkrystalle, an denen alle Octaëderflächen matt, alle Hexaëderflächen glänzend sind, neben solchen, an denen genau das Entgegengesetzte stattfindet. Unter Annahme jener, oben als nicht bewiesen bezeichneten Hypothese hat man gefunden, dass die eine abgeleitete Form nur als positive, die andere nur als negative Hälfte vorkommt, und hat die in Rede stehende Hypothese dadurch gestützt geglaubt, dass zwar die beiden Tetraëder zuweilen zusammen auftreten, von den selteneren hemiëdrischen Formen aber niemals die beiden entgegengesetzten Hälften beobachtet wurden. Das letztere erscheint aber ganz natürlich, nach der S. 186 gemachten Bemerkung, nach welcher die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens derselben an einem Krystall ausserordentlich klein ist. Eine wirkliche Unterscheidung positiver und negativer Formen kann also die Art des Auftretens derselben, ihre Oberflächenbeschaffenheit und dergl. niemals liefern, sondern nur physikalische Eigenschaften, welche unabhängig sind von den zufälligen Umständen bei der Bildung der Krystalle. Eine solche Eigenschaft ist z. B. die Spaltbarkeit; diese kann jedoch bei der tetraëdrischen, wie überhaupt bei einer geneigtflächigen Hemiëdrie nicht zu jener Unterscheidung benutzt werden, da bei einer solchen die Flächen der positiven Hälfte denen der negativen parallel sind. Dagegen könnte wohl ein Unterschied gefunden werden zwischen dem Widerstand, welchen ein galvanischer Strom erleidet, wenn er von dem positiven nach dem negativen Tetraëder hin den Krystall durchläuft, und dem Widerstand, den ein in umgekehrter Richtung sich bewegender Strom erfährt.

$n = 2{,}341$ roth,
$2{,}369$ gelb.

Nat. Fahlerz $= 8\,Cu^2S + 4\,(Fe, Zn)\,S + 3\,(Sb, As)^2\,S^3$. Besonders

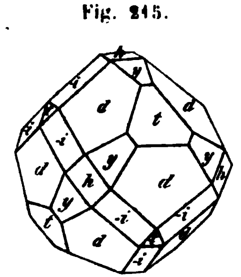


Fig. 215.

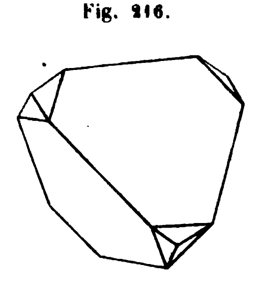


Fig. 216.

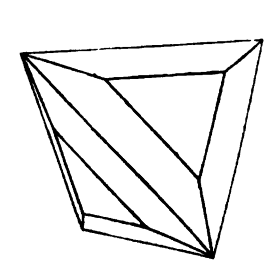


Fig. 217.

häufige Combinationen: $+\frac{O}{2}$, ∞O Fig. 216; $+\frac{O}{2}$, $+\frac{2O2}{2}$ Fig. 217; nicht selten auch die in Fig. 218 dargestellte complicirtere Combination:

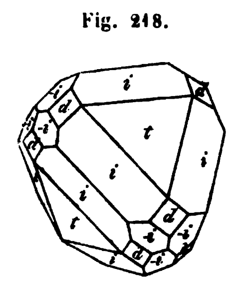


Fig. 218.

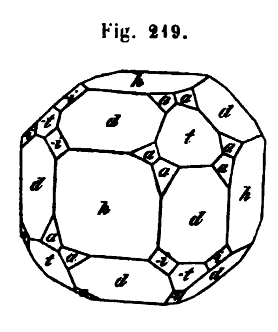


Fig. 219.

$+\frac{O}{2}$ (t), $+\frac{2O2}{2}$ (i), $\infty O\,(d)$, $-\frac{2O2}{2}$ $(-i)$.

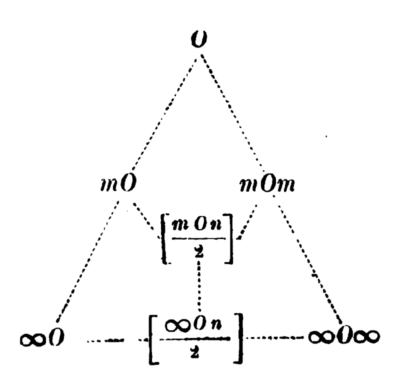
Natürl. Borazit $= 2\,Mg^3B^8O^{15} + MgCl^2$ Gewöhnliche Formen: $\infty O \infty$ (h), ∞O (d), $+\frac{O}{2}$ (t) glänzend, $-\frac{O}{2}$ $(-t)$ klein und matt, $-\frac{2O2}{2}$ $(-i)$ als sehr schmale Abstumpfungen; Fig. 219 zeigt alle diese Formen und ausserdem noch das nicht häufige Hexakistetraëder $+\frac{5O\frac{5}{3}}{2}$ (a).

§. 50. **Die Ableitungsreihen der hemiëdrischen Formen.** Aus der Anschauung, dass alle Formen des regulären Systems specielle Fälle der Hexakisoctaëder sind, ergab sich, dass die hemiëdrischen Gestalten vieler derselben nicht von den holoëdrischen verschieden sein können; so in der trapezoëdrischen Hemiëdrie alle Formen ausser den 48-Flächnern; in der pentagonalen die Pyramidenoctaëder und Ikositetraëder, Dodekaëder, Würfel und Octaëder; in der tetraëdrischen endlich die Pyramidenwürfel, Dodekaëder und Hexaëder. Wo solche Formen auftreten, kann demnach die Hemiëdrie erst durch die Combination mit anderen erkannt werden. Ein Hülfsmittel, durch welches Hemiëdrie, aber stets nur parallelflächige, erkannt werden kann, ist hier ausgeschlossen, da die regulären Krystalle nur

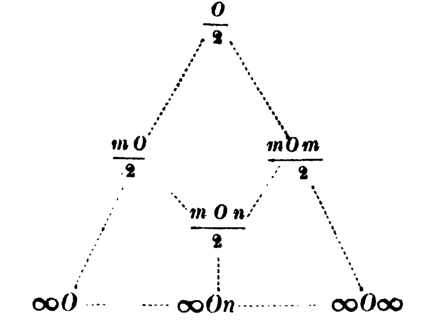
nach den einfachsten Formen: Octaëder, Würfel oder Dodekaëder, Spaltbarkeit besitzen.

Jene scheinbar holoëdrischen Formen der einzelnen Hemiëdrien ergeben sich nun aber als wirkliche hemiëdrische Formen auch noch dadurch, dass sie die Grenzgestalten hemiëdrischer Ableitungsreihen bilden. Diese Reihen können genau in gleicher Weise durch ein Schema graphisch veranschaulicht werden, wie dies §. 42 mit den holoëdrischen Reihen geschehen ist.

Uebergehen wir die nicht realisirte erste Hemiëdrie, so bildet bei der pentagonalen das Dyakisdodekaëder $\left[\frac{mOn}{2}\right]$ den allgemeinsten Fall, jedes derselben liegt in drei verschiedenen Ableitungsreihen, deren Endglieder die Ikositetraëder, die Pyramidenoctaëder und die Pentagondodekaëder sind; denn ein Dyakisdodekaëder nähert sich in seiner Gestalt um so mehr einem Ikositetraëder, je weniger n von m verschieden, für $m = n$ fällt es damit zusammen; es gleicht dagegen immer mehr einem Pyramidenoctaëder, je weniger n von 1 verschieden ist; das Pyramidenoctaëder mit demselben m ist das Grenzglied der Reihe, d. h. dasjenige Dyakisdodekaëder, dessen $n = 1$; je grösser m, desto ähnlicher ist das Dyakisdodekaëder einem Pentagondodekaëder, für $m = \infty$ fallen je zwei Flächen in eine Ebene, es resultirt die erwähnte Grenzform. Das nebenstehende Schema, welches einen Ueberblick der Ableitungsreihen dieser Hemiëdrie giebt, stimmt in den übrigen Formen natürlich mit demjenigen der Holoëdrie überein.



In der tetraëdrischen Hemiëdrie ist das Hexakistetraëder die allgemeinste Form, diese geht durch Grösserwerden von m bis ∞ über in einen Pyramidenwürfel als Grenzform, durch Kleinerwerden von n in ein Deltoiddodekaëder, d. i. dasjenige Hexakistetraëder, dessen $n = 1$, endlich durch Gleichwerden von m und n in ein Pyramidentetraëder; jede dieser drei Arten von Grenzformen der Hexakistetraëder bilden wieder eine Ableitungsreihe, deren letzte Grenzglieder das Tetraëder, das Dodekaëder und der Würfel sind. So gestaltet sich hier das Schema folgendermassen:



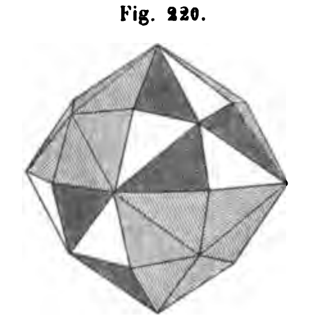
Alles, was bei Besprechung des Ableitungsschemas für die holoëdrischen Gestalten in Bezug auf Zonenverhältnisse gesagt wurde, gilt natürlich auch hier.

Durch die Hemiëdrie geht stets der Grad der Symmetrie ganz oder theilweise verloren; ist das erste der Fall, haben die entstehenden Hälftgestalten gar keine Symmetrieebene, so resultiren enantiomorphe Formen, wie die der plagiëdrischen Hemiëdrie; in der sogenannten pentagonalen sind nur die Würfel-, nicht die Dodekaëderflächen, in der tetraëdrischen umgekehrt die letzteren und nicht die ersteren Symmetrieebenen. Dieser geringere Grad der Symmetrie gilt auch für die scheinbar holoëdrischen Gestalten; z. B. ist der tetraëdrisch hemiëdrische Würfel, obgleich geometrisch dem holoëdrischen gleich, nicht symmetrisch zu seinen eigenen Flächen, denn alsdann müssten zwei benachbarte Ecken desselben gleichwerthig sein; dies sind sie aber nicht, wie die Unabhängigkeit des Auftretens der Abstumpfung an der einen und der anderen (positives und negatives Tetraëder) beweist. So treten also, wie es früher als allgemeines Gesetz der Combinationslehre angeführt wurde, in jeder dieser Reihen nur Formen mit gleichem Grade der Symmetrie mit einander in Combination.

Die Tetartoëdrie des regulären Systems.

§. 51. 1) Es wurde bereits in §. 38 erwähnt, dass durch Anwendung zweier verschiedener Hemiëdrien bei einer Form, welche der Hemiëdrie nach mehreren Gesetzen fähig ist, tetartoëdrische Formen entstehen, welche alsdann ebenso wie die hemiëdrischen die Bedingung erfüllen müssen, dass jede Seite einer Symmetrieaxe, sowie die mehrerer gleichwerthiger, von gleich vielen Flächen in gleichem Abstande geschnitten werden. Die Zahl dieser Flächen ist aber natürlich nur ein Viertel von derjenigen, welche beim holoëdrischen Körper dieselbe Axe in demselben Abstande schneidet. Um die möglichen Arten der Tetartoëdrie im regulären System kennen zu lernen, haben wir dieselben nur an dem allgemeinen Repräsentanten aller Formen, dem Hexakisoctaëder, festzustellen, da sie alsdann für die übrigen Formen sich von selbst ergeben.

Fig. 220.



Denken wir uns zunächst einen 48-Flächner hemiëdrisch werdend nach dem ersten, dem Gesetz der plagiëdrischen Hemiëdrie, so fallen die in Fig. 220 (genau entsprechend der Fig. 173) von links unten nach rechts oben schraffirten Flächen aus; unterwerfen wir die Form gleichzeitig auch noch der pentagonalen Hemiëdrie, so müssen, analog der Fig. 175, auch noch die von links oben nach rechts unten schraffirten Flächen fortfallen, d. h. die Hälfte von den vorher übriggebliebenen. Es resultirt also eine tetartoëdrische Form, aus den 12 weissbleibenden Flächen bestehend, welche

der allgemeinen Bedingung der Hemiëdrie genügt; denn jede der sechs gleichwerthigen Hälften der Hauptaxen wird von zwei Flächen im Abstand 1, von zwei im Abstand n und von ebenso viel in m geschnitten, und ein jedes dieser Flächenpaare schliesst in allen sechs Fällen denselben Winkel ein. Wenn wir dagegen auf den der trapezoëdrischen Hemiëdrie, wie vorher, unterworfenen 48-Flächner, Fig. 221, statt der pentagonalen, noch die tetraëdrische Hemiëdrie anwenden, bei welcher die Flächen in den abwechselnden Octanten, von links oben nach rechts unten schraffirt, aus-

Fig. 221.

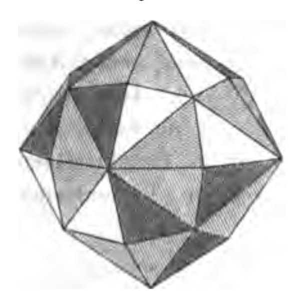
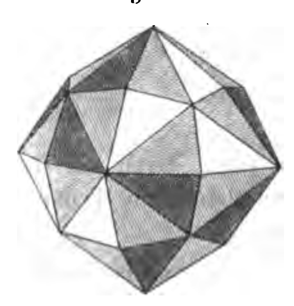
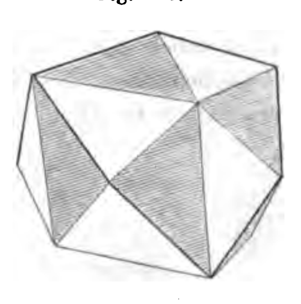


Fig. 222.



fallen, wie in Fig. 177, so bleiben wiederum nur 12 Flächen übrig. Endlich ist nur noch ein Fall übrig, die gleichzeitige Anwendung der pentagonalen und der tetraëdrischen Hemiëdrie; in Fig. 222 sind die durch die erstere fortfallenden Flächen von links unten nach rechts oben, die durch die zweite verschwindenden von rechts unten nach links oben schraffirt. Vergleicht man diese drei Figuren mit einander, so sieht man, dass die 12 übrig bleibenden Flächen in allen drei Fällen dieselben sind; die Form, welche aus einem Hexakisoctaëder durch zweimalige Hemiëdrie entsteht, ist also dieselbe, welche Arten von Hemiëdrie man auch zu ihrer Herleitung anwende. Es giebt somit im regulären Systeme nur eine Art von Tetartoëdrie.

Fig. 223.



Ein Tetartoëder eines 48-Flächners erhalten wir nach Obigem z. B., wenn wir von einem Hexakistetraëder, welches von jenem abgeleitet ist, die abwechselnden Flächen ausfallend und die übrigen allein vorhanden denken, Fig. 223. Die weiss gelassenen Flächen dieser Figur für sich liefern uns das sogenannte tetraëdrische Pentagondodekaëder, Fig. 224 *a*, die schraffirten Flächen für sich das entgegengesetzte Fig. 224 *b*. Diese beiden Formen können durch keine Drehung zur Deckung gebracht werden, sie sind enantiomorph. Wir bezeichnen das erstere als das »rechte«, das zweite als das »linke« tetraëdrische Pentagondodekaëder. Ihre Combination

würde das Hexakistetraëder liefern, welches selbst aber wieder nur die Hälfte der Flächen des 48-Flächners darstellt; die andere Hälfte, das entgegengesetzte (negative) Hexakistetraëder hat genau dieselbe Gestalt, liefert also durch abermalige Hemiëdrie ebenfalls ein rechtes und ein linkes, enantiomorphes, tetraëdrisches Pentagondodekaëder, deren ersteres mit dem obigen rechten durch Drehung von 90° um eine Hauptaxe zur Congruenz gebracht werden kann, während das linke vom linken positiven sich ebenfalls nur durch seine Stellung unterscheidet. Die vier, durch die Tetartoëdrie aus einem Hexakisoctaëder abgeleiteten tetraëdrischen Pentagondodekaëder werden folgendermassen bezeichnet:

Fig. 224 *a*.

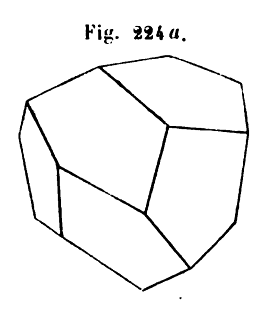
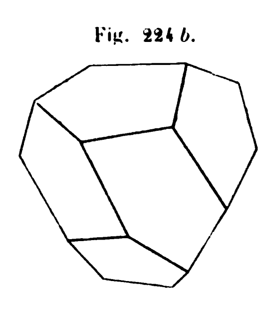


Fig. 224 *b*.



das rechte positive: $+ \frac{m O n}{4} r$,

das linke positive: $+ \frac{m O n}{4} l$,

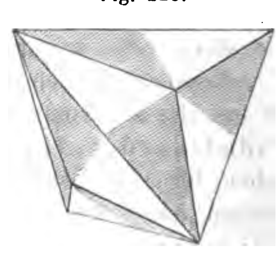
das rechte negative: $- \frac{m O n}{4} r$,

das linke negative: $- \frac{m O n}{4} l$.

Die Flächen dieser Formen sind bei gleicher Centraldistanz unsymmetrische Fünfecke; je drei in einen Octanten gehörige bilden eine dreikantige Ecke, welche identisch ist mit derjenigen der Dyakisdodekaëder, und zwar die eines rechten Tetartoëders mit der dreikantigen Ecke des positiven Dyakisdodekaëders Fig. 187 *a*, die jedes linken mit der entsprechenden des negativen Fig. 187 *b*. Solcher dreikantigen Ecken hat jedes tetraëdrische Pentagondodekaëder vier, alle übrigen Ecken sind 1 + 1 + 1kantige. Im Ganzen haben diese Gestalten 30 Kanten von viererlei Art. Es ist selbstverständlich, dass dieselben, wie alle enantiomorphen Formen, keine Symmetrieebenen besitzen.

Fig. 225.

Fig. 226.

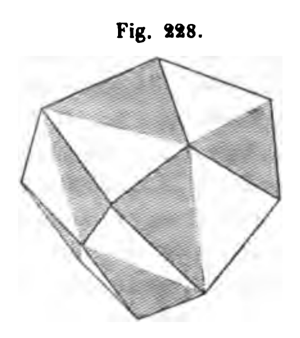


2) Dieselbe Tetartoëdrie, auf diejenigen Hexakisoctaëder (Fig. 225) angewandt, deren $m = n$ ist, d. h. auf die Ikositetraëder, liefert von jedem der beiden Pyramidentetraëder (Fig. 226), welche durch einmalige Hemiëdrie entstehen, eine rechte und eine linke Hälftgestalt, welche sich nicht von einander unterscheiden. Je näher die Zahlenwerthe von m und n einander sind, desto ähnlicher erscheinen die beiden entgegengesetzten tetraëdrischen Pentagondodekaëder einander und dem Pyramidentetraëder; für den speciellen Fall $m = n$ fallen sie zusammen, und es resultirt als gemeinschaftliche Grenzform beider das Triakistetraëder, welches sich nicht von dem hemiëdrischen unterscheidet.

3) Ganz analog liefert diese Tetartoëdrie bei den Triakisoctaëdern, Fig. 227, Formen, welche geometrisch identisch sind mit den hemiëdrischen Deltoiddodekaëdern, Fig. 228, welche aber aufzufassen sind als die gemein-

Fig. 227.

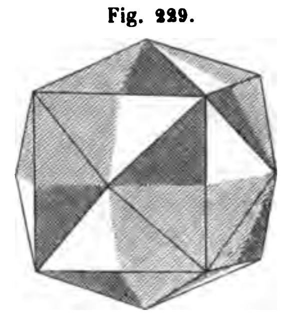
Fig. 228.



schaftlichen Grenzformen je eines rechten und linken tetraëdrischen Pentagondodekaëders, für den Fall $n = 1$, da in diesem jene beiden Formen vollkommen in eine, nämlich das Deltoiddodekaëder, zusammenfallen.

4) Wenden wir das Gesetz der Tetartoëdrie auf die Tetrakishexaëder an, wie es in Fig. 229 geschehen ist, so resultiren 12 Flächen, welche eine Gestalt bilden, die sich geometrisch nicht von dem Pentagondodekaëder der Hemiëdrie unterscheidet. In der That liefert, wie aus Fig. 230 ersichtlich, die tetraëdrische Hemiëdrie keine neue Form aus dem Pentagondodekaëder, da dessen Flächen ja in zwei benachbarten Octanten liegen. In Fig. 229 stellen die weissen Flächen das rechte positive tetraëdrische Pentagondodekaëder für den Grenzfall $m = \infty$ dar; dieselben liefern für sich das Pentagondodekaëder Fig. 230, welches wir in der Hemiëdrie als positives bezeichnet haben und jetzt das »rechte« nennen wollen. Die in Fig. 229 doppelt schraffirten 12 Flächen bilden das linke positive tetraëdrische Pentagondodekaëder für denselben Grenzfall;

Fig. 229.



diese Flächen für sich allein umschliessen das in Fig. 231 dargestellte Pentagondodekaëder, welches zusammenfällt mit dem in der Hemiëdrie das »negative« genannten, in der Tetartoëdrie als »linkes« zu bezeichnenden.

Fig. 230.

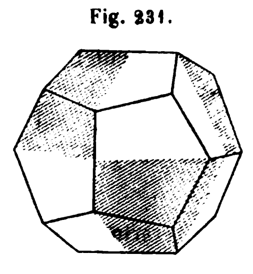
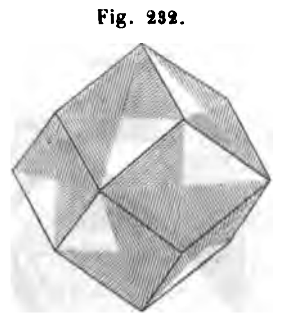


Fig. 231.

Unterscheiden wir die beiden enantiomorphen Tetartoëder der negativen vier Octanten ebenso, indem wir dasjenige das »rechte« nennen, zu dem die oben rechts an der verticalen Hauptaxe gelegene Fläche gehört, wenn man auf den Octanten hin sieht, und welches congruent ist mit dem rechten positiven, und indem wir das andere das »linke« nennen, so ist leicht einzusehen, dass das erstere in dem Grenzfall $m = \infty$ zusammenfällt mit dem »linken« Pentagondodekaëder, Fig. 231, dagegen das linke tetraëdrische Pentagondodekaëder für denselben Werth von m als Grenzgestalt das »rechte« Pentagondodekaëder liefert. Während also die beiden enantiomorphen Tetartoëder desselben Vorzeichens für die speciellen Werthe $m = n$ und $n = 1$ in eine gemeinschaftliche Grenzform zusammenfallen, fallen für den Werth $m = \infty$ das rechte positive und das linke negative tetraëdrische Pentagondodekaëder zu einem einzigen symmetrischen Pentagondodekaëder zusammen, während dasjenige der entgegengesetzten Stellung die gemeinschaftliche Grenzform des linken positiven und des rechten negativen tetraëdrischen Pentagondodekaëders ist.

5) Die Tetartoëdrie, angewendet auf das Rhombendodekaëder, kann eine davon verschiedene Form nicht liefern, da dies bei keiner der drei Hemiëdrien stattfindet, also auch durch das Zusammenwirken zweier nicht möglich ist. So ist aus Fig. 232 ersichtlich, dass für den speciellen Fall $m = \infty$ und $n = 1$ das rechte positive Tetartoëder (weiss gelassen) mit dem linken positiven, dem rechten negativen und dem linken negativen, welche alle drei, aber in verschiedener Richtung, schraffirt sind, zusammenfällt, so dass das scheinbar holoëdrische Dodekaëder die gemeinschaftliche Grenzform für alle vier Tetartoëder bildet.

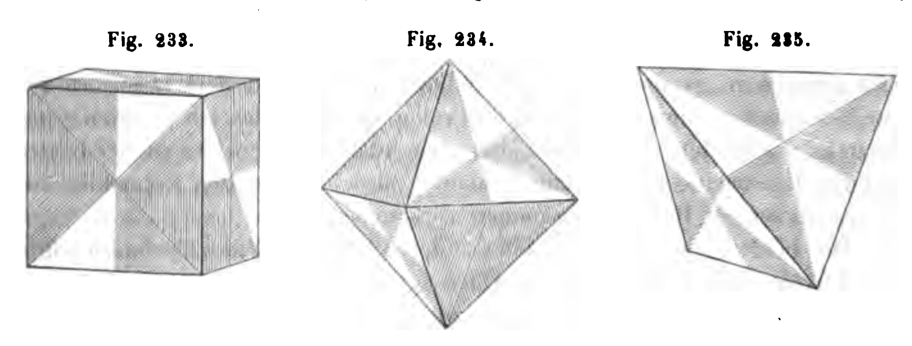
Fig. 232.



6) Ebenso bildet das Hexaëder die gemeinschaftliche Grenzform aller vier tetraëdrischen Pentagondodekaëder für den speciellen Fall $m = n = \infty$, wie aus Fig. 233 hervorgeht, in welcher das rechte positive weiss gelassen, die drei anderen verschieden schraffirt sind.

7) Für den Fall des Octaëders, $m = n = 1$, endlich werden je drei einem Octanten angehörige Flächen der tetraëdrischen Pentagondodekaëder parallel; die resultirende Grenzform hat statt 12 nur vier Flächen und fällt mit dem Tetraëder zusammen, wie Fig. 234 beweist. Wie aus derselben,

Fig. 233. Fig. 234. Fig. 235.



sowie aus Fig. 235 ersichtlich, geben für jenen Fall das rechte positive (die weissen Flächen) und das linke positive (die schraffirten Flächen) ein und dasselbe Tetraëder, während das entgegengesetzte Tetraëder die gemeinschaftliche Grenzform der beiden enantiomorphen negativen Tetartoëder ist.

§. 52. **Circularpolarisation der tetartoëdrischen Krystalle. Beispiele:** Man hat, wie schon bei Gelegenheit der ersten Hemiëdrie, §. 45, erwähnt wurde, beobachtet, dass die enantiomorph hemiëdrischen Krystalle stets die Polarisationsebene des Lichtes drehen (sofern sie isotrop oder einaxig sind), und hat ferner gefunden, dass ein gesetzmässiger Zusammenhang stattfindet zwischen dem Sinn der Drehung und dem Auftreten der enantiomorphen Gestalten, indem nämlich die rechts drehenden Krystalle nur die einen, die links drehenden nur die zu ersteren enantiomorphen Hemiëder zeigen. Bei enantiomorph tetartoëdrischen Krystallen, z. B. dem Quarz, welcher im hexagonalen System krystallisirt, beobachtete man, dass von den vier Tetartoëdern an rechts drehenden Krystallen nur die rechten des einen und die linken des anderen Vorzeichens, an den links drehenden nur die linken positiven und die rechten negativen vorkommen, so dass ein rechtes und ein linkes positives an einem und demselben Krystall einander vollkommen ausschliessen, ebenso eine rechte und eine linke negative tetartoëdrische Gestalt.

Wenn dasselbe Gesetz auch für die tetartoëdrisch regulären Krystalle gilt, so können die rechts drehenden Krystalle einer hierher gehörigen Substanz nur rechte positive und linke negative tetraëdrische Pentagondodekaëder zeigen, die links drehenden nur linke positive und rechte negative. Da es aber beliebig ist, welche vier Octanten positive und welche negative genannt werden, so kann es natürlich auch umgekehrt ausgesprochen werden, dass nämlich die rechts drehenden Krystalle nur linke positive und rechte negative, die links drehenden nur rechte positive und linke negative Viertelflächner zeigen. Jenes Gesetz erfordert nur, dass die beiden enantiomorphen

tetraëdrischen Pentagondodekaëder eines und desselben Octanten niemals an einem Krystall zusammen auftreten können. Hieraus ergiebt sich alsdann die Möglichkeit oder Unmöglichkeit des Zusammenvorkommens der übrigen tetartoëdrischen Formen ebenso, wie diese sich selbst aus dem allgemeinen Falle der Hexakisoctaëder ergaben.

Das rechte positive Tetartoëder fällt mit dem positiven Pyramidentetraëder zusammen, wenn $m = n$, das linke negative mit dem negativen Pyramidentetraëder, diese beiden Grenzformen können daher an einem Krystall zusammen auftreten. Dieselben sind aber auch die Grenzformen der beiden anderen tetartoëdrischen Gestalten, können also auch an den Krystalllen der entgegengesetzten Drehung zusammen vorkommen.

Die beiden, einander ausschliessenden Paare von Viertelflächnern haben ebenfalls gemeinschaftliche Grenzformen für den Fall $n = 1$, d. h. es können sowohl an rechts, als auch an links drehenden Krystallen beide entgegengesetzte Arten von Deltoiddodekaëdern zusammen auftreten.

Dieses ist nicht der Fall mit den beiden entgegengesetzten Pentagondodekaëdern, denn das eine derselben, welches im vorigen § als »rechtes« bezeichnet wurde, ist die gemeinschaftliche Grenzform des rechten positiven und des linken negativen tetraëdrischen Pentagondodekaëders, welche allein zusammen vorkommen können; das entgegengesetzte symmetrische Pentagondodekaëder, im vorigen § als linkes bezeichnet, ist gemeinschaftliche Grenzform der beiden anderen Tetartoëder, welche die vorigen ausschliessen. Somit können niemals an einem tetartoëdrisch regulären Krystall die beiden, einander zu einem Pyramidenwürfel ergänzenden Pentagondodekaëder zusammen auftreten.

Das Dodekaëder fällt für die vier Viertelflächner vollkommen in eine Form zusammen, es kann sich also in seinem Auftreten nicht von dem holoëdrischen unterscheiden.

Das Gleiche findet statt bei dem Hexaëder.

Endlich ist jedes der beiden Tetraëder gemeinschaftliche Grenzform eines rechten und linken tetraëdrischen Pentagondodekaëders für den Fall $m = n = 1$, also können beide, das positive und das negative Tetraëder an demselben Krystalle vorkommen, sei es ein rechts oder ein links drehender.

Diese Sätze finden ihre Bestätigung in den Beobachtungen über die kleine Zahl der hierher gehörigen Körper, wenn auch bei weitem nicht alle vorerwähnten Formen an den Krystallen derselben vorzukommen pflegen. So fand man z. B. bisher an ihnen noch niemals Flächen eines Hexakisoctaëders, so dass tetraëdrische Pentagondodekaëder bisher noch nie beobachtet wurden. Dagegen zeigen dieselben die Combination eines Pentagondodekaëders mit einem Tetraëder, eine nur in dieser Tetartoëdrie mögliche Combination, da diese Formen, als hemiëdrische betrachtet, ja zwei verschiedenen Hemiëdrien angehören.

Beispiele: Natriumchlorat $= NaClO^3$. Aus wässerigen Lösungen grosse Krystalle, vorherrschend $\infty O \infty = h$, ferner $\infty O = d$, ein Pentagon-

dodekaëder $\frac{\infty O 2}{2} = p$ und ein Tetraëder $\frac{O}{2} = -o$. Nach obigen Betrachtungen schliessen die beiden entgegengesetzten Pentagondodekaëder einander aus, und kann das eine nur an rechts, das andere nur an links drehenden Krystallen auftreten. In der That findet sich stets nur eines an den Krystallen des chlorsauren Natriums, mögen sie rechts oder links drehend sein, und wir haben demnach dasjenige, welches wir an einem rechten Krystall beobachten, als rechtes Pentagondodekaëder, das an linken Krystallen vorkommende als linkes, entgegengesetztes, zu betrachten, und die Krystalle demgemäss gegen einander zu stellen, wie es in Fig. 236 *a*, welches einen rechts drehenden Krystall darstellt, und Fig. 236 *b*, dem Bilde eines links drehenden, geschehen ist. Alsdann ist das Tetraëder bei beiden Krystallen dasselbe, nämlich $-\frac{O}{2}$, und da sich an den Krystallen, die aus wässerigen Lösungen auskrystallisiren,

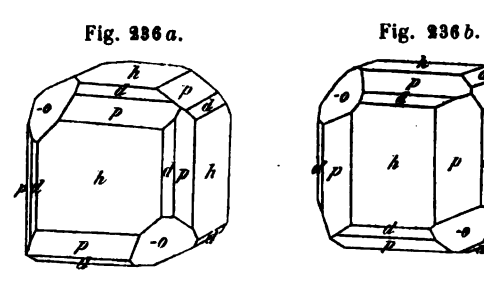


Fig. 236 *a*. Fig. 236 *b*.

stets nur dieses findet (das entgegengesetzte könnte auch vorkommen, scheint aber andere äussere Umstände zu seiner Ausbildung zu bedürfen), so lässt sich an einem solchen Krystall durch seine Form der Sinn der Drehung vorher bestimmen, da die beiden Formen 236 *a* und *b* durch keine Drehung zur Deckung gebracht werden können; stellt man denselben nämlich so, dass das Tetraëder, als negatives, oben links liegt, so verläuft die sogenannte Hexaëderkante des Pentagondodekaëders auf der Vorderseite entweder horizontal (Fig. 236 *a*) oder vertical (Fig. 236 *b*); in der That sind alle Krystalle der ersten Art rechts, alle der zweiten Art links drehend. Beide Arten von Krystallen bilden sich stets neben einander aus, und die Auflösung derjenigen von einer Art, welche die Polarisationsebene des Lichtes nicht dreht, liefert beim Krystallisiren wieder beiderlei Krystalle.

Die Stärke der Drehung ist nicht nur, wie bei allen circularpolarisirenden Krystallen, bei den rechten und linken, sondern auch nach allen Richtungen im Krystall gleich gross. Sie beträgt bei 1 Millim. Dicke $3\frac{1}{2}^0$ für Gelb.

Das $Na\,ClO^3$ hat keine erkennbare Spaltbarkeit, d. h. so geringe Differenz der Cohäsion nach verschiedenen Richtungen, dass dieselbe z. B. bei den Härtebestimmungen nicht mehr nachzuweisen ist, sondern die Härtecurve auf allen Flächen als ein Kreis erscheint.

Natriumbromat $= Na\,BrO^3$. Die Krystalle zeigen nur $\infty O \infty$, $+\frac{O}{2}$, $-\frac{O}{2}$; hier würde man, da beide Tetraëder auftreten, demnach ohne tetraëdrische Pentagondodekaëder den Sinn der Drehung nicht aus der Form bestimmen können. Stärke der Drehung für 1 Millim. $= 6\frac{1}{4}^0$ gelb.

Essigsaures Uranoxydnatron = $Na\ UO^2\ (C^2\ H^3\ O^2)^3$. Combination: $\frac{O}{2}$ und ∞O. Drehung für 1 Millim. = 4° gelb. Auch hier dreht die Auflösung der Krystalle, an denen andere Formen noch nicht beobachtet wurden, nicht.

Die Kenntniss der interessanten krystallographischen und physikalischen Eigenschaften dieser drei Körper verdanken wir Marbach (Poggendorff's Annalen, 91. Bd. 482, und 94. Bd. 412).

---

§. 53. Die physikalischen Eigenschaften der regulären Krystalle.

Fassen wir die physikalischen Eigenschaften der regulären Krystalle in einen Gesammtüberblick zusammen und vergleichen sie mit den geometrischen, so zeigt sich die vollkommenste Abhängigkeit jener von der Symmetrie ihrer geometrischen Formen. Diese sind symmetrisch: 1) nach den drei Würfelflächen, und deren Normalen, die drei Hauptaxen, sind einander vollkommen gleichwerthig; 2) nach den sechs Dodekaëderflächen, und deren sechs Normalen, welche wir Nebenaxen nennen wollen, sind ebenfalls sämmtlich unter einander gleichwerthig; sie halbiren die rechten Winkel, welche je zwei Hauptaxen mit einander bilden.

Dieselbe Symmetrie zeigen nun die regulären Krystalle nach allen ihren physikalischen Eigenschaften. Der Elasticitätscoëfficient zeigt Maxima oder Minima von gleicher Grösse parallel den drei Hauptaxen, er ist ferner gleich gross in allen sechs Nebenaxen, ebenso gleich gross in je zwei Richtungen, welche symmetrisch zu einer geometrischen Symmetrieebene liegen. Dies haben namentlich die Untersuchungen Voigt's am Steinsalz bewiesen (s. §. 43).

Die Cohäsion ist ebenfalls im Minimum oder Maximum von genau gleicher Grösse parallel den drei Hauptaxen. Ist das erstere der Fall, so sind die Krystalle hexaëdrisch*) spaltbar (wie Steinsalz, Bleiglanz u. a.), und zwar um so vollkommener, je schneller die Grösse der Cohäsion wächst, wenn die Richtung, von einer Hauptaxe ausgehend, sich ändert. Sind aber die Hauptaxen die Richtungen der Maximalwerthe der Cohäsion, so sind zwei Fälle zu unterscheiden: Geht man von der Hauptaxe aus und betrachtet Richtungen, welche immer grössere Winkel mit jener einschliessen, aber sämmtlich in einer Haupt-Symmetrieebene liegen, so nimmt die Cohäsion fortwährend ab bis zu der Richtung, welche 45° mit der Hauptaxe bildet, von da ab ebenso wieder zu, bis sie in der zweiten Hauptaxe, nach einer Drehung von 90°, ihren Maximalwerth wieder erreicht. Die Richtung des bei 45° stattfindenden Minimum ist aber die Normale zur Dodekaëderfläche; wir wollen dieses daher das »Dodekaëderminimum« nennen. Aendern wir jedoch, von einer Hauptaxe ausgehend, die Richtung innerhalb einer Dode-

---

*) Wegen der absoluten physikalischen Gleichwerthigkeit der drei Hauptaxen kann also niemals ein Hexaëderflächenpaar mehr oder weniger vollkommen spaltbar sein, als die beiden anderen.

kaëderfläche, so muss mit steigendem Drehungswinkel ebenfalls die Cohäsion abnehmen, aber nach einem anderen Gesetz, als vorher; nach einer Drehung von 54° 44′ erreichen wir eine Richtung, in welcher sich drei Dodekaëderflächen schneiden, und gehen wir von dieser Richtung aus innerhalb dieser drei Symmetrieebenen, so nimmt in allen dreien die Cohäsion in derselben Weise zu, und wir gelangen auf jedem der drei Wege nach einer Drehung von 54° 44′ in die Direction einer Hauptaxe, in welcher das Maximum der Cohäsion vorhanden ist. Jene Richtung, welche mit den drei Hauptaxen gleiche Winkel einschliesst, ist, wie leicht zu berechnen, die Normale zur Octaëderfläche; wir wollen daher den Werth der Cohäsion in dieser Richtung das »Octaëderminimum« nennen. Nun können zwei Fälle eintreten: entweder ist das Octaëderminimum kleiner als das Dodekaëderminimum, oder umgekehrt. Im ersteren Falle ist in der Normalen zur Octaëderfläche die Cohäsion am kleinsten von allen Richtungen im Krystall; derselbe ist spaltbar nach dem Octaëder, und zwar um so vollkommener, je kleiner das Octaëderminimum ist und je näher das Dodekaëderminimum dem Maximum liegt (z. B. Flussspath). Im zweiten Falle hat die Normale zur Dodekaëderfläche von allen Richtungen die geringste Cohäsion, der Krystall ist dodekaëdrisch spaltbar (Zinkblende).

Diesen Betrachtungen zufolge, welche gestützt sind auf die Bestimmungen der Härte, die ja ein Maass der Cohäsion ist, in verschiedenen Richtungen (s. §. 2), können demnach keine anderen Spaltungsflächen an regulären Krystallen existiren, als $\infty O \infty$, O oder ∞O, und in der That sind andere noch niemals beobachtet worden.

Bestimmt man die Härte in verschiedenen Richtungen auf einer Krystallfläche und trägt deren Grössenwerth auf diesen Richtungen auf, so erhält man eine Härtecurve, von welcher die Untersuchungen Exner's (s. §. 2) gezeigt haben, dass sie stets symmetrisch ist, entsprechend der Lage der Symmetrieebenen des Krystalls. Auf den Hexaëderflächen z. B. hat die Härtecurve vier Minima und vier Maxima, die einen in der Richtung zweier Hauptaxen, die anderen parallel den Diagonalen der Flächen, d. h. zwei Symmetrieaxen (Normalen zu Dodekaëderflächen). Die Minima, ebenso wie die Maxima, sind unter einander gleich, und die Curve ist symmetrisch zu den beiden Haupt-Symmetrieebenen und zu den beiden Dodekaëderflächen, welche normal zu der untersuchten Hexaëderfläche stehen.

Da der Schall eine Wellenbewegung der Theilchen ist, deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit bei derselben Substanz nur von deren Elasticitätscoëfficient abhängt, so muss, da letzterer nach verschiedenen Richtungen in einem regulären Krystall differirt, auch der Schall sich mit verschiedener Geschwindigkeit fortpflanzen, aber mit gleicher in den drei Hauptaxen u. s. f.

Was die optischen Eigenschaften betrifft, so muss der Symmetrie der regulären Krystalle entsprechend, die optische Elasticität in den Richtungen der drei Hauptaxen genau gleich sein. Gleichheit der Lichtgeschwindigkeit in drei auf einander senkrechten Richtungen bedingt aber als Elasticitäts-

fläche eine Kugel, die regulären Krystalle sind einfach brechend, isotrop, sie haben nach allen Richtungen dieselbe Lichtgeschwindigkeit, dieselbe Absorption u. s. f. Die optischen Eigenschaften entsprechen also ebenfalls vollkommen der Symmetrie der Krystalle.

Die thermischen Verhältnisse derselben stellen in jeder Beziehung das vollständigste Analogon der optischen dar: die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wärmestrahlen, die Leitung der Wärme, die Ausdehnung durch Annahme einer höheren Temperatur sind nach allen Richtungen dieselben.

So zeigen uns die Krystalle des ersten Systems sowohl in geometrischer, als in physikalischer Beziehung den höchsten Grad von Regelmässigkeit, den krystallisirte Körper überhaupt besitzen können, und sind dadurch, dass ihre drei Hauptaxen in jeder Beziehung absolut gleichwerthig sind, von den Krystallen aller übrigen Systeme unterschieden.

B. Krystalle mit einer Hauptaxe.

(Physikalisch einaxige Krystalle.)

§. 54. **Einleitung.** Die Gesammtheit aller Krystalle, welche nur eine Haupt-Symmetrieebene, also nur eine Hauptaxe, besitzen, zerfällt nach §. 37 in zwei Krystallsysteme, das hexagonale und das tetragonale. Die dem ersteren angehörigen Krystalle haben ausser der Haupt-Symmetrieebene noch sechs, die des tetragonalen noch vier gewöhnliche Symmetrieebenen, welche sich sämmtlich in der Hauptaxe durchschneiden.

Nach dem Grundgesetz der Krystallphysik und den in §. 36 daraus gezogenen Folgerungen giebt es in den Krystallen mit einer Hauptaxe nur eine Ebene, in welcher alle Richtungen optisch gleichwerthig sind, welche demnach einen Kreisschnitt der Elasticitätsfläche liefert; dies ist die Haupt-Symmetrieebene. Die sechs übrigen Symmetrieebenen des hexagonalen Systems, ebenso die vier entsprechenden des tetragonalen, müssen sämmtlich die Elasticitätsfläche in symmetrische Hälften zerlegen. Dieser Bedingung genügen von den Elasticitätsflächen der doppeltbrechenden Krystalle nur diejenigen der optisch einaxigen, welche die Form eines Rotationsellipsoids haben, und nur für den Fall, dass dessen Rotationsaxe genau zusammenfällt mit der Hauptaxe der Krystalle. Da das, was für die optischen Eigenschaften gilt, auch statt hat für die thermischen u. s. w., so sind folglich die Krystalle mit einer Hauptaxe physikalisch einaxig, und ihre physikalische Hauptaxe fällt mit ihrer geometrischen zusammen.

Die tetragonalen, ebenso wie die hexagonalen Krystalle haben also folgende allgemeine Eigenschaften: in der Richtung der krystallographischen Hauptaxe die grösste oder kleinste optische Elasticität, senkrecht dazu, nach allen Richtungen gleich, die kleinste oder grösste, so dass die Richtung jener Hauptaxe zugleich die der optischen Axe ist; ganz gleiches Verhalten in Bezug auf Strahlung und Leitung der Wärme; in der Hauptaxe das Maximum oder das Minimum der thermischen Ausdehnung, senkrecht dazu nach allen Seiten gleiche, kleinste oder grösste lineare Ausdehnung durch die Wärme, so dass eine Kugel, aus einem solchen Krystall geschliffen, sich durch Temperaturänderung verwandelt in ein Rotationsellipsoid, welches in der Richtung der krystallographischen Hauptaxe entweder verlängert oder verkürzt ist.

Die vollkommene Uebereinstimmung des allgemeinen physikalischen Charakters zwischen den Krystallen des hexagonalen und des tetragonalen

Systems bedingt nun auch eine solche in ihren geometrischen Eigenschaften. Die Analogie beider Systeme in Bezug auf die Beschaffenheit der möglichen Formen, der Art der Combinationen, der verschiedenen Hemiëdrien u. s. w. ist eine so vollkommene, dass die Darstellung des hexagonalen Systems wörtlich auch für das tetragonale gilt, wenn nur die Namen geändert und für die Zahl 6 stets die Zahl 4 eingesetzt wird.

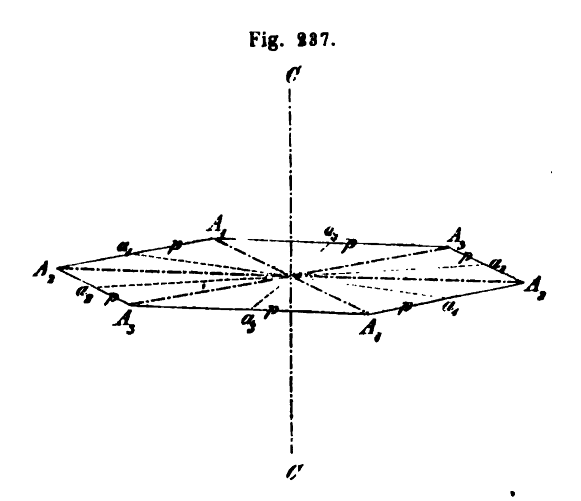
Die folgende Darstellung der beiden in Rede stehenden Systeme wird dies bis ins Einzelne zeigen.

II. Das hexagonale Krystallsystem.

§. 55. **Grundform der hexagonalen Krystalle.** Das hexagonale Krystallsystem umfasst alle Formen, welche ausser einer Haupt-Symmetrieebene noch sechs andere, senkrecht dazu und einander unter 30° durchschneidend, besitzen.

Für die krystallographische Betrachtung werden die Formen stets so gestellt, dass die Haupt-Symmetrieebene horizontal, die Hauptaxe folglich vertical steht. Die hexagonalen Krystallgestalten sind derart beschaffen, dass sie nach einer Drehung von 60° um die Hauptaxe sich selbst wieder genau congruent sind. Seien in Fig. 237 die Geraden A_1, a_1, A_2, a_2, A_3, a_3 die Durchschnitte der sechs Symmetrieebenen mit der Haupt-Symmetrieebene, so heisst jener Satz: die Richtungen A_1, A_2, A_3 können beliebig mit einander vertauscht werden, ebenso a_1, a_2, a_3, ohne die Formen zu ändern. Es sind demnach A_1, A_2, A_3 gleichwerthige Richtungen, ebenso a_1, a_2, a_3.

Fig. 237.

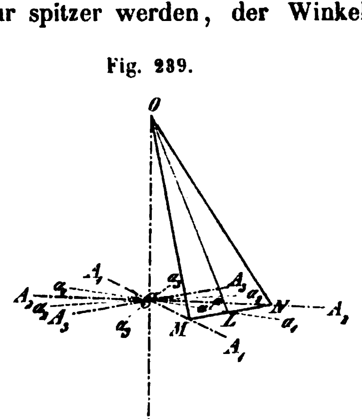


Es wird daher eine Form zu den krystallonomisch möglichen gehören, deren Flächen je zwei der gleichwerthigen Richtungen in gleichem Abstande vom Mittelpunkt durchschneidet, deren Durchschnitte mit der Haupt-Symmetrieebene also die Geraden p Fig. 237 sind. Es wird sich der Einfachheit wegen empfehlen, eine solche Form zur Grundform, und zu Axenebenen die Haupt-Symmetrieebene und zwei sich unter 60° schneidende Symmetrieebenen, also zu Axen die Hauptaxe c und zwei der Linien A oder a zu wählen. Nehmen

wir zu diesem Zwecke A_1, A_2 *) und die Hauptaxe, und nennen wir die ersteren die beiden Nebenaxen, so durchschneidet die Fläche 1 Fig. 238 der Grundform, welche in dem Zwölftel (Dodekanten) des Raumes zwischen A_1 und A_2 oberhalb liegt, die beiden Nebenaxen in gleichem Abstande, die Hauptaxe in einer vorläufig noch unbekannten Entfernung. Da die Ebene, welche die Haupt-Symmetrieebene in A_1 A_1 vertical schneidet (kurz: die Ebene A_1), eine Symmetrieebene ist, so muss jene Grundform ausser dieser ersten Fläche noch eine zweite, 2, besitzen, welche zu jener in Bezug auf A_1 symmetrisch liegt; da auch A_2 Symmetrieebene, muss eine zugehörige Fläche 6, zu 1 symmetrisch in Bezug auf A_2, existiren; da ferner A_3 eine Symmetrieebene der vollständigen Form ist, so müssen zu derselben noch drei Flächen 3, 4, 5, in Bezug auf A_3 symmetrisch zu 2, 1, 6, und endlich, symmetrisch in Bezug auf die Haupt-Symmetrieebene zu allen sechs Flächen noch sechs untere. Die vollständige einfache Krystallform besitzt also 12 Flächen, es ist eine hexagonale Pyramide Fig. 238, deren sämmtliche Flächen gleiche Neigung gegen die Hauptaxe besitzen. Da aber diese Form einem physikalisch einaxigen Krystall angehört, so muss jene Neigung der Flächen gegen die Hauptaxe nach dem §. 27 Gesagten mit der Temperatur veränderlich sein; im Falle die Hauptaxe die Richtung der grössten thermischen Ausdehnung ist, muss die Pyramide bei steigender Temperatur spitzer werden, der Winkel der Flächen zur Hauptaxe kleiner, im umgekehrten Falle grösser.

Fig. 238.

Nennen wir a den Abstand, in welchem eine Fläche, z. B. 1, die beiden Nebenaxen A_1 und A_2, c denjenigen, in welchem sie die Hauptaxe durchschneidet, so finden wir das Verhältniss $\frac{c}{a}$ (oder die Zahl c, wenn wir $a = 1$ setzen) aus den Winkeln der hexagonalen Pyramide in folgender Weise: sei der Winkel 2β der horizontalen, in der Haupt-Symmetrieebene liegenden Kanten (Basiskanten) gemessen, so ist die Hälfte desselben der Winkel β, welchen die Höhe des Dreiecks MNO Fig. 239 mit der Richtung CL bildet; die letztere ist Durchschnittsrichtung einer der Symmetrieebenen a mit der Haupt-Symmetrieebene; nennen wir dieselbe Zwischenaxe und bezeichnen ihre Länge mit a', so ist $\frac{c}{a'}$ = der


Fig. 239.

*) Wobei die Aufstellung der Formen stets so geschehen soll, dass A_2 horizontal quer läuft, A_1 demnach schräg nach vorn, aber ebenfalls horizontal, die Hauptaxe, wie bereits erwähnt, vertical.

Tangente jenes gemessenen Winkels β, und da a' mit a 30° einschliesst, so ist, $a = 1$ gesetzt, $a' = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, also die gesuchte Zahl, das Verhältniss des Parameters der Fläche in der Richtung der Hauptaxe zu dem parallel einer Nebenaxe,

$$c = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} \beta.$$

Dieselbe Zahl c lässt sich auch aus dem Winkel, welchen zwei nebeneinanderliegende Flächen der hexagonalen Pyramide bilden, d. i. demjenigen der oben und unten zu je sechs zusammenlaufenden sog. Polkanten berechnen; sei dieser $= 2\pi$ gefunden, so ist π der Winkel einer Fläche mit zwei sich unter 60° durchschneidenden Symmetrieebenen; in dem aus diesen beiden Ebenen und der Pyramidenfläche gebildeten sphärischen Dreiecke sind also die drei Winkel ($= \pi$, π, 60°) bekannt; berechnet man daraus eine der dem Winkel π gegenüberliegenden Seiten, so ist deren cotang. dieselbe Zahl c.

Ist uns c, das Verhältniss der Hauptaxe zur Nebenaxe, gegeben, so ist damit die Form der hexagonalen Pyramide, d. h. die Grösse ihrer Polkanten- und ihrer Basiskantenwinkel bekannt. Da aber diese Winkel sich mit der Temperatur stetig ändern, so muss das Gleiche auch in Bezug auf c stattfinden; der Werth von c für eine bestimmte Temperatur muss vollkommen stetig in einen anderen, welcher einer anderen Temperatur entspricht, übergehen, wenn der Krystall die letztere annimmt. Dies ist nur möglich, wenn c bei einer bestimmten Temperatur im Allgemeinen eine irrationale Zahl ist, da der Uebergang einer rationalen Zahl in eine ebensolche zweite nur sprungweise geschehen kann. Es giebt also wohl gewisse Temperaturen, bei denen c genau einer rationalen Zahl gleich ist, bei allen dazwischen liegenden indess durchläuft c alle irrationalen Zahlen, welche zwischen jenen liegen. Ist c für eine bestimmte Temperatur*) durch eine Winkelmessung bestimmt, so sind uns alle Formen, welche an dem Krystall überhaupt möglich sind, gegeben, denn es sind nunmehr sämmtliche Elemente (Axenwinkel: $\alpha = 90°$, $\beta = 90°$, $\gamma = 60°$; Parameter der Grundform: $1 : 1 : c$) bekannt, und demnach nur noch solche Formen an den Krystallen derselben Substanz krystallonomisch möglich, deren Indices rationale Zahlen sind.

§. 56. **Bezeichnung der hexagonalen Formen durch die Indices.** Gehen wir jetzt über zur Bezeichnung der hexagonalen Formen, für welche wir, wie im vorigen § angeführt, zu Axenebenen die Haupt-Symmetrieebene und zwei gleichwerthige Symmetrieebenen und zur Grundform die hexagonale Pyramide wählen, so würde eine Fläche derselben, z. B. 1 Fig. 240, liegend zwischen den positiven Seiten (+) der Nebenaxen a_1, a_2, und der Hauptaxe c das Symbol

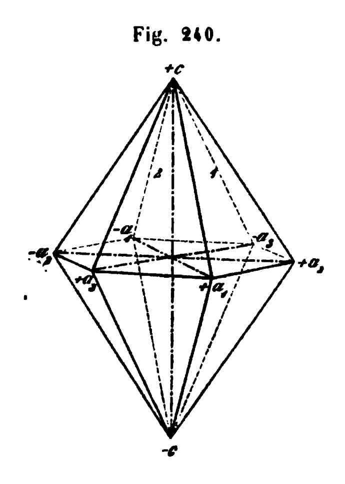
(1 1 1)

erhalten müssen. Bezeichnen wir jetzt die nächstfolgende Fläche 2 in gleicher Weise, auf dieselben Axen bezogen, so erhalten wir, da sie parallel der Axe a_2 ist, das Symbol (1 0 1). Während also im regulären System,

*) Die Winkeländerungen, welche die Krystalle zwischen den Grenzen der gewöhnlich bei Messungen vorkommenden Temperaturen (15°—25° C.) erleiden, sind so gering, dass fast immer eine genauere Temperaturangabe überflüssig ist.

bei drei zu einander rechtwinkeligen Axen, alle Flächen einer einfachen Form gleiche Indices haben (und, wie wir später sehen werden, ist dasselbe im tetragonalen System der Fall), würden hier die verschiedenen Flächen derselben Form verschiedene Indices erhalten. Die Fläche 2 Fig. 240 hat aber das gleiche Symbol (1 1 1), wie 1, wenn wir sie beziehen auf die Axen c, a_1 und (statt auf a_2, auf das völlig damit gleichwerthige) a_3. Auf diese letzteren Axen bezogen, hat 1 das Symbol (1 0 1). Wir werden daher für beide Flächen 1 und 2 Symbole, welche aus denselben Zahlen bestehen, erhalten, wenn wir in dieselben ausser der Hauptaxe die drei, auf die Nebenaxen bezüglichen Indices einführen, uns also vierzähliger Symbole bedienen. Dasjenige der Fläche 1 würde alsdann = (0 1 1 1) sein, wenn sich der erste Index auf a_3, der zweite auf a_1, der dritte auf a_2 und der vierte auf c bezieht; dasjenige von 2 = (1 1 0 1). Schreiben wir stets die Indices in derjenigen Reihenfolge, wie sie sich auf die Axen $a_3\ a_1\ a_2\ c$ beziehen, so sind überhaupt nur folgende Flächen, welche zwei benachbarte Nebenaxen in gleichen Abständen durchschneiden, möglich:

Fig. 240.



$$(0\,1\,1\,1)\ (1\,1\,0\,1)\ (1\,0\,\bar{1}\,1)\ (0\,\bar{1}\,\bar{1}\,1)\ (\bar{1}\,\bar{1}\,0\,1)\ (\bar{1}\,0\,1\,1)$$
$$(0\,1\,1\,\bar{1})\ (1\,1\,0\,\bar{1})\ (1\,0\,\bar{1}\,\bar{1})\ (0\,\bar{1}\,\bar{1}\,\bar{1})\ (\bar{1}\,\bar{1}\,0\,\bar{1})\ (\bar{1}\,0\,1\,\bar{1})$$

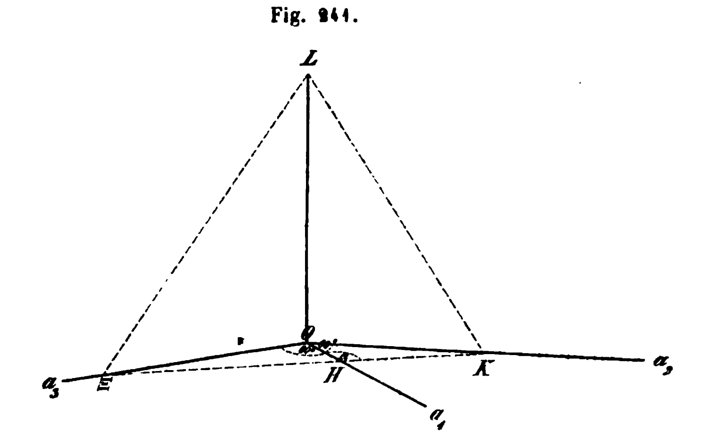
Diese zwölf, einzig möglichen Flächen sind nun gerade diejenigen der vollständigen hexagonalen Pyramide; bei Anwendung derartiger vierzähliger Symbole stellt also im hexagonalen System (ebenso wie im regulären und tetragonalen mit dreizähligen) die Gesammtheit aller möglichen Flächen mit gleichen Indices eine einfache Krystallform von hexagonaler Symmetrie dar.

Es ist klar, dass jede Krystallfläche schon durch drei Indices, zwei auf je eine Nebenaxe, der dritte auf die Hauptaxe bezüglich, vollkommen bestimmt ist, der vierte, auf die dritte Nebenaxe sich beziehende, also durch die beiden anderen mit gegeben ist. Dieser, demnach an und für sich überflüssige und nur aus dem soeben entwickelten Grunde eingeführte, Index steht nun zu jenen in einer sehr einfachen Beziehung, er ist nämlich gleich deren Differenz. Mögen die Indices einer beliebigen Krystallfläche des hexagonalen Systems sein: ξ bezogen auf die überzählige Nebenaxe a_3, h bezogen auf a_1, k bezogen auf a_2 und l bezogen auf die Hauptaxe c (auf diese Reihenfolge der Axen bezogen, sollen von jetzt ab stets die Indices angegeben werden), so ist das Symbol jener Fläche = $(\xi h k l)$, wo

$$\xi = h - k.$$

Beweis: Seien in Fig. 241 $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ die Längen, welche die Grundform (die hexagonale Pyramide) auf den positiven Seiten der Nebenaxen abschneidet, folglich $\frac{1}{k} = OK$, $\frac{1}{h} = OH$, $\frac{1}{\xi} = O\Xi$ die Axenabschnitte der Fläche $(\xi h k l)$, so ist, wenn

Fig. 241.



der Winkel OHK mit α bezeichnet wird:

$$\text{im Dreieck } OHK: \frac{h}{k} = \frac{\sin\alpha}{\sin(120^0 - \alpha)}$$

$$\text{,, ,, } OH\Xi: \frac{h}{\xi} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha - 60^0)}$$

oder:

$$\frac{k}{h} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\operatorname{cotg}\alpha + \frac{1}{2}$$

$$\frac{\xi}{h} = \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha}{\sin\alpha} = -\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\operatorname{cotg}\alpha + \frac{1}{2}$$

summirt:

$$\frac{k+\xi}{h} = 1$$

$$\xi = h - k.$$

Die Aufnahme des vierten Index in das Symbol erfordert also wegen dieser einfachen Beziehung nicht mehr Zeit, als zum Schreiben desselben nöthig ist.

Das Symbol $(\xi h k l)$ ist der allgemeinste Ausdruck für eine beliebige Krystallfläche; wir haben bereits einen speciellen und einfacheren Fall betrachtet, den nämlich, dass $h = k = l = 1$, den Fall der zur Grundform gewählten hexagonalen Pyramide. Es ist jetzt zu untersuchen, welche Flächen noch zu der den allgemeinsten Fall bildenden Fläche $(\xi h k l)$ gehören, und mit ihr zusammen die vollständige einfache Form, welche wir dann mit $(\xi h k l)$ zu bezeichnen haben, bilden. Um diese Flächen sämmtlich anzugeben, werden wir, stets die Reihenfolge beibehaltend, dass der erste Index sich auf die überzählige Nebenaxe a_3, der zweite auf a_1, der dritte auf a_2 und der letzte auf die Hauptaxe bezieht, die Zahlen $\xi h k$, weil sie sich auf gleichwerthige Richtungen beziehen, mit einander vertauschen, wobei aber stets h und k auf zwei benachbarte (60° mit ein-

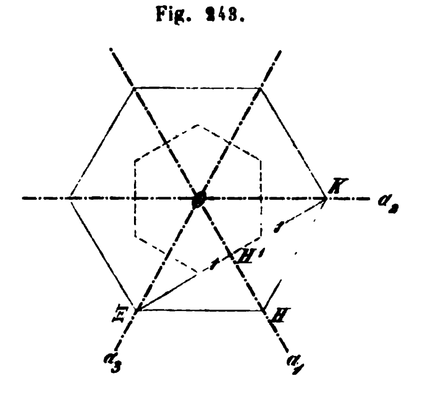
ander bildende) Abschnitte der Nebenaxen aufgetragen gedacht werden muss. Berücksichtigen wir diese nothwendige Bedingung, so erhalten wir, mit Hinzufügung der ersten Fläche $(\xi h k l)$ selbst, folgende mögliche Fälle:

$$(\xi h k l)\ (\xi k h l)\ (h k \xi l)\ (k h \xi l)\ (h \xi \bar{k} l)\ (k \xi \bar{h} l)$$
$$(\xi \bar{h} \bar{k} l)\ (\xi \bar{k} \bar{h} l)\ (\bar{h} \bar{k} \xi l)\ (\bar{k} \bar{h} \xi l)\ (\bar{h} \xi k l)\ (\bar{k} \xi h l)$$
$$(\xi h k \bar{l})\ (\xi k h \bar{l})\ (h k \xi \bar{l})\ (k h \xi \bar{l})\ (h \xi \bar{k} \bar{l})\ (k \xi \bar{h} \bar{l})$$
$$(\xi \bar{h} \bar{k} \bar{l})\ (\xi \bar{k} \bar{h} \bar{l})\ (\bar{h} \bar{k} \xi \bar{l})\ (\bar{k} \bar{h} \xi \bar{l})\ (\bar{h} \xi k \bar{l})\ (\bar{k} \xi h \bar{l})$$

Diese 24 Flächen bilden die in Fig. 242 dargestellte dihexagonale Pyramide, welche als allgemeinster Fall die flächenreichste aller einfachen hexagonalen Formen darstellt. Ganz ebenso, wie im regulären Krystallsystem aus dem 48-Flächner, werden wir auch aus dem allgemeinen Repräsentanten aller hexagonalen Formen, der dihexagonalen Pyramide, alle übrigen ableiten. Wir erhalten dieselben, indem wir h, k und l (ξ ist abhängig von h und k, also nach deren Bestimmung nicht mehr beliebig) alle möglichen speciellen Werthe beilegen. Wenn wir $h = k$ setzen, so erhalten wir, wie wir oben sahen, eine hexagonale Pyramide, deren Flächen zwei benachbarte Abschnitte der Nebenaxen in gleichem Abstande vom Mittelpunkte durchschneiden. Setzen wir aber $h = 2k$, so hat der Durchschnitt der ersten möglichen Fläche 1 (Fig. 243) mit der Haupt-Symmetrieebene (parallel derselben die Zeichnungsebene) eine Richtung KH', welche normal zur Axe a_1 ist (als Höhenlinie des gleichseitigen Dreiecks OKH); die im Dodekanten $a_1\ a_3$ liegende Fläche, für welche $O\Xi = 2\,OH'$ ist, hat dieselbe Richtung, fällt also mit ihr zusammen. Es entsteht also in diesem Falle keine dihexagonale, sondern nur eine hexagonale Pyramide, deren Querschnitt sechs Seiten (in der Figur punktirt bezeichnet) besitzt, welche mit den Nebenaxen Winkel von 90° bilden, während derjenige der zuerst betrachteten hexagonalen Pyramide (in der Figur mit dünnem Strich ausgezogen) dieselben unter 60° durchschneidet. Beide Arten von hexagonalen Pyramiden werden als solche erster und zweiter Ordnung unterschieden. So haben wir also bereits drei verschiedene Fälle, wobei l noch

Fig. 242.

Fig. 243.



einen beliebigen Werth hat. Setzen wir nun in jedem derselben noch $l = 0$, so erhalten wir dreierlei Formen, welche die Hauptaxe nicht schneiden, also ihr parallel sind. Geben wir endlich beiden Nebenaxen den Werth Null, so erhalten wir eine Form, welche diesen letzteren parallel ist.

Es resultiren im Ganzen demnach sieben mögliche Fälle, entsprechend sieben verschiedenen Arten von Formen.

§. 57. **Bezeichnung der hexagonalen Formen durch ihr Axenverhältniss.** Wenn wir nunmehr zur Bezeichnung der Flächen durch die Multiplen der Parameter der Grundform, also zur Weiss'schen Bezeichnung übergehen, so wollen wir der Einfachheit wegen den Parameter der dritten Nebenaxe als überflüssig und aus den beiden anderen sich ergebend (vergl. vor. §), vorläufig ausser Betracht lassen und die Flächen nur bestimmen mittelst zweier gleichwerthiger, 60° mit einander bildender Hälften von Nebenaxen a und a und der Hauptaxe c. Der allgemeinste Fall ist dann offenbar der, dass die Nebenaxen in verschiedenen Abständen, welche sich wie $n : 1$ verhalten (wobei n eine rationale Zahl, wegen der Gleichwerthigkeit der Nebenaxen), geschnitten werden, und dass die Hauptaxe den $m$fachen Parameter der Grundform besitzt (m selbstverständlich ebenfalls rational). Alsdann ist das Parameterverhältniss der Fläche

$$= a : na : mc.$$

Zu dieser Form muss aber in demselben Dodekanten noch eine zweite Fläche

$$= na : a : mc$$

gehören, durch Vertauschung der gleichwerthigen Nebenaxen entstehend. Die analogen Flächenpaare müssen wegen der hexagonalen Symmetrie in allen anderen elf Dodekanten auftreten, und so entsteht 1) die vollständige dihexagonale Pyramide (Fig. 244) als Gesammtheit aller möglichen Flächen mit dem Parameterverhältniss: $a : na : mc$. 2) Setzen wir $n = 1$, also die Nebenaxen gleich, so kann in jedem Dodekanten nur eine Fläche existiren, da die Vertauschung der beiden Nebenaxen nun keine neue Fläche mehr liefert; es resultirt eine hexagonale Pyramide erster Ordnung. 3) Lassen wir n den speciellen Werth 2 annehmen, so durchschneidet die Fläche $a : 2a : mc$ die Haupt-Symmetrieebene in einer Geraden p_1 (Fig. 245), welche auf einer Nebenaxe senkrecht steht, die zweite Fläche desselben Dodekanten in p_2, welche normal zur anderen Nebenaxe ist; von den Flächen der benachbarten Dodekanten fallen immer je zwei zusammen, z. B. p_1 mit p_3, p_2 mit p_4 u. s. f. Die entstehende Pyramide ist also nur eine hexagonale, unterscheidet sich aber von der vorigen durch ihre Stellung, und heisst Pyramide zweiter Ordnung. 4) Die Haupt-

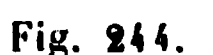
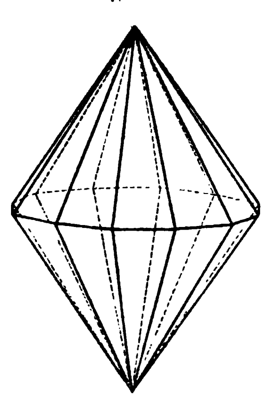


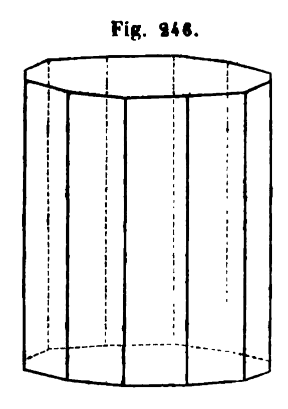
Fig. 244.



axe kann unendlich gross werden, d. h. $m = \infty$, während die Nebenaxen verschieden sind, dann resultiren 12 der Hauptaxe parallele Flächen, das dihexagonale Prisma (Fig. 246) mit dem Parameterverhältniss $a : na : \infty c$.

Fig. 245.

Fig. 246.



5) Das Gleiche kann der Fall sein bei gleichen Nebenaxen, dann liefert das Parameterverhältniss $a : a : \infty c$ nur sechs, der Hauptaxe parallele Flächen, deren Durchschnitt durch die Haupt-Symmetrieebene zusammenfällt mit demjenigen der hexagonalen Pyramide erster Ordnung durch dieselbe Fläche. Diese Form ist das hexagonale Prisma erster Ordnung, Fig. 247. 6) Es

Fig. 247.

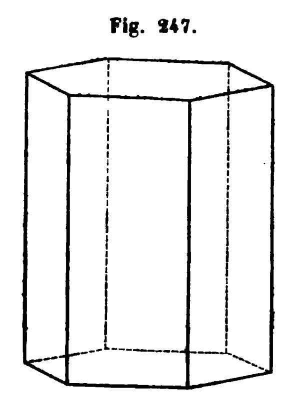
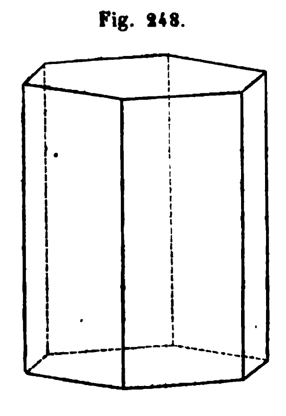


Fig. 248.



können bei unendlich grosser Hauptaxe die Nebenaxen im Verhältniss 1 : 2 stehen; dann ergeben sich ebenfalls sechs der Hauptaxe parallele Flächen, welche aber die Nebenaxen nicht in gleichem Abstande durchschneiden, sondern normal zu ihnen stehen, deren Hauptquerschnitt (Durchschnitt durch die Haupt-Symmetrieebene) gleich ist demjenigen der Pyramide zweiter Ordnung, daher dieses Prisma (Fig. 248) mit dem Parameterverhältniss $a : 2a : \infty c$ dasjenige zweiter Ordnung genannt wird. 7) Endlich kann der Coëfficient beider Nebenaxen $= \infty$ werden; das Axenverhältniss

$\infty a : \infty a : c$ liefert nur ein paralleles Flächenpaar, welches zugleich der Haupt-Symmetrieebene parallel ist, die Basis genannt. So giebt uns die Herleitung der möglichen Arten von Formen mit hexagonaler Symmetrie aus den Parameterverhältnissen ebenso sieben Arten, wie es die Ableitung aus den Indices gethan hat.

Da die drei gleichwerthigen Nebenaxen sich zu einander ganz ebenso verhalten, wie die drei Zwischenaxen, wir also S. 251 ebenso gut die Richtungen a_1 und a_2 (statt A_1 und A_2) hätten zu Nebenaxen nehmen können, so folgt, dass man die beiden Klassen von hexagonalen Pyramiden, die erste und zweite Ordnung, beliebig mit einander vertauschen, also auch eine Pyramide zweiter Ordnung zur Grundform wählen kann; alsdann werden selbstverständlich alle Pyramiden, sowie das Prisma derselben Ordnung zu solchen erster, die bisherigen Pyramiden und das Prisma erster Ordnung nunmehr zweiter.

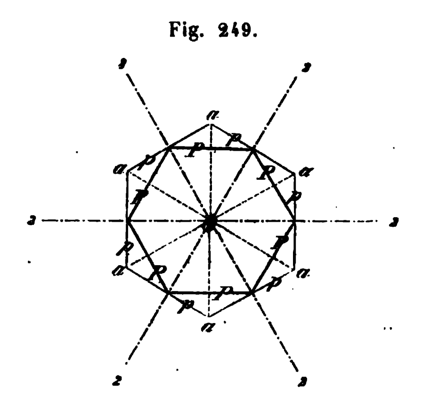
§. 58. **Auswahl der Grundform und Unterscheidung der Krystallreihen.** Bei den bisherigen Ableitungen der hexagonalen Formen haben wir zur Grundform eine solche gewählt, deren Flächen die benachbarten Hälften zweier Nebenaxen in gleichem Abstande durchschneiden, also das Parameterverhältniss $a : a : c$ haben, und sie hexagonale Pyramide erster Ordnung genannt. Solcher hexagonalen Pyramiden erster Ordnung müssen aber offenbar an demselben Krystall noch andere, wenn nicht auftreten, so doch möglich sein, da ja alle Flächen mit dem Axenverhältniss $a : a : mc$ krystallonomisch möglich sind, sobald nur m einen rationalen Werth, z. B. $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, 2, 3 u. s. f., besitzt. Ein und derselbe Krystall, oder verschiedene Krystalle einer und derselben Substanz, können also verschiedene hexagonale Pyramiden erster Ordnung zeigen; wenn wir deren Flächen uns parallel sich selbst so lange verschoben denken, bis alle einen gleich grossen Hauptquerschnitt, also genau gleich lange Nebenaxen besitzen, so sind die Hauptaxen dieser sämmtlichen Pyramiden verschieden, aber deren Länge steht in rationalem, meist sehr einfachem Verhältniss. Nennen wir die Länge der Hauptaxe irgend einer mittleren Pyramide dieser Reihe c und bestimmen wir den Zahlenwerth derselben ($a = 1$ gesetzt), wie wir es in §. 55 kennen gelernt haben, berechnen wir ebenso das Verhältniss der Hauptaxe zu den Nebenaxen aus den Kantenwinkeln auch bei den anderen Pyramiden jener Reihe, so finden wir dieses Verhältniss beispielsweise bei den flacheren Formen genau gleich der Hälfte, dem Drittel u. s. f. von dem Zahlenwerth c, bei den spitzeren Pyramiden dagegen gleich dem doppelten, dreifachen c u. s. f. (und zwar um so genauer, je genauer die Kantenwinkel der Pyramiden bestimmt waren). Bei gleichen Nebenaxen verhalten sich also die Hauptaxen dieser Pyramiden, wie $\frac{1}{3} : \frac{1}{2} : 1 : 2 : 3$ u. s. f. Wären wir bei der Ableitung des Verhältnisses, in welchem diese Formen zu einander stehen, nicht von der dritten, sondern z. B. von der zweiten ausgegangen, hätten demnach deren Hauptaxe $= c$ gesetzt, so würden wir finden, dass die Hauptaxen obiger Pyramidenreihe sich ver-

halten, wie $\frac{2}{3} : 1 : 2 : 4 : 6$; dies ist aber dasselbe Verhältniss, wie oben; also erhält man hierdurch zwar andere Ableitungszahlen, das Verhältniss, in welchem sie zu einander stehen, bleibt aber ungeändert. Die Form, von der wir hierbei ausgehen, nennen wir die Grundform oder die primäre Pyramide erster Ordnung, die anderen die abgeleiteten Pyramiden. Da das Verhältniss der Ableitungszahlen stets ungeändert bleibt, wir mögen ausgehen, von welcher Pyramide der Reihe wir wollen, so ist es theoretisch vollkommen gleichgültig, welche Pyramide wir zur primären wählen, sobald an den Krystallen der betreffenden Substanz überhaupt mehrere Pyramiden beobachtet wurden. Findet sich an denselben gewöhnlich nur eine, andere nur selten und mit kleinen Flächen ausgebildet, so wird es nicht zweifelhaft sein, dass es geeignet ist, jene zur Grundform zu wählen. Zeigt die Substanz in ihren Krystallen eine Spaltbarkeit nach einer hexagonalen Pyramide, so wird die Wahl dieser zur primären angezeigt sein, da ihre Lage alsdann stets leicht erkannt werden kann und sie durch die Cohäsionsverhältnisse gleichsam vor den übrigen ausgezeichnet ist. Wo keiner dieser Anhaltspunkte für die Auswahl der Grundform vorliegt, wird es sich empfehlen, dieselbe so zu treffen, dass die Ableitungszahlen der übrigen Pyramiden möglichst klein werden. Es wird also z. B. nicht günstig sein, in der oben als Beispiel aufgeführten Reihe die flachste der Pyramiden die primäre zu nennen, da dann die letzte, spitzeste, die grosse Ableitungszahl 12 erhält.

Darnach ist also die Wahl der Grundform in jedem einzelnen Falle, d. h. bei der Bestimmung der Formen einer einzelnen krystallisirten Substanz, lediglich conventionell, folglich auch oft für denselben Körper bei verschiedenen Autoren verschieden. In diesem Falle ist also der (irrationale) Zahlenwerth c, welcher ja die Substanz characterisirt, da mit ihm alle möglichen Krystallformen derselben gegeben sind (vergl. §. 55), und welcher das Axenverhältniss der Substanz genannt wird, bei dem einen Autor ein anderer, als bei dem anderen, aber beide Zahlenwerthe müssen in einfachem rationalen*) Verhältniss stehen, z. B. der eine genau das

*) Eine Ausnahme davon bildet natürlich der Fall, dass Einer der Autoren diejenigen Pyramiden erster Ordnung nennt, welche der Andere zu solchen zweiter Ordnung gewählt hat. Habe nach dem Ersteren die Pyramide, deren Hauptquerschnitt P Fig. 249 darstellt, das Axenverhältniss $1 : 1 : c$, also p das Verhältniss: $1 : 2 : c$; nehme nun der Zweite die Zwischenaxen Jenes zu Nebenaxen, setze also die Länge $Oa = 1$, so verhalten sich die Einheiten beider Autoren, wie leicht einzusehen, wie $1 : \sqrt{\frac{4}{3}}$, also das c des Einen zum c des Anderen, wie $1 : \sqrt{\frac{3}{4}}$, oder, bei der Wahl einer anderen Pyramide zur primären, wie ein rationaler Theil oder ein rationales Vielfaches dieser Zahl.

Fig. 249.

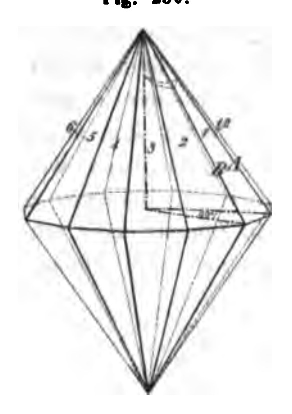


Doppelte des anderen sein. Es ist demnach leicht, die Angaben eines Beobachters auf die des zweiten zu reduciren, es sind im gegebenen Beispiel nur alle Ableitungszahlen des ersten halb so gross zu setzen.

Haben wir uns einmal für eine bestimmte Wahl der Grundform entschieden und deren Axenverhältniss bestimmt, so sind nunmehr durch die Kantenwinkel aller übrigen hexagonalen Pyramiden desselben Körpers deren absolute Ableitungszahlen m, d. h. ihr Axenverhältniss $a : a : mc$ gegeben. Dasselbe ist alsdann auch der Fall mit den Ableitungscoëfficienten aller übrigen Formen, z. B. der dihexagonalen Pyramiden $a : na : mc$, deren ja auch an den Krystallen desselben Körpers verschiedene mit anderen Zahlenwerthen von m und n vorkommen können. Da es aber hier der Bestimmung der Zahlen m und n, also zweier von einander unabhängiger Grössen, bedarf, so genügt auch nicht mehr die Messung eines Kantenwinkels, wie bei den hexagonalen Pyramiden (s. §. 55), sondern es müssen deren zwei bestimmt worden sein.

An einer dihexagonalen Pyramide, Fig. 250, stossen je zwei benachbarte Flächen an den Nebenaxen, z. B. 1 und 12, unter anderem Winkel zusammen, als die an den Zwischenaxen sich schneidenden, z. B. 1 und 2: eine dihexagonale Pyramide besitzt zweierlei Polkanten. Seien diese beiden gemessen, z. B. der Winkel, welchen die Fläche 1 mit 12 macht, $= 2\alpha$, derjenige, welchen sie mit 2 einschliesst, $= 2\beta$ gefunden, seien die beiden sich unter 30° schneidenden Symmetrieebenen, in welchen je die Polkanten A und B liegen, mit A und B bezeichnet, so sind in dem sphärischen Dreieck, welches von den Flächen 1, A und B gebildet wird, die drei Winkel gegeben, es sind 30°, α und β; hieraus sind zwei Seiten desselben zu berechnen, nämlich die Winkel, welche die Polkanten A und B selbst, mit der Hauptaxe machen. Durch diese Winkel ist das Verhältniss der Längen sowohl der Nebenaxe, als der Zwischenaxe zu der der Hauptaxe bestimmt, und es erübrigt nur noch, aus dem Verhältniss, in welchem die Fläche 1 die Nebenaxe, und die 30° damit bildende Zwischenaxe schneidet, dasjenige zu berechnen, in welchem sie dieselbe Nebenaxe und die 60° damit einschliessende zweite Nebenaxe durchschneidet, was mittelst ebener Trigonometrie geschieht. Alsdann kennen wir das Verhältniss zweier Nebenaxen und der Hauptaxe; setzen wir darin den kleineren Werth der beiden Nebenaxen $= 1$, so giebt der der anderen unmittelbar die Zahl n, und die Länge der Hauptaxe, dividirt durch die Grösse c (Hauptaxe der Grundform), die Zahl m, es ist also das Axenverhältniss $a : na : mc$ der dihexagonalen Pyramide bestimmt.

Fig. 250.



In ganz analoger Weise hat die Rechnung zu verfahren, falls statt der beiden Polkanten eine derselben und die horizontale Basiskante der dihexagonalen Pyramide der Messung unterworfen worden waren.

Es ist soeben gezeigt worden, auf welche Weise man aus zwei gemessenen Winkeln einer dihexagonalen Pyramide das Verhältniss berechnen könne, in welchem eine Fläche derselben die Haupt- und zwei benachbarte Nebenaxen durchschneidet. Gesetzt den Fall, an den Krystallen der unter-

suchten Substanz würden keine hexagonalen Pyramiden beobachtet, sondern nur dihexagonale, so müssten wir eine solche zur Bestimmung der Grundform, also des Axenverhältnisses der Substanz, benutzen. Wir würden dann diejenige (nicht vorhandene, aber krystallonomisch mögliche) hexagonale Pyramide die primäre nennen, deren Flächen die Haupt- und beide Nebenaxen in demselben Verhältniss schneiden, wie dasjenige der Haupt- und der kleineren Nebenaxe an jener dihexagonalen Pyramide ist. Finden wir durch Rechnung aus zweien ihrer Kantenwinkel deren Axenverhältniss (die kleinste Nebenaxe = 1 gesetzt) = $1 : n : c$, wo n natürlich eine rationale, c eine irrationale Zahl ist, so nennen wir die Pyramide, welche das Parameterverhältniss $1 : 1 : c$ haben würde, die Grundform, und $1 : c$ das Axenverhältniss der Substanz.

Dies letztere lässt sich ebenso, wie aus den Pyramiden erster Ordnung, auch aus denen zweiter Ordnung berechnen, nur dass alsdann die Nebenaxen und Zwischenaxen ihre Rollen vertauscht haben. Es dürfte daher überflüssig sein, auch für diesen einfachen Fall die Rechnungsmethode auseinander zu setzen.

Was endlich die übrigen Formen, die dreierlei Prismen und die Basis, betrifft, so kann man aus keiner derselben das Axenverhältniss einer Substanz berechnen, da ihre Flächen die Haupt- und Nebenaxen nicht in einem endlichen Verhältniss durchschneiden. Dieselben sind für alle hexagonal krystallisirenden Körper identisch in ihren Winkeln.

Nach dem Gesetz der Rationalität der Indices (oder der Ableitungszahlen der Parameter) sind somit sämmtliche an einem Krystall, oder an verschiedenen von einer und derselben (chemisch vollkommen identischen) Substanz gebildeten Krystallen, mögliche Formen gegeben, sobald mittelst irgend einer hexagonalen oder dihexagonalen Pyramide das Axenverhältniss $1 : c$ bestimmt worden, wobei nur noch daran erinnert werden muss, dass dasselbe, wenn auch nur sehr wenig, mit der Temperatur sich ändert, und dass es durch eine andere Zahl, jedoch durch einen rationalen Theil oder ein rationales Vielfaches, dargestellt wird, wenn eine andere der vorhandenen Formen zur primären gewählt wird. Alle an den Krystallen desselben Körpers vorkommenden Formen müssen Axenverhältnisse besitzen, welche sich aus dem Verhältniss $1 : c$ nur durch rationale (meist sehr einfache) Zahlen ableiten lassen. Die Gesammtheit aller dieser möglichen Formen (an und für sich unendlich viele, von denen jedoch nur die mit den einfachsten Ableitungszahlen gewöhnlich vorkommen) nennen wir die Krystallreihe des betreffenden Körpers, und sagen demnach von einer Form, dass sie in die Krystallreihe eines Stoffes gehöre, wenn ihr Axenverhältniss sich von demjenigen irgend einer beobachteten Krystallform desselben (also dann auch von allen übrigen) durch Rationalzahlen ableiten lässt.

Bestimmen wir nunmehr von einer anderen, von der vorigen chemisch verschiedenen Substanz die relativen Dimensionen der (selbstverständlich ebenfalls willkürlich ausgewählten) Grundform, und finden deren Axenverhältniss = $1 : c'$, so ergiebt uns ganz allgemein die Vergleichung der Zahlen c

und c' für zwei chemisch verschiedene Körper, dass dieselben in keiner Beziehung zu einander, keinenfalls in rationalem Verhältniss zu einander stehen. Allerdings kann der Zufall und eine geeignete Wahl der Grundform es herbeiführen, dass c und c' ausserordentlich nahe ein einfaches rationales Verhältniss haben, dass dies aber nicht absolut der Fall ist, lehrt eine einfache Betrachtung: die Zahl c ist wegen der physikalischen Einaxigkeit des ersten Körpers mit der Temperatur stetig variabel, die Zahl c' des zweiten Körpers ebenfalls, aber in ganz anderem Verhältnisse, da seine thermische Ausdehnung natürlich eine andere ist, folglich ändert sich das Verhältniss $c : c'$ mit der Temperatur stetig, es kann also keine einfache rationale Zahl sein. Hieraus ersieht man, dass die beiden Krystallreihen zweier verschiedener Substanzen völlig getrennt sind, wenn auch zufällig eine Form der einen in ihren Winkeln grosse Aehnlichkeit mit einer der anderen Reihe aufweisen sollte.

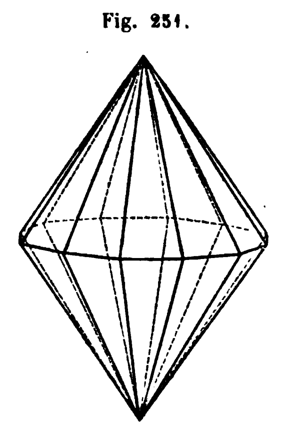
Es giebt also ebenso viele, scharf von einander durch Irrationalität ihres Verhältnisses getrennte, Krystallreihen im hexagonalen Systeme, als es hexagonal krystallisirende Substanzen giebt, während die regulären Formen sämmtlich nur eine Krystallreihe bildeten, weil sie alle rational von einander ableitbar sind, also auch alle an jedem regulär krystallisirenden Stoffe auftreten können.

Im Folgenden werden nun die Formen einer beliebigen hexagonal-holoëdrischen Krystallreihe und die Art ihrer Combinationen beschrieben, und alles hier Gesagte gilt natürlich für jede andere Krystallreihe desselben Systems, nur mit dem Unterschiede, dass alsdann die Winkel der pyramidalen Gestalten andere, das Axenverhältniss der Grundform ein anderes ist.

1) Holoëdrische Formen des hexagonalen Systems.

§. 59. **Beschreibung und Bezeichnung der holoëdrischen hexagonalen Formen.** 1) Die dihexagonalen Pyramiden Fig. 251 $(\xi h k l)$ durchschneiden die Axen in dem Verhältniss $a : na : mc$; fügen wir hierzu noch das Verhältniss, in welchem die dritte Nebenaxe geschnitten wird, so ergiebt sich aus dem S. 254 bewiesenen Satze, dass $\xi = h - k$, leicht, dass dies $= \frac{n}{n-1}$ ist; daher ist das Weiss'sche Zeichen einer solchen Form

Fig. 251.



$$(a : na : \frac{n}{n-1} a : mc).$$

Nach der abgekürzten Naumann'schen Bezeichnungsweise bedeutet P eine Pyramide, und wird vor dieses Zeichen die Ableitungszahl der Hauptaxe, nach derselben diejenige der zweiten Nebenaxe (falls dieselbe von 1 verschieden ist)

gesetzt, also ist das Zeichen der dihexagonalen Pyramiden:

$$m P n.$$

Die dihexagonale Pyramide besitzt dreierlei Kanten, nämlich die 12 Basiskanten,*) und je 12 stumpfere und ebenso viele schärfere Polkanten, welche mit einander abwechseln. Eine solche Form mit 24 genau gleichen Polkanten ist krystallonomisch unmöglich, weil bei derselben die Ableitungszahl $n = \sqrt{2} \cdot \sin 75^0 = 1,366 \ldots$, also eine irrationale Zahl sein würde. Ist die Zahl n kleiner, als $1,366\ldots$, z. B. $\frac{5}{4}$, so sind diejenigen Polkanten die stumpferen, welche vom Pol der Hauptaxe nach denen der Zwischenaxen herablaufen; in diesem Falle ähnelt die Pyramide um so mehr einer hexagonalen Pyramide erster Ordnung, je weniger n von 1 verschieden ist; in dem Grenzfall, dass n seinen kleinsten Werth 1 annimmt, ist der Winkel der bezeichneten Polkanten $= 180^0$, d. h. je zwei in einer solchen Polkante an einander stossende Flächen, also die Flächen eines Dodekanten, fallen in eine Ebene, es resultirt eine hexagonale Pyramide erster Ordnung als untere Grenzgestalt jener Reihe von dihexagonalen. Ist dagegen n grösser, als $1,366\ldots$, z. B. $\frac{3}{2}$, so sind die nach den Nebenaxen herablaufenden Polkanten die stumpferen, und zwar um so stumpfer, je mehr n sich der 2 nähert. Sobald $n = 2$ wird, bilden die Basiskanten der Pyramide mit den Nebenaxen rechte Winkel (vergl. S. 256), also werden die zuletzt bezeichneten Polkantenwinkel 180^0, d. h. zwei an solchen zusammenstossende, benachbarten Dodekanten angehörige Flächen fallen in eine Ebene, es entsteht eine hexagonale Pyramide zweiter Ordnung als zweite Grenzgestalt derselben Reihe von dihexagonalen Pyramiden. Die sämmtlichen möglichen dihexagonalen Pyramiden, welche gleiche Ableitungszahl m, aber verschiedene n besitzen, bilden also eine Reihe, deren Endglieder einerseits die hexagonale Pyramide erster Ordnung, andererseits diejenige zweiter Ordnung mit demselben m, sind. Da die Flächen aller Glieder dieser Reihe, ebenso wie die Grenzformen, die Haupt- und eine Nebenaxe in demselben Verhältniss, $mc : 1$, schneiden, so müssen die einander entsprechenden sämmtlich derselben Graden, welche jene beiden Axen in dem bezeichneten Verhältniss schneidet, parallel sein, also in einer Zone liegen, d. h. die Flächen der dihexagonalen Pyramiden liegen, mit parallelen Combinationskanten, zwischen denen derjenigen Pyramide erster und derjenigen zweiter Ordnung, mit welchen beiden sie gleiche Ableitungszahl m haben (s. u. bei Pyramiden zweiter Ordnung und deren Combinationen). Die dihexagonalen Pyramiden einer solchen Reihe haben demnach gleiche Richtung derjenigen Polkanten, welche nach den Nebenaxen herablaufen; wenn also zwei derselben in Combination treten, so werden diese Polkanten der einen durch die Flächen der anderen zugeschärft.

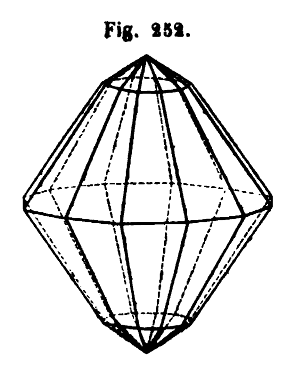
Mehrere dihexagonale Pyramiden mit gleichem n, aber verschiedenem m, haben genau gleiche Hauptquerschnittsfigur; die eine erscheint also mit

---

*) So genannt, weil sie sämmtlich parallel der Basis, d. h. horizontal, laufen.

der anderen combinirt, indem sie deren 6 + 6kantige Polecke je mit 12 Flächen derart zuspitzt, dass die entstehenden Combinationskanten horizontal laufen, Fig. 252.

Fig. 252.



Die dihexagonale Pyramide stellt, ebenso wie im regulären Systeme das Hexakisoctaëder, den allgemeinsten Fall einer hexagonalen Krystallgestalt dar, ist also der allgemeine Repräsentant aller anderen, welche gleichsam nur specielle Fälle desselben bilden.

2) Die hexagonale Pyramide erster Ordnung ist derjenige specielle Fall der dihexagonalen, in welchem n den Werth 1 hat. Dieselbe ist also zu bezeichnen durch die Indices mit $(0hhl)$, durch die Multiplen der Parameter:

$$(a : a : \infty a : mc).$$

Hieraus ergiebt sich unmittelbar das abgekürzte Naumann'sche Zeichen (da die Ableitungszahl 1 weggelassen wird) als

$$mP.$$

Unter den verschiedenen Pyramiden einer Krystallreihe wird nach S. 259 besprochenen Grundsätzen eine zur primären gewählt; diese erhält, da ihre Ableitungszahl m nunmehr auch $= 1$ ist, das Zeichen P. Bei den stumpferen abgeleiteten Pyramiden erster Ordnung ist alsdann m ein echter

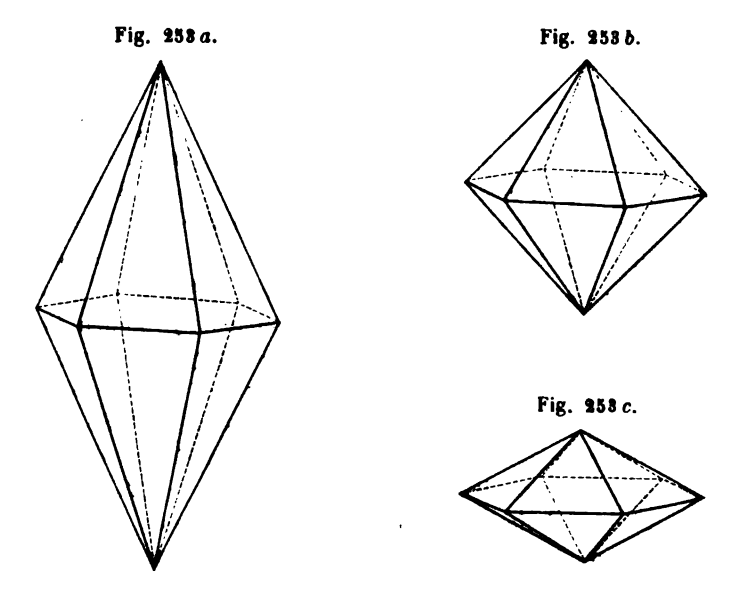


Fig. 253 a. Fig. 253 b. Fig. 253 c.

Bruch, sie besitzen also die Zeichen: $\frac{2}{3}P$, $\frac{1}{2}P$, $\frac{1}{4}P$ u. dergl., während die spitzeren eine grössere Ableitungszahl der Hauptaxe, als die Einheit, be-

sitzen, also beispielsweise mit $\frac{3}{2}P$, $2P$, $3P$ u. s. f. bezeichnet werden. Fig. 253 a, b und c stellen drei Pyramiden einer Reihe dar, deren Hauptaxen (bei gleich grossen Nebenaxen) sich wie $1 : 2 : 4$ verhalten, also $\frac{1}{2}P$, P, $2P$, oder wenn die erste resp. die letzte zur primären gewählt wird, P, $2P$, $4P$, resp. $\frac{1}{4}P$, $\frac{1}{2}P$, P, zu bezeichnen sind. Die Miller'sche Bezeichnungsweise der Grundform ist $(0\,1\,1\,1)$, der stumpferen Pyramiden $(0\,h\,h\,l)$, wobei $h < l$, und der spitzeren dasselbe, wobei aber $h > l$. Das Weiss'sche Zeichen endlich der primären Pyramide ist:

$$(a : a : \infty a : c),$$

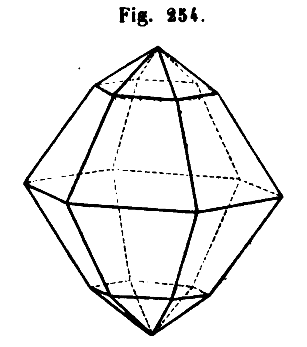
der abgeleiteten

$$(a : a : \infty a : mc),$$

und sind dieselben stumpfer, wenn $m < 1$, spitzer als jene, wenn $m > 1$.

Die hexagonale Pyramide besitzt 12 (6 obere und 6 untere) gleiche Polkanten, sowie sechs davon verschiedene Basiskanten mit unter einander gleichen Winkeln.

Fig. 254.

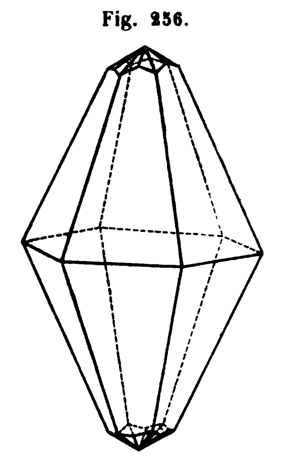


Da der Hauptquerschnitt aller Pyramiden erster Ordnung dasselbe Hexagon mit Winkeln von 120° ist, so erscheinen je zwei derselben combinirt so, dass die stumpfere die Polecken der spitzeren sechsflächig mit horizontalen Combinationskanten zuspitzt, oder diese die Basiskanten jener zuschärft, s. Fig. 254.

Eine dihexagonale Pyramide mit einer hexagonalen combinirt, erscheint als Zuschärfung von deren Polkanten, Fig. 255, wenn beide gleiche

Fig. 255.

Fig. 256.

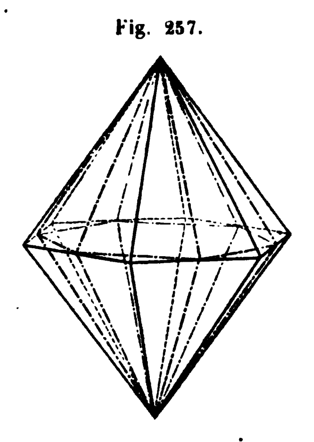


Ableitungszahl m haben, als zwölfflächige Zuspitzung der Polecken, Fig. 256, wenn erstere ein kleineres m besitzt.

3) Die hexagonale Pyramide zweiter Ordnung ist derjenige

specielle Fall der dihexagonalen, in welchem $n = 2$ ist. Ihr horizontaler Querschnitt hat dieselbe Form eines gleichwinkeligen Hexagons, wie der der Pyramiden erster Ordnung, erscheint aber gegen diesen um 30° in seiner Ebene gedreht, s. Fig. 257. Das Parameterverhältniss dieser Art von Gestalten ist also

Fig. 257.



$$a : 2a : - 2a : mc.$$

Fig. 257 stellt eine Pyramide erster Ordnung (strichpunktirt), umhüllt von derjenigen zweiter Ordnung, welche dieselbe Ableitungszahl m besitzt, Fig. 257 a den Hauptquerschnitt derselben beiden Pyramiden (p erster Ordnung, p' zugehörige zweiter Ordnung) dar. Da eine Fläche der Pyramide zweiter Ordnung die Haupt- und eine Nebenaxe in demselben Verhältniss schneidet, wie eine Polkante, also wie zwei in einer solchen zusammenstossende Flächen der zugehörigen Pyramide erster Ordnung, so liegt sie mit zwei solchen Flächen in einer Zone, d. h. sie stumpft die Polkante der Pyramide erster Ordnung gerade ab. Es stellt demnach Fig. 258 die Combination einer Pyramide erster Ordnung mit der ihr zugehörigen zweiter Ordnung dar. Dieselben sind abgekürzt zu bezeichnen mit mP und $mP2$ (das allgemeine Zeichen der Pyramiden zweiter Ordnung); wenn $m = 1$, d. h. die erstere zur primären genommen worden ist, erhält die-

Fig. 257 a.

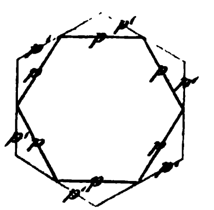


Fig. 258.

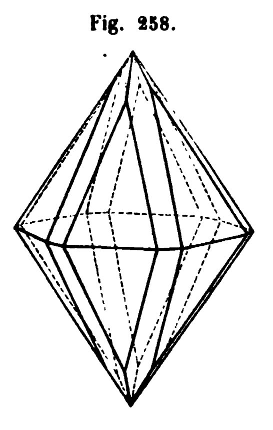
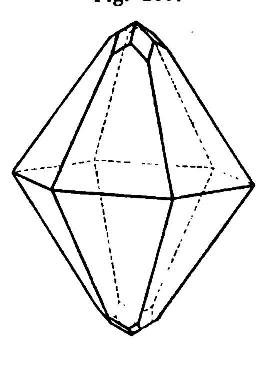


Fig. 259.



jenige, welche ihre Polkanten abstumpft, das Zeichen $P2$, und wird die primäre Pyramide zweiter Ordnung genannt. Dieselbe ist stumpfer, d. h. hat schärfere Basis- und stumpfere Polkanten, als die zugehörige erster Ordnung. Ihr Weiss'sches Zeichen ist:

$$(a : 2a : -2a : c),$$

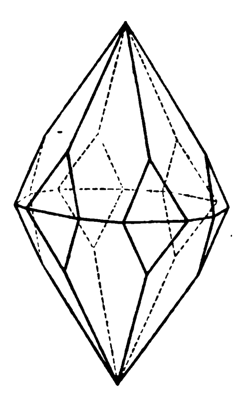
das Miller'sche (1 2 1 1), dasjenige der Pyramiden zweiter Ordnung überhaupt:

$$(k h k l),$$

worin $h - k = k$, d. h. $h = 2k$ ist.

In den Combinationen zweier Pyramiden verschiedener Ordnung, welche nicht einander zugehörige sind, erscheint diejenige zweiter Ordnung, wenn sie einen kleineren Ableitungscoëfficient m hat, als die der ersten Ordnung, an dieser als sechsflächige Zuspitzung der Polecken, die Zuspitzungsflächen auf die Kanten gerade aufgesetzt, Fig. 259. Ist dagegen m grösser, als das der Pyramide erster Ordnung, so erscheint jene als Zuschärfung der Basisecken von dieser, die Zuschärfungsflächen auf die Polkanten aufgesetzt. In dem in Fig. 260 dargestellten speciellen Falle, dass die Combinationskanten einer Fläche der Pyramide zweiter Ordnung mit einer der Pyramide erster Ordnung der nächsten Polkante der letzteren parallel sind, ist das m der Pyramide zweiter Ordnung doppelt so gross, als das der ersten, also ihre Zeichen z. B. P; $2P2$.*)

Fig. 260.

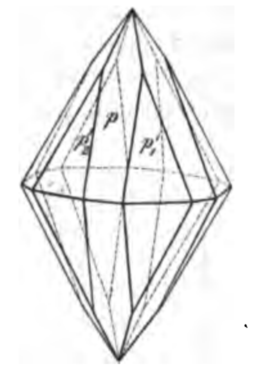


Einen weiteren speciellen Fall stellt Fig. 261 dar, in welchem die Combinationskanten der Pyramide zweiter Ordnung p^1 mit derjenigen erster Ordnung p den Höhenlinien der Dreiecksflächen der letzteren parallel sind, so dass p die Polkanten der Pyramide zweiter Ordnung gerade abstumpft. Dadurch ist deren Zeichen $mP2$ bestimmt und auf folgende Art der Zahlenwerth von m zu finden: Das Axenverhältniss der mit p^1_1 bezeichneten Fläche ist $(2a : a : 2a : mc)$, der Fläche p^1_2 $(a : 2a : -2a : mc)$, daraus folgen deren Indices zu $(m, 2m, m, 2)$ und $(2m, m, \overline{m}, 2)$ und die Indices der Zone beider $[1, \overline{2}, \overline{3}m]$; der Tautozonalitätsgleichung mit diesen Werthen müssen nun die Indices der primären Pyramide $p = (1\,1\,0\,1)$ genügen, also muss

$$1 = 3m, \quad m = \tfrac{1}{3}$$

und das Zeichen von $p^1 = \frac{1}{3}P2$ sein.

Fig. 261.



Die Combinationen der Pyramiden zweiter Ordnung mit dihexagonalen sind analog denen der

*) Dass dem so ist, beweist man dadurch, dass die Fläche dieser Pyramide zweiter Ordnung, deren Indices (1 1 2 1), abgekürzt (1 2 1), der Gleichung der Tautozonalität genügt, wenn dieselbe aus zwei Pyramidenflächen der ersten Ordnung (1 0 1) und (1 1 1) abgeleitet wird, denn das Symbol dieser Zone ist $[\overline{1}\,0\,1]$.

Pyramiden erster Ordnung, nur mit den Unterschieden, welche in der Verschiedenheit der Stellung von beiderlei Formen begründet sind.

4) Das **dihexagonale Prisma** ist diejenige dihexagonale Pyramide, deren Ableitungszahl $m = \infty$ ist; es besitzt denselben horizontalen Querschnitt, wie diejenigen dihexagonalen Pyramiden, welche mit jenem gleiches n haben; seine Flächen sind aber sämmtlich der Hauptaxe parallel, also vermag diese Form für sich allein den Raum nicht abzuschliessen. Fig. 262 stellt dieselbe in Combination mit der Basis dar.

Fig. 262.

Seine verschiedenen Zeichen ergeben sich nunmehr ganz von selbst als:

$$(\xi h k 0) = \infty P n$$
$$= (a : na : \frac{n}{n-1} a : \infty c).$$

Das dihexagonale Prisma hat 12 Kanten, deren sechs stumpfer, die sechs alternirenden schärfer sind. Ein dihexagonales Prisma mit 12 **gleichen** Kanten ist aus demselben Grunde krystallonomisch unmöglich, wie eine gleichkantige dihexagonale Pyramide.

Je nachdem der Zahlenwerth von n näher an 1 oder an 2 liegt, ähnelt das dihexagonale Prisma mehr dem einen oder dem anderen der beiden folgenden Formen, dem Prisma erster Ordnung oder demjenigen zweiter Ordnung. Seine Flächen liegen zwischen den Flächen dieser beiden letzterwähnten Formen, und sie bilden Zuschärfungen der Kanten sowohl des einen, wie des anderen.

Die dihexagonalen Pyramiden mit gleichem n sind um so spitzer, sie nähern sich um so mehr der verticalen Stellung der Flächen, je grösser m ist; das Endglied einer solchen Reihe ist das dihexagonale Prisma mit **demselben** Werth von n; dieses ist zugleich identisch für alle hexagonalen Substanzen, weil seine Winkel nicht von dem Verhältniss $1 : c$, sondern nur von der rationalen Zahl n, welche bei allen jenen Körpern verwirklicht sein kann, abhängt. Die Combinationskanten der dihexagonalen Pyramiden mit dem Prisma, dessen n dasselbe ist, liegen horizontal.

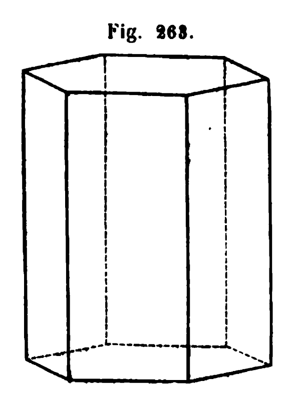


Fig. 263.

5) Das **hexagonale Prisma erster Ordnung** ist die dihexagonale Pyramide mit den besonderen Werthen $m = \infty$ und $n = 1$, oder die hexagonale Pyramide erster Ordnung, deren m den Grenzwerth ∞ angenommen. Es ist also eine Pyramide letzterer Art, mit verticalen, der Hauptaxe parallelen Flächen, welche Form für sich den Raum nicht umschliesst. Diese Gestalt ist in Fig. 263 in Combination mit

der Basis dargestellt. Da ihr Axenverhältniss $1 : 1 : \infty$ gar keine Variation mehr zulässt, so giebt es nur ein hexagonales Prisma erster Ordnung, dessen Kantenwinkel 120°, identisch für alle hexagonal krystallisirenden Körper, und zu bezeichnen:

$$\infty P = (01\bar{1}0)$$
$$= (a : a : \infty a : \infty c).$$

Dasselbe erscheint in Combinationen an allen hexagonalen Pyramiden

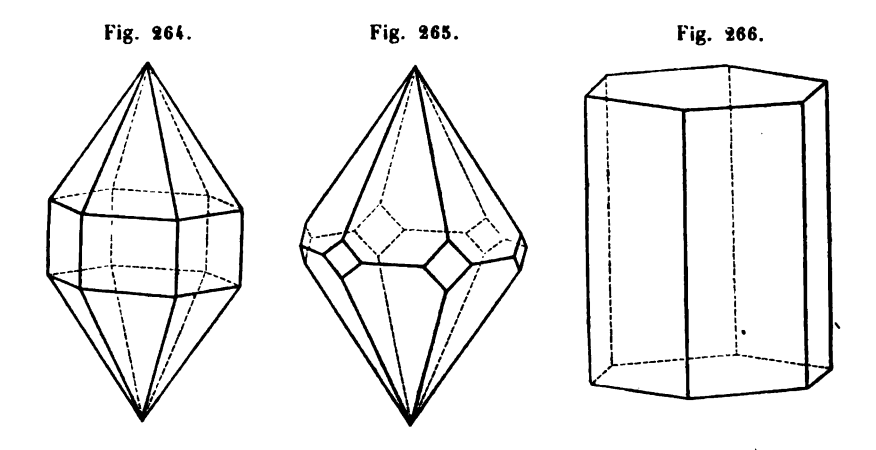


Fig. 264. Fig. 265. Fig. 266.

derselben Ordnung als gerade Abstumpfung der Basiskanten (Fig. 264), an denen der anderen Ordnung als gerade Abstumpfungen der Basisecken (Fig. 265).

6) Das hexagonale Prisma zweiter Ordnung $= \infty P2 = (\bar{1}2\bar{1}0)$ $= (a : 2a : -a : \infty c)$, Fig. 266, ist die Grenzform der hexagonalen Pyramiden zweiter Ordnung für den Fall, dass $m = \infty$, es kann also auch nur eine einzige solche Gestalt geben, welche sich von der vorigen nur durch ihre Stellung (sie erscheint um 30° gegen jene gedreht) unterscheidet. Die Figg. 264 und 265 können auch als Combinationen dieses Prismas mit einer Pyramide zweiter Ordnung, resp. erster Ordnung dienen, wenn man die Neben- und Zwischenaxen vertauscht, d. h. jene Gestalten sich um die Hauptaxe, und zwar um 30° gedreht denkt.

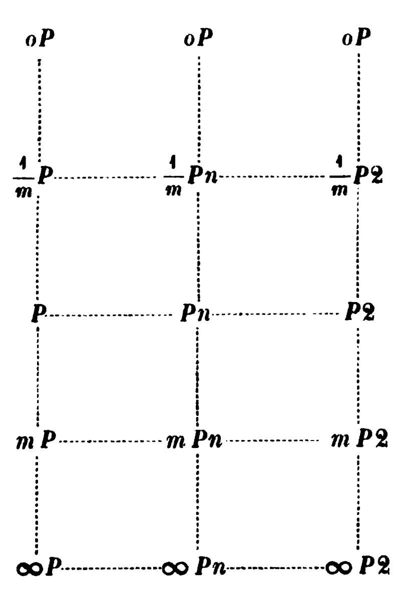
7) Die hexagonale Basis, die Haupt-Symmetrieebene selbst, ist die untere Grenzform aller hexagonalen Pyramiden, welche um so stumpfer werden, sich in der Lage ihrer Flächen um so mehr derselben nähern, als die Ableitungszahl m sich der Null nähert. Ist $m = 0$, so sind die Polkantenwinkel $= 180°$, die Flächen der Pyramide fallen in eine einzige Horizontalebene zusammen. Daher bezeichnet Naumann die Basis mit oP. Ihre Bezeichnungen nach Weiss und Miller sind:

$$(\infty a : \infty a : \infty a : c) = (0001).$$

Diese Form, deren es natürlich auch nur eine einzige giebt, kann noch weniger für sich allein auftreten, als die Prismen, da sie den Raum nur in

einer Richtung (von oben nach unten) abschliesst. Die Gestalt ihres Umrisses in den Combinationen ist entweder diejenige eines Hexagons oder eines gleichwinkeligen Zwölfecks (zwei um 30° gegen einander gedrehte Sechsecke), oder eines Dihexagons mit sechs schärferen und sechs stumpferen Winkeln.

Den Zusammenhang aller dieser soeben beschriebenen holoëdrischen Gestalten einer hexagonalen Krystallreihe kann man am besten in nachfolgendem Schema übersehen:



Die vorderste Verticalreihe ist diejenige der Pyramiden erster Ordnung, beginnend mit der flachsten, der Basis; zwischen dieser und der Grundform P liegen alle diejenigen, deren Ableitungszahl ein echter Bruch (allgemein durch $\frac{1}{m}$ bezeichnet) ist, zwischen P und dem Prisma erster Ordnung ∞P liegen sämmtliche spitzeren Pyramiden, dem Endglied der Reihe um so näher stehend, je grösser m. Die letzte Verticalreihe wird in ganz gleicher Weise von den Pyramiden zweiter Ordnung gebildet. Zwischen beiden befindet sich die Reihe der durch ihr m verschiedenen dihexagonalen Pyramiden mit gleichem n, welche sämmtlich zwischen der Basis und demjenigen dihexagonalen Prisma liegen, welches dasselbe n besitzt. Solcher Reihen giebt es natürlich so viele, als verschiedene Zahlenwerthe von n vorkommen; in dem Schema ist nur die allgemeine Reihe mit der unbestimmten Zahl n als Repräsentant derselben aufgeführt. Jede dihexagonale Pyramide ist nun zugleich ein Glied einer Horizontalreihe, welche sämmtliche dihexagonale Pyramiden mit gleichem m, und als Endglieder die erste und zweite Pyramide mit demselben m umfasst. So liegen z. B. alle dihexagonalen Pyramiden mit dem Zeichen Pn zwischen der primären

Pyramide erster und der zweiter Ordnung, in der Lage ihrer Flächen um so näher an den ersteren, je weniger sich n von 1 unterscheidet, dagegen um so näher an die letztere, je mehr sich n der 2 nähert. Endlich liegen auch alle unendlich spitzen dihexagonalen Pyramiden, d. h. die dihexagonalen Prismen, zwischen dem ersten und dem zweiten Prisma, und bilden eine fortlaufende Reihe von $n = 1$ bis $n = 2$.

Sowohl die Flächen der in einer Verticalreihe stehenden, als der in Horizontalreihen vereinigten Krystallformen bilden mit den entsprechenden Flächen aller Formen derselben Reihe je eine krystallographische Zone, schneiden sich also in parallelen Kanten.

§. 60. **Beispiele:** Chlorcalcium $= CaCl^2 + 6$ aq.; $a : c = 1 : ?$ Gewöhnlich nur ∞P, oP. Doppelbrechung —,

$$\omega = 1{,}417, \quad \varepsilon = 1{,}393 \text{ Gelb.}$$

Molybdänsulfid (nat. Molybdänglanz) $= MoS^2$. Die natürlichen Krystalle zeigen meist nur oP und ∞P, und sind tafelartig nach der ersteren Fläche. Spaltbarkeit nach oP vollkommen.

Nat. Nephelin $= (Na,K)^2\,Al^2\,Si^2\,O^8$. $a : c = 1 : 0{,}8390$. Die Krystalle gewöhnlich prismatisch ausgebildet: ∞P, oP und oft P als Abstumpfung der Combinationskante der beiden ersten Formen. Doppelbrechung negativ, schwach, Brechungsexponenten: $\omega = 1{,}539$, $\varepsilon = 1{,}534$ Gelb.

Fig. 267.

Natürl. Beryll (die grün gefärbten »Smaragd«) $= Be^3\,Al^2\,Si^6\,O^{18}$. $a : c = 1 : 0{,}4990$. Häufig nur ∞P, oP in prismatischer Ausbildung, nicht selten auch die flächenreichere Combination Fig. 267, $m = \infty P$, $o = P$, $c = oP$, $o^2 = 2P$, $q = 2P2$, $s = 3P\frac{3}{2}$. Von diesen Flächen liegen die dihexagonale Pyramide s, sowie q in der Zone einer Fläche von o und einer seitlich anstossenden m. Doppelbrechung negativ, schwach. Brechungsexponenten für die Linien:

	ω	ε
B:	1,5663	1,5616
D:	1,5703	1,5659
E:	1,5743	1,5697

(Schrauf, Sitzber. d. Wiener Akad. 42, 120). Häufig durch Spannungen inhomogen und daher scheinbar optisch zweiaxig (vergl. §. 23).

2) Hemiëdrische Formen des hexagonalen Systems.

§. 61. **Mögliche Arten der Hemiëdrie.** In gleicher Weise, wie die verschiedenen Arten von möglicher Hemiëdrie im regulären System zunächst an dem allgemeinsten Repräsentanten aller Formen, dem Hexakisoctaëder, entwickelt werden mussten, weil sich daraus ihr Einfluss auf die übrigen Gestalten gesetzmässig ergiebt, so hat das Gleiche auch im hexagonalen System, dessen allgemeinste Form die dihexagonale Pyramide ist, zu geschehen.

Denken wir uns den Raum durch diejenigen drei senkrechten Symmetrieebenen des Hexagonalsystems, in welchen die Zwischenaxen liegen, in sechs Sechstel zerlegt, so liegen in jedem solchen Sechstel vier Flächen der dihexagonalen Pyramide, zwei obere und zwei darunter, z. B. 1, 2, 13 und 14 Fig. 268, welche eine Symmetrieaxe, nämlich die Nebenaxe a, in demselben Abstand 1 schneiden. Wir werden nun offenbar nur dann eine hemiëdrische Form erhalten, wenn wir die Hälfte aller Flächen so auswählen, dass in jedem Sechstel zwei Flächen von jenen vier in gleicher Weise genommen werden, weil nur dann jede der sechs Hälften der Nebenaxen von gleich viel Flächen gleichartig geschnitten wird, und nur dann das Gleiche stattfindet auch mit den beiden Hälften der Hauptaxe (vergl. die Definition der Hemiëdrie §. 38). Die Auswahl von zwei Flächen unter jenen vier ist aber nur auf dreierlei Art möglich, nämlich a) die einer oberen und einer anders geneigten unteren, z. B. 1 und 14 Fig. 269;

Fig. 268.

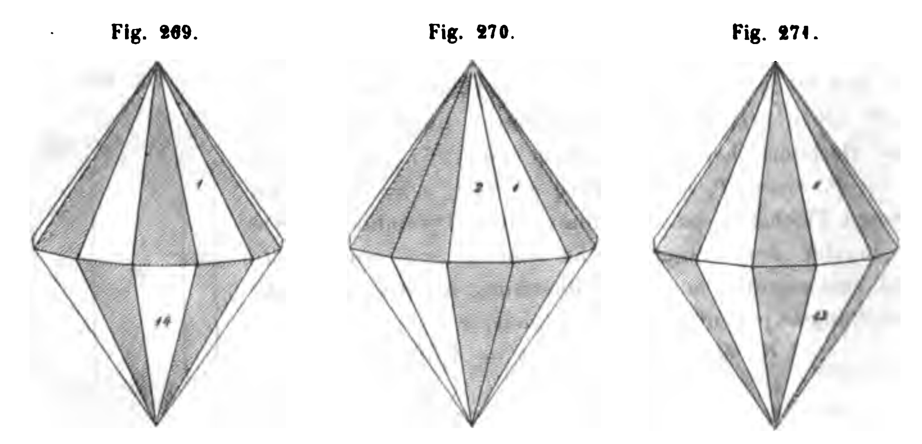


Fig. 269. Fig. 270. Fig. 271.

oder b) die beider oberen (oder beider unteren), wie 1 und 2 Fig. 270; oder endlich c) zweier über einander gelegener, z. B. 1 und 13 Fig. 271.

Es sind demnach, ebenso wie im ersten Krystallsystem, drei verschiedene Arten von Hemiëdrie möglich, welche, nach gewissen, denselben angehörigen Formen, folgende Namen führen:

a) die trapezoëdrische,
b) die rhomboëdrische,
c) die pyramidale Hemiëdrie.

a) Die trapezoëdrische Hemiëdrie.

§. 62. 1) Die **trapezoëdrisch-hemiëdrischen Formen der dihexagonalen Pyramiden** entstehen durch Auswahl von 12 alternirend oben und unten gelegenen Flächen, Fig. 272. Aus jeder derselben resultiren demnach zwei Hemiëder, aus den weiss gelassenen Flächen die in Fig. 273 *a*, aus den schwarz bezeichneten die in Fig. 273 *b* dargestellte Gestalt, welche

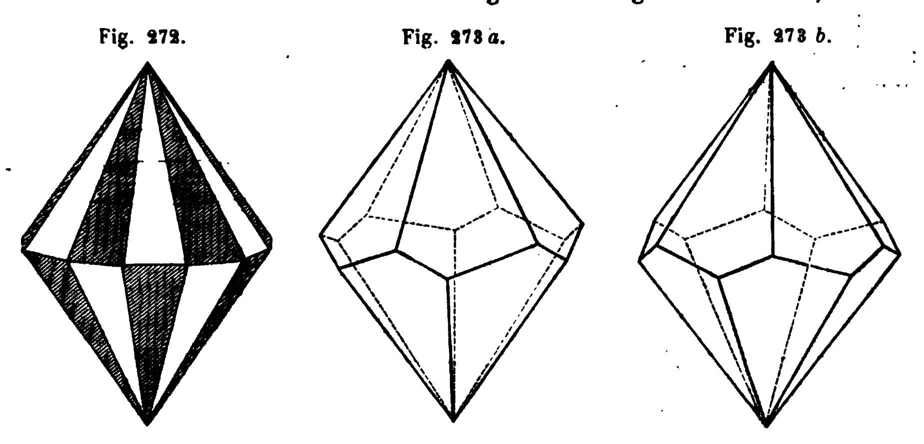


Fig. 272. Fig. 273 *a*. Fig. 273 *b*.

nach der Trapezform, die deren Flächen bei gleicher Centraldistanz besitzen, **hexagonale Trapezoëder** heissen. Die beiden aus einer dihexagonalen Pyramide entstehenden Trapezoëder besitzen keine Symmetrieebene und sind daher **enantiomorph**, sie können durch keine Drehung zur Deckung gebracht werden. Wir nennen dasjenige von beiden, welches dadurch entsteht, dass von den vier Flächen des dem Beobachter zugekehrten Sechstels der dihexagonalen Pyramide, welches zwischen den benachbarten Hälften zweier Nebenaxen liegt, die **rechte obere** und linke untere bleiben, die beiden anderen verschwinden, das **rechte** Trapezoëder, das entgegengesetzte, in welchem also die **linke obere** Fläche jenes Sechstels auftritt, das **linke**, und bezeichnen dieselben mit

$$\frac{mPn}{2}\ r \text{ und } \frac{mPn}{2}\ l \text{ nach Naumann,}$$

$$\tfrac{1}{2}\left(a : na : \frac{n}{n-1}\,a : mc\right) \text{ nach Weiss,}$$

$$\varkappa''\ (\xi h k l) \text{ nach Miller.}$$

Die Trapezoëder besitzen je 12 gleiche Polkanten und 12 **Mittelkanten** (zum Unterschied von den Basiskanten so genannt, weil sie nicht horizontal sind), von denen sechs stumpfere (bei den rechten Trapezoëdern von rechts oben nach links unten, bei den linken umgekehrt laufend) *) und sechs schärfere sind.

*) Wenn, wie in den Figg. 272 und 273 $n = \frac{3}{2}$ (also $> 1{,}366$), folglich die nach den Nebenaxen herablaufenden Polkanten die stumpferen sind; ist dagegen $n < 1{,}366$, so ist das Verhältniss der Mittelkanten das umgekehrte.

2) Die hexagonalen Pyramiden erster Ordnung, demselben Gesetz der Hemiëdrie unterworfen, Fig. 274, liefern Formen, welche sich geometrisch nicht von den holoëdrischen unterscheiden, da von den zwei Flächen der dihexagonalen Pyramide, welche hier in eine Ebene fallen, eine zur hemiëdrischen Form gehört, also diese Ebene, und ebenso alle 11 anderen an dieser auftreten müssen.

3) Das Gleiche ist der Fall mit den hexagonalen Pyramiden zweiter Ordnung, welche, wie Fig. 275 zeigt, durch diese Hemiëdrie unverändert bleibt.

Fig. 274. Fig. 275. Fig. 276.

4) Die dihexagonalen Prismen, Fig. 276,

5) das hexagonale Prisma erster Ordnung, Fig. 277,

6) das hexagonale Prisma zweiter Ordnung, Fig. 278, und

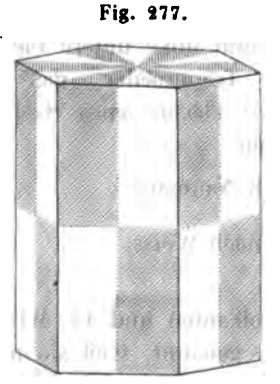
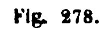


Fig. 277.



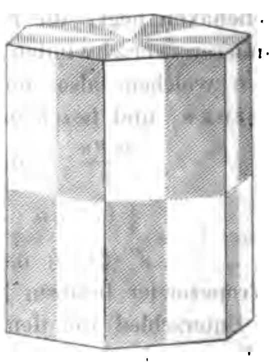


Fig. 278.

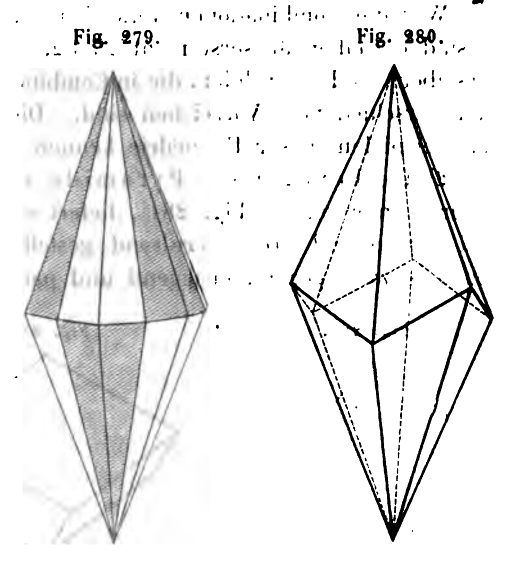
7) die Basis, s. Fig. 276 bis 278, liefern in Folge dessen ebenfalls hemiëdrische Formen dieser Abtheilung, welche vollkommen mit den holoëdrischen übereinstimmen.

Eine Substanz, welche in dieser Abtheilung des hexagonalen Systems krystallisirte, ist bis jetzt nicht aufgefunden worden. Da sich die Krystall-

formen derselben nur in den dihexagonalen Pyramiden von den holoëdrischen unterscheiden, so würde eine solche Substanz, falls keine jener flächenreichsten Formen, sondern etwa nur hexagonale Pyramiden und Prismen an deren Krystallen beobachtet würden, sich geometrisch nicht von einer holoëdrisch krystallisirenden unterscheiden, wohl aber physikalisch, indem dieselbe nach Analogie aller anderen einaxigen und enantiomorph hemiëdrischen Körper in der Richtung der Hauptaxe Circularpolarisation zeigen würde.

b) Die rhomboëdrische Hemiëdrie.

§. 63. 1) Die dihexagonale Pyramide liefert nach dem Gesetz der rhomboëdrischen Hemiëdrie, durch Beibehaltung der neben einander liegenden Flächenpaare in allen alternirenden Dedekanten, und Verschwindenlassen der anderen, Fig. 279, je zwei Hälften, welche die Gestalt Fig. 280 besitzen, und zwar bilden die weiss gelassenen Flächen diese Form genau in der in letzterer Figur gezeichneten Stellung, während die zweite Hälfte eine genau gleiche, aber um 180° (oder 60°, was zu demselben Resultat führt) gedrehte Gestalt liefert. Eine solche Krystallform heisst, weil bei gleicher Centraldistanz ihre Flächen die Gestalt ungleichseitiger Dreiecke (Skalene) haben, hexagonales Skalenoëder, und unterscheidet man die beiden, aus einer dihexagonalen Pyramide sich ableitenden Hemiëder als positives und negatives Skalenoëder, welche Unterscheidung auch in der Naumann'schen Bezeichnung *)


Fig. 279. Fig. 280.

$$+\frac{mPn}{2} \text{ und } -\frac{mPn}{2}$$

ihren Ausdruck findet. Die Miller'schen und Weiss'schen Zeichen der Skalenoëder sind:

$$\varkappa\,(\xi h k l) \text{ und } \tfrac{1}{2}\,(a : na : \tfrac{n}{n-1}\,a : mc)$$

Selbstverständlich ist es an und für sich beliebig, welche der beiden Hälftformen man in einem speciellen Falle positive, welche negative nennt, und es sind hier dieselben Erwägungen, welche S. 259 über die Wahl der Grundform angestellt wurden, Platz greifend; so ist es z. B. üblich, die an

*) Eine allgemein gebrauchte Abkürzung dieser Zeichen wird im nächsten Paragraph erörtert werden.

einem derartig krystallisirenden Stoffe regelmässig vorherrschenden, oder die durch Spaltbarkeit ausgezeichneten Hälftformen als positive zu bezeichnen. Ist eine solche Wahl einmal an einem Krystall getroffen, so ist damit natürlich das Vorzeichen, + oder —, für alle anderen, daran auftretenden Formen gegeben.

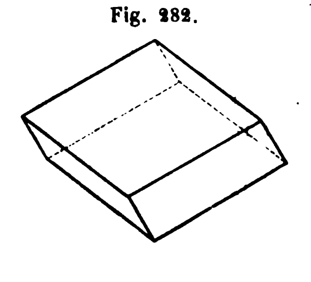
Ein hexagonales Skalenoëder besteht aus drei oberen und drei, in alternirender Stellung dazu befindlichen unteren Flächenpaaren, deren Flächen sich je in einer stumpferen Polkante, deren Winkel gleich demjenigen der entsprechenden Polkante an der dihexagonalen Pyramide ist, schneiden. Ausser diesen sechs stumpferen Polkanten besitzt das Skalenoëder noch sechs schärfere, mit jenen abwechselnd, und ebenso viel (im Zickzack auf- und niedersteigende), unter sich gleiche Mittelkanten. Die Polecken desselben sind also 3+3kantige, die Seitenecken 2+1+1kantige.

Was die Combinationen verschiedener Skalenoëder mit einander betrifft, so sind dieselben äusserst mannigfaltig, je nach den Werthen von m und n derselben, und je nachdem die in Combination tretenden Formen von gleichem oder verschiedenem Vorzeichen sind. Die wichtigsten Fälle werden wir bei den Beispielen dieser Hemiëdrie kennen lernen.

2) Die hexagonale Pyramide erster Ordnung, derselben Hemiëdrie unterworfen (Fig. 281), liefert eine Form, welche nur aus sechs, drei oberen und drei alternirend gestellten unteren Flächen besteht, von denen je zwei gegenüberliegend und parallel sind. Diese Form, Fig. 282, heisst Rhomboëder*) und besteht aus drei, sich unter demselben schiefen Winkel durchschneidenden parallelen Flächenpaaren, daher deren Gestalt bei gleicher Centraldistanz diejenige eines Rhombus ist. Bei dem in Fig. 282 dargestellten Rhomboëder ist der stumpfe Winkel dieses Rhombus an der Polecke, bei demjenigen Fig. 283 der spitze ebendaselbst befindlich; ein Rhomboëder der ersteren Art nennt man ein stumpfes, eines der zweiten Art ein spitzes. Die beiden durch die Hemiëdrie entstehenden Rhomboëder sind um so spitzer, je spitzer die hexagonale Pyramide ist, von der sie sich ableiten. Wie aus der Ableitung hervorgeht, sind die sechs Polkanten eines Rhomboëders unter einander genau gleich, ebenso die sechs Mittelkanten, und da die Form

Fig. 281.

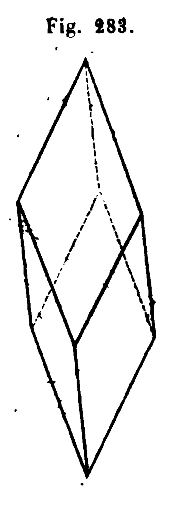
Fig. 282.



*) Wegen der durch ihre Häufigkeit veranlassten Wichtigkeit der Rhomboëder ist diese Hemiëdrie nach denselben benannt worden.

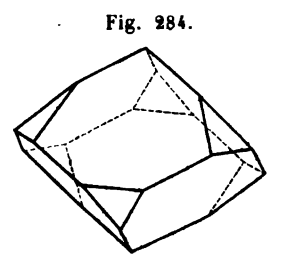
parallelflächig ist, so sind die Winkel der Polkanten die Supplemente von denjenigen der Mittelkanten. Bei den spitzen Rhomboëdern ist der Winkel der Polkanten kleiner, als 90°, derjenige der Mittelkanten um ebenso viel grösser; bei den stumpfen ist das Umgekehrte der Fall. Da an jedem rhomboëdrisch krystallisirenden Körper eine beliebig grosse Reihe von Rhomboëdern möglich ist, so kommt zuweilen auch ein solches vor, dessen Winkel sehr wenig von 90° abweicht, welches also fast die Gestalt eines Würfels hat; da ein solcher Krystall sich in der Richtung der Hauptaxe anders mit der Temperatur ausdehnt, als senkrecht dazu, demnach die Rhomboëder spitzer oder stumpfer werden, je nachdem die Ausdehnung durch die Wärme in der Hauptaxe grösser oder kleiner, als in den übrigen Richtungen, — so kann ein solches würfelähnliches Rhomboëder, wie es bei jeder dieser Abtheilung angehörigen Substanz krystallonomisch möglich ist, bei einer bestimmten Temperatur sogar genau rechtwinkelige Polkanten und Mittelkanten besitzen, ohne deshalb ein reguläres Hexaëder zu sein. Denn zum Wesen eines regulären Krystalls gehört, eben die Constanz seiner Winkel und somit seiner weit höheren Symmetrie für alle Temperaturen, gehört die Gleichheit der Lichtgeschwindigkeit nach allen Richtungen, während jenes scheinbare Hexaëder natürlich ein optisch einaxiger Krystall bleibt, also nur als »Rhomboëder von 90°« betrachtet werden darf. Von einem Uebergang des hexagonalen Systems in das reguläre könnte nur dann die Rede sein, wenn mit der Annäherung jenes Rhomboëders an den Würfel auch die übrigen Eigenschaften des betreffenden Krystalls, z. B. seine optischen, sich denen eines regulären näherten; dies ist aber keineswegs der Fall.

Fig. 283.



Die beiden, aus derselben Pyramide erster Ordnung abgeleiteten Rhomboëder, welche natürlich ganz gleiche Gestalt haben und sich nur durch ihre, um 60° oder 180° gegen einander gedrehte Stellung unterscheiden, werden ebenso wie die Skalenoëder als positives und negatives bezeichnet, und zwar ist es üblich, in allen Fällen, in denen nach den Flächen eines derselben Spaltbarkeit stattfindet, dieses das positive zu nennen.

Fig. 284.



Zwei zusammengehörige Rhomboëder erscheinen derart mit einander combinirt, Fig. 284, dass das eine die Seitenecken des andern, bei gleicher Neigung beider Arten von Flächen gegen die Hauptaxe, abstumpft. Die Bezeichnung zweier solcher Rhomboëder ist

$+\frac{mP}{2}$ und $-\frac{mP}{2}$ nach Naumann

$\pi.\{0hhl\}$ nach Miller

$\frac{1}{2}(a:a:\infty a:mc)$ nach Weiss

Die Combination Fig. 285 stellt ebenfalls zwei Rhomboëder von entgegengesetztem Vorzeichen dar; nennen wir das vorherrschende, r, $+\frac{mP}{2}$ oder $(011l)$, so gehört das zweite, s, welches die Polkanten des ersten grade abstumpft, offenbar einer stumpferen Pyramide, also einer solchen mit kleinerer Ableitungszahl, an. Um diese letztere zu bestimmen, bedarf es noch einer Fläche, z. B. der in derselben Figur mit c bezeichneten Basis oP, deren Combinationskante mit s horizontal sein muss, da es ja die Kante zwischen oP und einer Pyramidenfläche ist; dieselbe Richtung besitzt aber auch die Kante einer s-Fläche mit einer darunter liegenden r-Fläche, da andernfalls s keine gerade Abstumpfung der Polkanten von r wäre; es liegen demnach z. B. s_1, c und r_4 in einer Zone, und da s_1 zugleich in der Zone $r_1\,r_2$ liegt, so sind seine Indices bestimmt. Es sind die Symbole von $c = (0001)$, von $r_4 = (10\bar{1}\bar{l})$, von $r_1 = (110l)$, von $r_2 = (0\bar{1}\bar{1}l)$; nach dem bekannten Schema, unter Weglassung der überflüssigen Indices, berechnet, ist das Symbol der Zone $[c, r_4] = [100]$, dasjenige der Zone $[r_1, r_2] = [l2\cdot\bar{l}\bar{1}]$, woraus das Zeichen der Fläche s_1 folgt zu

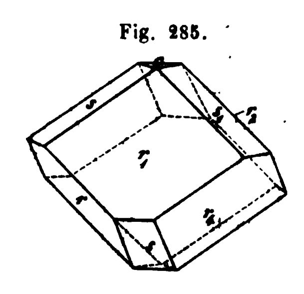
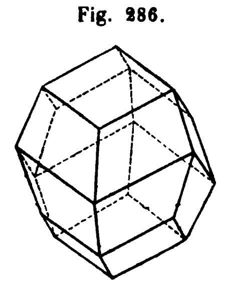


Fig. 285.

$$(0\bar{1}2\cdot l)\ \text{oder}\ (10\bar{1}2\cdot l).$$

Das die Polkanten abstumpfende Rhomboëder hat demnach einen doppelt so grossen Index der Hauptaxe, als das vorherrschende, und da die Ableitungszahlen m die reciproken Werthe der Indices sind, so erhält das zweite Rhomboëder das Zeichen $-\frac{\frac{m}{2}P}{2}$, wenn man das erste Rhomboëder $+\frac{mP}{2}$ bezeichnet.

Fig. 286 zeigt ein Rhomboëder in Combination mit einem Skalenoëder, welches die Mittelkanten des ersteren zuschärft. Die Mittelkanten des Skalenoëders sind also parallel denen des Rhomboëders, und da ein Rhomboëder durch die Richtung seiner Mittelkanten vollkommen bestimmt ist (je zwei Mittelkanten bestimmen die Lage einer Fläche desselben), so muss es möglich sein, aus dem Zeichen eines Skalenoëders dasjenige des Rhomboëders, welches mit ihm gleiche Mittelkanten hat, des sogenannten »Rhomboëders der Mittelkanten«, abzuleiten. Sei $+\frac{mPn}{2}$ das Zeichen des


Fig. 286.

Skalenoëders, so sind die Indices zweier Flächen desselben, welche in einer Mittelkante zusammenstossen:

$$m(n-1),\quad mn,\quad m,\quad n,$$
$$m,\quad mn,\quad m(n-1),\quad -n;$$

daraus folgen die Indices der Zone:

$$-mn^2,\quad 2mn^2,\quad m^2n(n-2)$$

oder: $\quad -n,\quad 2n,\quad m(n-2).$

Das gesuchte Rhomboëder liegt ausser in dieser Zone noch in derjenigen der Basis und der Prismenfläche desselben Sextanten; das Symbol der letzteren Zone ist $[\bar{1}10]$; aus beiden Zonen folgen die Indices der Rhomboëder:

$$-m(n-2),\quad -m(n-2),\quad n$$

oder, da $n-2$ negativ sein würde:

$$m(2-n),\quad m(2-n),\quad n.$$

Das Parameterverhältniss des Rhomboëders der Mittelkanten ist somit

$$\frac{1}{m(2-n)}a : \frac{1}{m(2-n)}a : \frac{1}{n}c$$
$$= a : a : \frac{m(2-n)}{n}c,$$

es hat also das Zeichen

$$+\frac{\frac{m(2-n)}{n}P}{2}.$$

Denkt man sich die Flächen dieses Rhomboëders durch die Mittelkanten des Skalenoëders $+\frac{mPn}{2}$ gelegt, so wird es von diesem vollständig umhüllt und beide Formen berühren sich in ihren Mittelkanten (Fig. 287). In ähnlicher Weise umhüllt ein Skalenoëder noch zwei andere Rhomboëder, welche man das der kürzeren und dasjenige der längeren Polkanten nennt. Das erstere hat zu Polkanten die kürzeren Polkanten des Skalenoëders, k Fig. 288, es ist also ebenfalls durch dessen Zeichen vollkommen bestimmt. In genau derselben Weise berechnet, wie es soeben für das Rhomboëder der Mittelkanten geschah, ergiebt sich dessen Zeichen

Fig. 287.

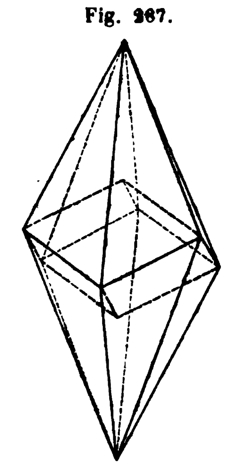
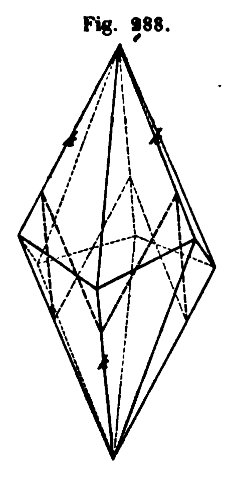


Fig. 288.



$$+\frac{\frac{m(2n-1)}{n}P}{2}$$

Ein Skalenoëder, mit seinem Rhomboëder der kürzeren Polkanten combinirt, erscheint als Zuschärfung der Polkanten des letzteren, Fig. 289.

Dasjenige Rhomboëder, dessen Polkanten die längeren Polkanten des Skalenoëders sind, ist ebenfalls hierdurch bestimmt. Die Rechnung, in derselben Weise durchgeführt, liefert dafür das Zeichen

Fig. 289.

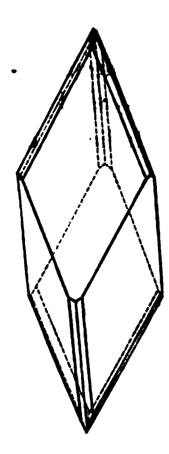
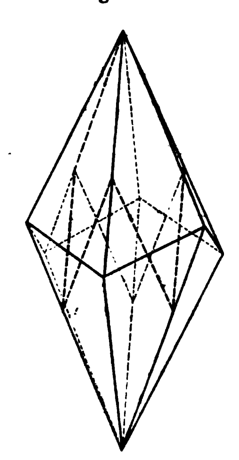


Fig. 290.



$$-\frac{\frac{m(n+1)}{n}P}{2}$$

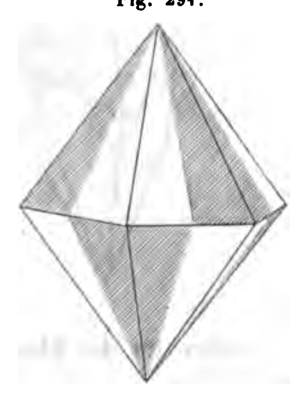
Es ist das spitzeste Rhomboëder (s. Fig. 290), welches von dem Skalenoëder umhüllt wird, und ist von entgegengesetztem Vorzeichen, da seine Flächen in denjenigen Dodekanten liegen, denen die des Skalenoëders nicht angehören.

Vergleicht man die Längen der Hauptaxe dieser drei, von einem Skalenoëder sich ableitenden Rhomboëder, so sieht man, dass diejenige des dritten gleich der Summe der beiden ersten, denn

$$n+1 = (2n-1) + (2-n).$$

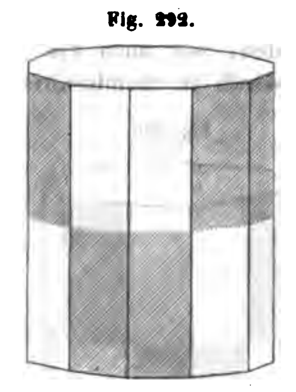
3) Je grösser der Werth von n bei einem Skalenoëder, d. h. je näher er 2 ist, desto mehr ähnelt dasselbe einer Pyramide der zweiten Ordnung, desto weniger unterscheiden sich die stumpferen und die schärferen Polkanten in ihren Winkeln von einander. Ist $n = 2$, so sind alle Polkanten gleich, die Mittelkanten horizontal, und die Form fällt zusammen mit einer Pyramide zweiter Ordnung. Da ein Skalenoëder einem Rhomboëder um so ähnlicher ist, je weniger dessen n von 1 verschieden, so ist dieses Rhomboëder selbst die Grenzgestalt für den Fall $n = 1$, in welchem der Winkel der stumpferen Polkanten $= 180^0$ wird. Die andere Grenzform einer solchen Reihe von Skalenoëdern ist eine Pyramide der andern Ordnung. Man ersieht dies am leichtesten, wenn man die rhomboëdrische Hemiëdrie auf diese Form anwendet, Fig. 291, wobei dieselbe zu betrachten ist als diejenige dihexagonale Pyramide, deren $n = 2$. Es resultiren dann nämlich zwei vollkommen zusammenfallende hemiëdrische Formen, welche sich folglich auch nicht von der holoëdrischen unterscheiden können.

Fig. 291.



Von den Combinationen der hemiëdrischen Pyramiden der zweiten Ordnung mit Rhomboëdern u. s. w. werden wir einige gelegentlich der Beispiele dieser Abtheilung kennen lernen.

Fig. 292.



4) Die dihexagonalen Prismen sind in den holoëdrischen Krystallreihen diejenigen dihexagonalen Pyramiden, deren $m = \infty$; werden dieselben nun hemiëdrisch, Fig. 292, so liefern sie zwei Formen, bei denen die Flächen der einen vollkommen zusammenfallen mit denjenigen der andern, d. h. es entsteht durch die Hemiëdrie dasselbe dihexagonale Prisma, welches anzusehen ist als ein Skalenoëder, dessen $m = \infty$. In der That ist auch das Endglied einer Reihe von Skalenoëdern, deren n gleich ist, für den Grenzfall $m = \infty$ nichts Anderes, als dasjenige dihexagonale Prisma, welches dasselbe n besitzt.

5) Das hexagonale Prisma erster Ordnung wird, wie aus Fig. 293 ersichtlich, ebenfalls durch die Hemiëdrie scheinbar nicht geändert, ist aber in einer hemiëdrischen Krystallreihe nicht die Pyramide erster Ordnung mit unendlich langer Hauptaxe, sondern dasjenige Rhomboëder, dessen $m = \infty$. Je grösser m, desto spitzer ist das Rhomboëder, das spitzeste ist das Prisma erster Ordnung, die eine Grenzform aller Rhomboëder.

In Combination mit einem Skalenoëder erscheint das Prisma erster Ordnung als verticale Abstumpfung der Mittelecken, welche $2 + 1 + 1$ kantig sind, s. Fig. 294, in Combination mit einem Rhomboëder ebenso; die ab-

Fig. 293.

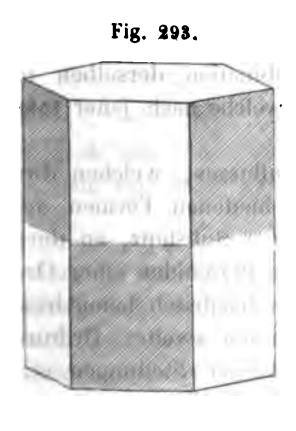


Fig. 294.

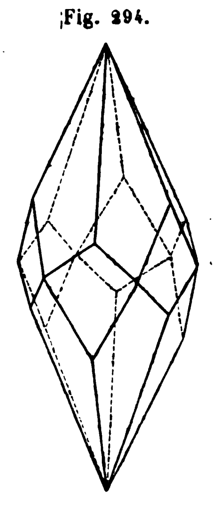
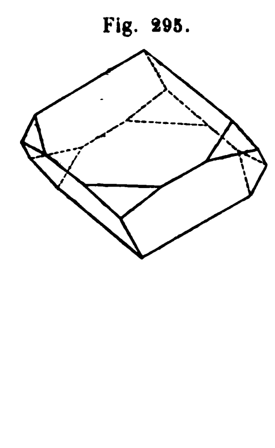


Fig. 295.



gestumpften Mittelecken sind hier $2 + 1$ kantig, und die eine der Combinationskanten zwischen je einer Prismen- und einer Rhomboëderfläche ist horizontal, s. Fig. 295.

Das hexagonale Prisma der zweiten Ordnung ist die Pyramide derselben Stellung mit unendlich langer Hauptaxe; da jene für endliche Werthe von m durch die Hemiëdrie nicht in ihrer Flächenzahl alterirt wird, so kann dies auch nicht mit der Grenzform, für den Fall $m = \infty$, stattfinden, wie auch Fig. 296 zeigt. Das Prisma zweiter Ordnung erscheint desshalb an rhomboëdrisch hemiëdrischen Krystallen mit der vollen Flächen-

Fig. 296.

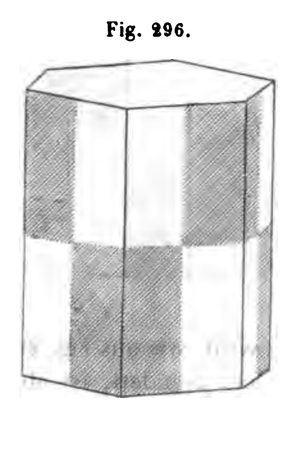


Fig. 297.

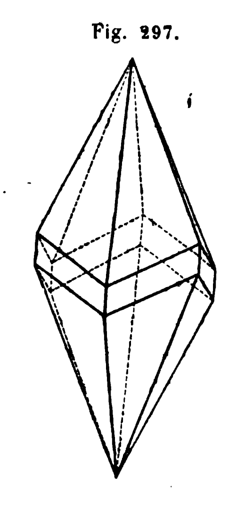
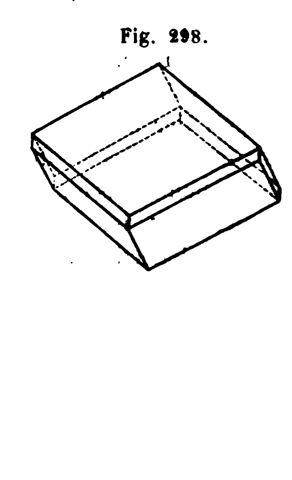


Fig. 298.



zahl. Es bildet die gerade Abstumpfung der Mittelkanten sowohl eines jeden Skalenoëders, Fig. 297, als auch eines jeden Rhomboëders, Fig. 298.

7) Die Basis ist in dieser hemiëdrischen Abtheilung aufzufassen als dasjenige Rhomboëder, dessen $m = 0$ ist. Sie stumpft die Polecken der Rhomboëder wie der Skalenoëder gerade ab. Fig. 299 stellt die Combination derselben mit einem Rhomboëder dar, welche nach jener tafelartig ausgebildet ist.

Fig. 299.

Aus der Art des Einflusses, welchen diese Hemiëdrie auf die verschiedenen Formen ausübt, geht hervor, dass eine Substanz, an deren Krystallen nur hexagonale Pyramiden einer Ordnung vorkommen, ebensowohl holoëdrisch, als rhomboëdrisch hemiëdrisch sein kann, da dieselben in letzterem Falle Pyramiden zweiter Ordnung sein können. Erst das Auftreten der Pyramiden beider Stellungen oder dasjenige der dihexagonalen vermag diese Frage zu entscheiden.

§. 64. **Abgekürzte Naumann'sche Bezeichnung der rhomboëdrischen Formen.** Wegen der grossen Häufigkeit dieser Hemiëdrie und der dadurch bewirkten oftmaligen Wiederholung des Schreibens ihrer Zeichen wurde von Naumann eine abgekürzte Bezeichnungsweise für die Formen derselben vorgeschlagen, welche eine sehr ausgedehnte Anwendung gefunden hat.

Von der zur Grundform gewählten Pyramide P leiten sich zwei Rhom-

boëder ab, von denen nun wieder eines, falls beide an den Krystallen auftreten, als positives auszuwählen ist. Da die Rhomboëder parallelflächige Gestalten sind, somit keine Fläche des positiven einer des negativen parallel ist, so sind dieselben in unzweifelhafter Weise stets von einander zu unterscheiden, wenn parallel den Flächen des einen derselben Spaltbarkeit vorhanden ist, wie dies in der That bei vielen hierher gehörigen Körpern der Fall ist. Bei einem derartigen Krystall wird man stets das Spaltungsrhomboëder zum **positiven primären Rhomboëder** wählen; dieses bezeichnet man nun, statt mit $+\frac{P}{2}$, mit

$$+R^{*}),$$

das zugehörige negative mit

$$-R.$$

Jedes davon abgeleitete Rhomboëder wird entsprechend, statt mit $\frac{mP}{2}$, mit

$$+ \text{ oder } - mR$$

bezeichnet; da nun m jeden beliebigen rationalen Werth haben kann zwischen 0 und ∞, von denen der erstere der Basis, der letztere dem hexagonalen Prisma erster Ordnung entspricht, als dem spitzesten Rhomboëder, welches existirt, so können diese beiden Grenzformen in derselben Weise bezeichnet werden, nämlich $0R$ und ∞R, und die Ableitungsreihe der verschiedenen Rhomboëder einer Krystallreihe, incl. ihrer Grenzglieder, wird sodann die folgende sein:

$$0R, \quad \underset{(m<1)}{\pm mR}, \quad \pm R, \quad \underset{(m>1)}{\pm mR}, \quad \infty R.$$

Wir haben im vorigen § gesehen, dass zu jedem Skalenoëder $\pm\frac{mPn}{2}$ ein Rhomboëder existirt, welches dieselben Mittelkanten und das Zeichen

$$+\frac{\frac{m(2-n)}{n}P}{2}$$

hat; da die Länge der Hauptaxe dieses zu m, derjenigen des Skalenoëders in dem rationalen Verhältniss

$$\frac{m(2-n)}{n} : m = 1 : \frac{n}{2-n}$$

steht, so ist das Rhomboëder stets ein mögliches derselben Krystallreihe. Daraus folgt umgekehrt: geht man von irgend einem Rhomboëder $m'R$ aus, verlängert dessen Hauptaxe, bis sie ein rationales Vielfaches derjenigen des Rhomboëders ist, Fig. 300**), und verbindet die Mittelecken desselben mit den neuen Endpunkten der Hauptaxe durch Gerade, so bilden diese letzteren die Polkanten eines Skalenoëders, dessen Mittelkanten identisch sind mit denen des Rhomboëders, und das so abgeleitete Skalenoëder muss derselben Krystallreihe angehören wie das Rhomboëder, weil nach Obigem beide

---

*) Auch nur mit R ohne $+$ Zeichen.

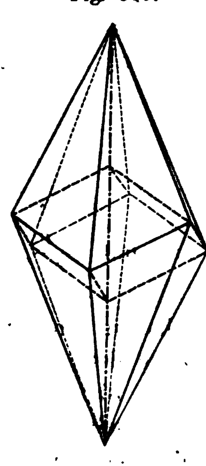
**) Hier ist die Hauptaxe verdreifacht.

in rationalem Verhältniss ihrer Axen stehen. Bezeichnen wir nunmehr ein Skalenoëder mit

$$+ \text{ oder } - m' R n',$$

wobei $m' R$ das Zeichen seines Rhomboëders der Mittelkanten, n' den Zahlenwerth der Vervielfältigung der Hauptaxe bedeutet (in Fig. 300 ist demnach die Ableitung von $m' R 3$ dargestellt), so ist nunmehr zu bestimmen, welche Werthe m' und n', bezogen auf m und n des Zeichens $m P n$ derjenigen dihexagonalen Pyramide, deren Hälftform das Skalenoëder ist, besitzen. Da das Rhomboëder der Mittelkanten von $\frac{m P n}{2}$ das Zeichen

Fig. 300.



$$m' R = \frac{\frac{m(2-n)}{n} P}{2}$$

hat, so ist $m' = \frac{m(2-n)}{n}$, und da die Längen der Hauptaxen in dem Verhältniss

$$1 : \frac{n}{2-n}$$

stehen, so ist letzterer Bruch die Zahl, mit der die Hauptaxe des Rhomboëders multiplicirt werden muss. um diejenige des Skalenoëders zu geben, also die Zahl n'; folglich ist das Zeichen des letzteren, bezogen auf m und n,

$$\frac{m(2-n)}{n} R \frac{n}{2-n}.$$

Ist dagegen umgekehrt das abgekürzte Zeichen $m' R n'$ eines Skalenoëders gegeben und die Ableitungszahlen derjenigen dihexagonalen Pyramide $m P n$ zu bestimmen, welcher jenes angehört, so hat man die Gleichungen

$$m' = \frac{m(2-n)}{n} \text{ und } n' = \frac{n}{2-n}$$

nach m und n aufzulösen und findet

$$m = m' n' \qquad n = \frac{2 n'}{n'+1},$$

folglich das gesuchte Zeichen der dihexagonalen Pyramide:

$$m' n' P \frac{2 n'}{n'+1}.$$

Hieraus lassen sich nun sehr leicht die abgekürzten Zeichen der drei, von einem Skalenoëder sich ableitenden Rhomboëder berechnen. Sei $+ m R n$ das Zeichen des Skalenoëders (worin, wie immer von hier ab, m und n für m' und n' geschrieben sind), so ist

das Rhomboëder der Mittelkanten $= + m R$

das Rhomboëder der kürzeren Polkanten $= + \frac{m}{2} (3 n - 1) R$

das Rhomboëder der längeren Polkanten $= - \frac{m}{2} (3 n + 1) R$.

Von jedem Rhomboëder einer Krystallreihe leitet sich durch Vervielfältigung mit n in der oben angegebenen Weise eine Reihe von Skalenoëdern

ab, deren unterstes Glied das betreffende Rhomboëder selbst ist, für den Fall $n = 1$, deren folgende Glieder, so lange n wenig grösser als 1, Skalenoëder mit sehr stumpfen längeren Polkanten, so z. B. $+R$ und $+R\frac{5}{4}$ Fig. 301, sind, und deren Endglied für $n = \infty$, allen Reihen gemeinschaftlich, das Prisma zweiter Ordnung ist.

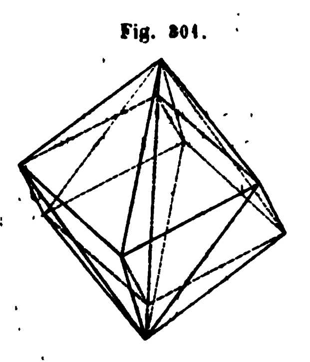


Fig. 301.

Die Pyramiden zweiter Ordnung lassen sich bei dieser Ableitungsmethode nicht, wie bei der ursprünglichen, in der sie Grenzformen von dihexagonalen Pyramiden bilden, als solchen Ableitungsreihen angehörig betrachten, daher die Bezeichnung derselben und des zugehörigen Prismas $mP2$ und $\infty P2$ bleibt.

§. 65. Berechnung der Rhomboëder und Skalenoëder. Es sei der Polkantenwinkel eines Rhomboëders $= r$ (oder der Mittelkantenwinkel als dessen Supplement) durch Messung gefunden und daraus das Axenverhältniss c ($a = 1$ gesetzt), d. h. das Verhältniss der Hauptaxe zu den Nebenaxen derjenigen hexagonalen Pyramide zu berechnen, deren Hälftform das betreffende Rhomboëder ist. Zu diesem Zwecke denke man sich durch die Polkante CD Fig. 302 eine verticale Ebene gelegt, so ist dies diejenige Symmetrieebene $COED$, in welcher die Zwischenaxe OE liegt und welche den Winkel r der Polkante halbirt. In dem von dieser Ebene, der Rhomboëderfläche CDF und der Ebene COB gebildeten sphärischen Dreieck mit dem Kugelcentrum C ist der Winkel zwischen der Rhomboëderfläche und COB ein rechter, weil letztere Symmetrieebene ist; es ist ferner bekannt der Winkel zwischen COB und COE, d. i. 60^0, und derjenige zwischen letzterer und CDF, d. i. $\frac{1}{2}r$, daher für den Winkel BCO als Seite α des sphärischen Dreiecks:

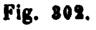


Fig. 302.

$$\cos\alpha = \frac{\cos\frac{1}{2}r}{\sin 60^0}$$

Aus dem so bekannten Werth von α folgt das Verhältniss

$$\frac{CO}{OB} = \cotg\alpha$$

OB, die Zwischenaxe, ist aber, wenn die Nebenaxe $OA = 1$ gesetzt wird, $= \frac{1}{2}\sqrt{3}$, also

$$CO = c = \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\cotg\alpha$$

die gesuchte Länge der Hauptaxe.

Ist statt des Polkantenwinkels des Rhomboëders derjenige zwischen demselben und der Basis gemessen worden, so ist dessen Supplement gleich dem halben Winkel der Basiskante an der holoëdrischen Pyramide, und dem entsprechend die Länge der Hauptaxe zu berechnen (vergl. §. 55).

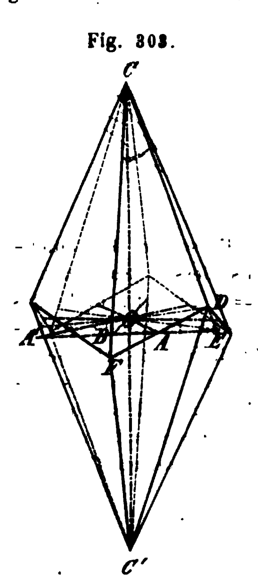
Um das Axenverhältniss eines Skalenoëders zu berechnen, bedarf es der Messung zweier verschiedener Kantenwinkel, da es sich hierbei um die Ermittelung zweier Unbekannten, d. i. m und n derjenigen dihexagonalen Pyramide, deren Hälftform jene ist, handelt. Seien z. B. die beiden Polkantenwinkel des Skalenoëders Fig. 303 gemessen $= s^1$ und s^2, so ist damit das sphärische Dreieck bestimmt, dessen Kugelcentrum C ist,

und welches gebildet ist von der Skalenoëderfläche ODF und den beiden, die Kantenwinkel s^1 und s^2 halbirenden Symmetrieebenen CQB und COE; es sind nämlich dessen Winkel $\frac{1}{2}s^1$, $\frac{1}{2}s^2$ und 60⁰. Daraus sind zwei seiner Seiten zu berechnen, d. h. die Winkel BCO und ECO, welche die Polkanten mit der Hauptaxe einschliessen, und sind die Cotangenten dieser Winkel gleich den Proportionen:

$$CO : OB \text{ und } CO : OE,$$

womit das Längenverhältniss der Hauptaxe und zweier Zwischenaxen, OB und OE, gegeben ist. Um aus diesem nun dasjenige der Nebenaxen, OA und OA', zu berechnen, sucht man in dem Dreieck OBE, dessen Seiten OB und OE, in Längeneinheit der Hauptaxe ausgedrückt, und dessen Winkel $BOE = 60^0$, bekannt sind, den Winkel OEB; dieser, um 30⁰ vermehrt, ist gleich dem Aussenwinkel OAB, und somit alle Daten zur Berechnung der Dreiecke OAE und $OA'B$ gegeben, aus denen die Längen OA und OA', bezogen auf OC, folgen; das so gefundene Verhältniss dieser drei Grössen wird schliesslich mit dem reciproken Werth von OA multiplicirt, um diese Nebenaxe auf den Werth 1 zu bringen, dann sind die beiden anderen Längen die gesuchten Zahlen n und m.

Fig. 303.



Aus dem in dieser Weise gefundenen Zeichen der holoëdrischen Formen ist das abgekürzte Zeichen eines Rhomboëders oder Skalenoëders nach den Formeln des vorigen § leicht aufzustellen.

Es ist noch hinzuzufügen, dass zwar bei gewissen rhomboëdrisch hemiëdrischen Körpern, welche sich natürlich finden, oft Krystalle von grossem Flächenreichthum vorkommen, jedoch an denselben gewöhnlich nur wenige Formen wirklich zu berechnen sind, da sich die Mehrzahl derselben durch die Zonen, welche sie mit einander und mit jenen bilden, ergeben.

Ist nun das Zeichen der einzelnen Formen und das Axenverhältniss der Krystallreihe gegeben, und sollen daraus die Winkel der einzelnen Rhomboëder und Skalenoëder berechnet werden, um sie mit den direct gemessenen zu vergleichen, so hat man die oben auseinandergesetzten Rechnungsmethoden genau umgekehrt anzuwenden. Man hat z. B. bei der Berechnung des Rhomboëders aus der Länge c den Winkel α und daraus den Polkantenwinkel r zu berechnen; ebenso hat man aus den Zeichen des Skalenoëders die Längen OB und OE Fig. 303, und aus diesen die Winkel, welchen die längere und kürzere Polkante des Skalenoëders mit der Hauptaxe einschliesst, endlich daraus die halben Winkel beider Polkanten selbst zu berechnen. Sind diese bestimmt, so folgt daraus die Grösse der Mittelkante aus dem sphärischen Dreieck, welches gebildet wird von den Flächen CDF, $C'DF$ und der durch die Kanten CF und FC' gehenden Symmetrieebene; in dieser sind nämlich bekannt die beiden halben Polkantenwinkel und der Winkel CFC'.

§. 66. **Beispiele**: Tellur = *Te*. $a : c = 1 : 1{,}3298$. Rhomboëder von 86⁰ 57′ Polkante.

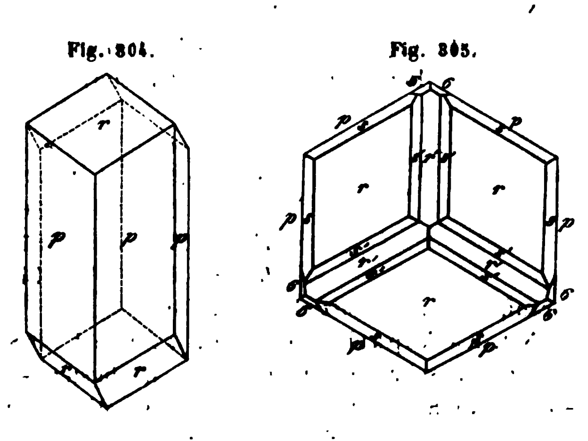
Arsen = *As*. $a : c = 1 : 1{,}4025$. Rhomboëder von 85⁰ 5′ Polkante.

Antimon = *Sb*. $a : c = 1 : 1{,}3068$. Rhomboëder von 87⁰ 28′ Polkante.

Wismuth = *Bi*. $a : c = 1 : 1{,}3035$. Rhomboëder von 87⁰ 40′ Polkante.

Nat. Antimonsilberblende (= dunkles Rothgiltigerz) = $Ag^6 Sb^2 S^6$.

$a : c = 1 : 0,7880$. Fig. 304 stellt die einfache Combination $r = + R$ mit dem Polkantenwinkel 108° 42′, $p = \infty P 2$ dar, Fig. 305 eine flächenreichere (in der Richtung der Hauptaxe von oben gesehen, weil das andere Ende eine abweichende Ausbildung zeigt, s. Hemimorphie §. 101), wie solche sehr häufig von diesem Mineral vorkommen; es ist $r = + R$, $p = \infty P 2$, ein Skalenoëder s zwischen r und p, welches folglich dieselben Mittelkanten wie r hat; durch Messung des Winkels $p : s = 155°$ $4\frac{1}{2}'$, aus welchem der Mittelkantenwinkel folgt, ergiebt sich das Zeichen $+ R3$; ferner $r' = - \frac{1}{2} R$; zwischen diesem und r ein Skalenoëder s', dessen kürzere Polkanten zugleich diejenigen von r sind, so dass die Messung eines Winkels $s' : r = 158° 13'$ genügt, das Zeichen $+ \frac{1}{4} R 3$ desselben zu berechnen; endlich erscheint noch ein negatives Skalenoëder σ mit den Polkanten 165° 57′ und 76° 47′ und dem Zeichen $- 5 R \frac{7}{5}$. Doppelbrechung negativ. Brechungsexponenten: $\omega = 3,084$, $\varepsilon = 2,881$ Roth (Lithium). Spaltbarkeit R.



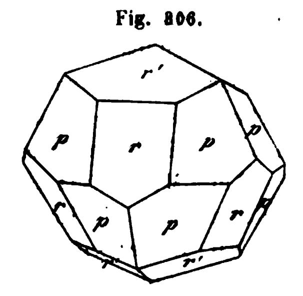
Nat. Arsensilberblende (lichtes Rothgiltigerz) $= Ag^6 As^2 S^6$. $a : c = 1 : 0,7851$. Genau dieselben Combinationen wie das vorige; der Winkel der Polkante von R ist 107° 50′. Doppelbrechung —.

Wasser $= H^2 O$. $a : c = 1 : 1,400$. Gewöhnlich hexagonale Tafeln, doch kommen auch rhomboëdrische Combinationen (z. B. in manchen Hagelfällen) vor. Doppelbrechung +, schwach.

Magnesiahydrat (nat. Brucit) $= H^2 Mg O^2$. $a : c = 1 : 0,5208$. Tafelförmige Combinationen von oR und R. Spaltbarkeit oR. Doppelbrechung +.

Thonerde (nat. Korund) $= Al^2 O^3$. $a : c = 1 : 1,363$. Vorherrschend $\infty P 2$, R. Doppelbrechung —. $\omega = 1,768$, $\varepsilon = 1,760$ Roth.

Eisenoxyd $= Fe^2 O^3$. $a : c = 1 : 1,359$. Eine besonders an natürlichen Krystallen häufige Combination zeigt Fig. 306: $r = + R$, $r' = + \frac{1}{4} R$, $p = \frac{4}{3} P 2$. Das Zeichen dieser letztern Form folgt aus dem Parallelismus der Kanten $p : r$ und $r : p$, wie bereits S. 267 (vergl. Fig. 261) nachgewiesen wurde.



Chromoxyd = $Cr^2 O^3$. $a : c = 1 : 1,368$. Man erhält Combinationen oR, R, $\frac{4}{3} P 2$, $\infty P 2$, also dem vorigen sehr ähnlich.

Kaliumnitrat = $K N O^3$. Beim Verdampfen eines Tropfens der Lösung bilden sich zuerst mikroskopische Rhomboëder von ca. 106° Polkantenwinkel.

Natriumnitrat = $Na N O^3$. $a : c = 1 : 0,8276$. Natürlich und aus wässerigen Lösungen künstlich $+R$; Polkante 106° 30′. Vollkommen spaltbar nach R. Doppelbrechung negativ stark. Brechungsexponenten für die Linien:

	ω	ε
$B =$	1,579	1,335
$D =$	1,587	1,336
$E =$	1,594	1,337
$H =$	1,626	1,344

Schrauf, Wien. Ak. Sitz. Ber. 41, 786.

Nat. Kalkspath = $Ca C O^3$. $a : c = 1 : 0,8543$. Die natürlichen Krystalle zeigen sehr viele Formen, am häufigsten $-\frac{1}{2}R$, $-2R$, $+4R$, ∞R, $+R3$, und höchst mannigfaltige Combinationen, wie die Fig. 285, 286, 289, 294, 297, 298, 299. Spaltbar sehr vollkommen nach $+R$. Die Gleitflächen sind nach Reusch (Poggendorff's Ann. d. Phys. 132,44) die Flächen von $-\frac{1}{2}R$ (s. später bei regelmässigen Verwachsungen §. 106). Doppelbrechung —, sehr stark. Brechungsexponenten für die Linien:

	ω	ε
B	1,6531	1,4839
C	1,6545	1,4845
D	1,6585	1,4863
E	1,6636	1,4887
F	1,6680	1,4907
G	1,6762	1,4945
H	1,6833	1,4978

Ueber die verschiedenen physikalischen Eigenschaften des Kalkspaths, namentlich seine thermische Ausdehnung, ist bereits in der I. Abtheilung ausführlich gehandelt worden. Ueber die Elasticität desselben nach verschiedenen Richtungen liegen genaue Messungen von Baumgarten (Poggendorff's Annalen d. Phys. 152. Bd. 369) vor. Nach diesen ist das Maximum des Elasticitätscoëfficienten parallel den Kanten des Spaltungsrhomboëders und das Minimum (richtiger die Minima) parallel den kurzen Diagonalen der Flächen desselben. Die Beziehung der Elasticität zur Cohäsion ist eine ganz analoge, wie beim Steinsalz.

Nat. Magnesit = $Mg CO^3$. $a : c = 1 : 0,8095$. Nur $+R$, nach welchem auch die Krystalle vollkommen spalten. Doppelbrechung —, stark.

Nat. Eisenspath = $Fe CO^3$. $a : c = 1 : 0,8171$. Aehnliche Combinationen, wie Kalkspath, häufig nur $+R$; darnach vollkommen spaltbar. Doppelbrechung —, stark.

Nat. Manganspath = $Mn\,C\,O^3$. $a : c = 1 : 0,8211$. $+ R$. Spaltbarkeit $+ R$.

Nat. Zinkspath = $Zn\,C\,O^3$. $a : c = 1 : 0,8062$. $+ R$. Spaltbarkeit $+ R$.

Nat. Chlorit = $H^2\,(Mg,\,Fe)^5\,Al^2\,Si^3\,O^{18}$. $a : c = 1 : 3,495$. Combination: oR, R. Spaltbarkeit oR sehr vollkommen. Doppelbrechung sehr schwach, theils — ($\omega = 1,577$, $\varepsilon = 1,576$ Roth), theils +. Sehr starker Pleochroïsmus; Strahlen ⊥ zur Axe schwingend smaragdgrün, ‖ zur Axe vibrirende hyazinthroth.

Aldehydammoniak = C^2H^7NO. $a : c = 1 : 1,3949$. Combination: $+ R$, $-\frac{1}{2}R$, oR. Doppelbrechung —, nicht stark.

Hydrochinon = $C_6\,H_6\,O_2$. $a : c = 1 : 0,6591$. Combination: $+ R$, $\infty P\,2$. Doppelbrechung +, schwach.

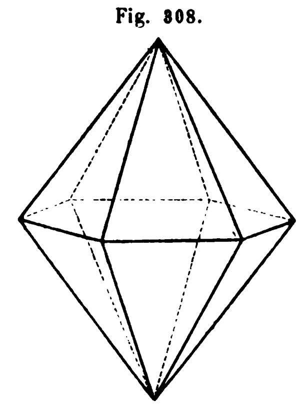
Thymol = $C_{10}\,H_{14}\,O$. $a : c = 1 : 1,5685$. $+ R$, $-\frac{1}{2}R$, oR. Doppelbrechung +.

c) Die pyramidale Hemiëdrie.

§. 67. 1) Indem von den 4 Flächen einer dihexagonalen Pyramide, welche zwischen den durch zwei Nebenaxen gehenden Symmetrieebenen

Fig. 307.

Fig. 308.



liegen, zwei über einander liegende (Fig. 307) verschwinden, bleibt eine hemiëdrische Form Fig. 308 übrig, welche einer hexagonalen Pyramide entspricht, da ihre Kanten theils horizontale Basiskanten, identisch mit den abwechselnden Basiskanten der holoëdrischen Gestalt, theils Polkanten sind, welche sämmtlich gleiche Winkel haben. Die so entstehende hexagonale Pyramide hat den horizontalen Querschnitt p^3 ... Fig. 309, während p^1 derjenige der Pyramide erster, p^2 der zweiter Ordnung ist, so dass aus der Gleichheit der Winkel zwischen p^3 und p^1 unmittelbar hervorgeht, dass auch p^3 ein gleichwinkliges Hexagon und folglich alle Polkanten dieser hemiëdrischen Form denselben Winkel haben müssen. Wegen ihrer Stellung zwischen der Pyramide erster und zweiter Ordnung heisst die aus der pyrami-

dalen Hemiëdrie hervorgehende Hälftgestalt der dihexagonalen, die **hexagonale Pyramide dritter Ordnung oder der Zwischenrichtung.** Die beiden, einander zur holoëdrischen Form ergänzenden Pyramiden dritter Ordnung, welche nicht enantiomorph sind, da von den Symmetrieebenen der holoëdrischen Formen die reguläre (die Basis) noch als solche geblieben ist, werden bezeichnet:

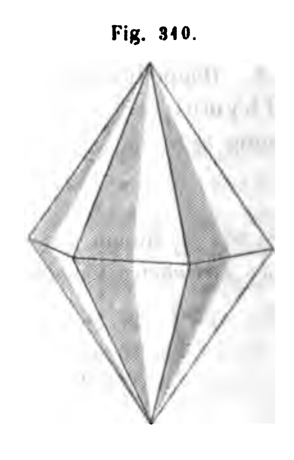
$$+ \text{ und } - \left[\frac{mPn}{2}\right]$$

$$\tfrac{1}{2}\left(a : na : \frac{n}{n-1}\, a : mc\right)$$

$$= \pi\,(\xi h k l).$$

Fig. 309.

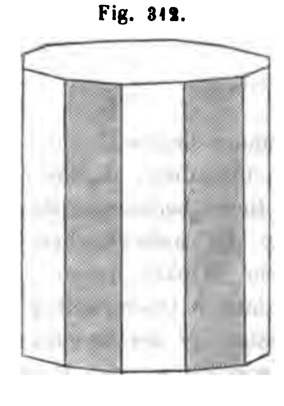
Fig. 310.



2) Die hexagonale Pyramide erster Ordnung, demselben Gesetz der Hemiëdrie unterworfen, Fig. 310, bleibt geometrisch unverändert. Für den Grenzfall $n = 1$ fällt die positive mit der negativen Pyramide dritter Ordnung und mit der holoëdrischen zusammen.

Fig. 311.

Fig. 312.



3) Wie Fig. 311 zeigt, ist das Gleiche der Fall mit der **Pyramide zweiter Ordnung.**

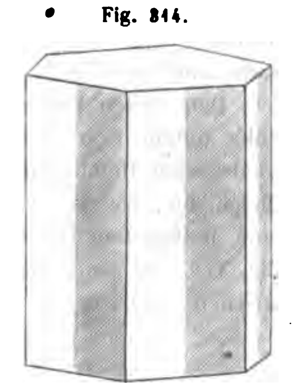
4) Wird dagegen, während n zwischen 1 und 2, $m = \infty$, so fallen die übereinander liegenden Flächen in eine Ebene, und von solchen gehört ab-

wechselnd die eine zur positiven, die andere zur negativen hemiëdrischen Form, Fig. 312. Aus dem dihexagonalen Prisma entstehen somit zwei hexagonale Prismen dritter Ordnung, von denen das eine den Hauptquerschnitt p^3, Fig. 309, besitzt, wenn p^1 und p^2 diejenigen des Prismas der ersten und der zweiten Ordnung sind. Jene Formen sind demnach zu bezeichnen:

$$+ \text{ und } - \left[\frac{\infty P n}{2}\right] = \pi\,(\xi h k 0)$$
$$= \tfrac{1}{2}\left(a : na : \frac{n}{n-1}\,a : \infty c\right).$$

Während das dihexagonale Prisma die Kanten desjenigen erster Ordnung zuschärft, stumpft ein Prisma dritter Ordnung dieselben schief ab.

5) Das hexagonale Prisma erster Ordnung, Fig. 313, in gleicher Weise hemiëdrisch werdend, liefert zwei völlig congruente, scheinbar holoëdrische Formen.


Fig. 313. Fig. 314.

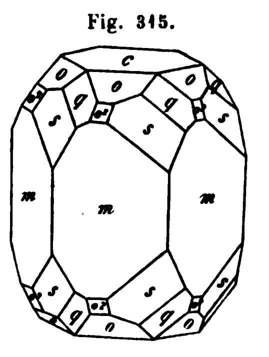
6) Die hemiëdrischen Formen des Prismas zweiter Ordnung, Fig. 314, unterscheiden sich ebenso wenig von einander, wie von der holoëdrischen; endlich

7) bleibt auch die Basis oP unverändert.

Die Krystallformen dieser Hemiëdrie gleichen demnach vollkommen den holoëdrischen, mit Ausnahme der dihexagonalen Pyramiden und Prismen, welche nur mit der Hälfte ihrer Flächen, als Formen der Zwischenrichtung, auftreten.

Beispiele: Natürl. Apatit $= 3\,Ca^3\,P^2\,O^8 + Ca\,Cl^2$. $a : c = 1 : 0{,}7346$. Eine häufig vorkommende Combination zeigt Fig. 315, nämlich $c = oP$, $o = P$, $o^2 = 2P$, $q = 2P2$, $s = \left[\frac{3P\frac{3}{2}}{2}\right]$. Die Zeichen dieser Flächen sind sämmtlich gegeben durch Zonen, wenn wir von o als P ausgehen; denn q liegt in zwei Zonen $o : m$ von links nach rechts und von rechts nach links, o^2 dadurch, dass q seine Polkanten abstumpft, endlich s durch die Zonen $oqsm$ und o^2sm. Doppelbrechung —. Brechungsexponenten für die Linien D und E:

Fig. 315.



D:	$\omega = 1{,}6461$	$\varepsilon = 1{,}6417$
E:	$1{,}6500$	$1{,}6464$

Natürl. Pyromorphit $= 3\,Pb^3\,P^2\,O^5 + Pb\,Cl^2$
und Mimetesit $= 3\,Pb^3\,As^2\,O^5 + Pb\,Cl^2$
gehören der analogen chemischen Zusammensetzung wegen ebenfalls hierher, zeigen aber nur $o\,P$, $\infty\,P$, P.

2) Tetartoëdrische Formen des hexagonalen Systems.

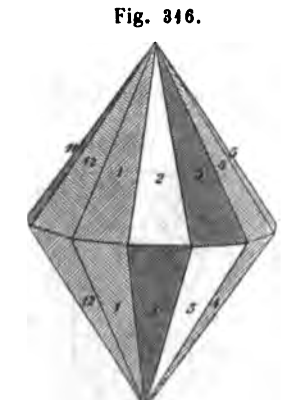
§. 68. **Arten der Tetartoëdrie.** Nach Früherem erhalten wir die verschiedenen möglichen Arten der Tetartoëdrie dadurch, dass wir auf den allgemeinen Repräsentanten aller hexagonalen Formen, d. i. eine dihexagonale Pyramide, zwei Arten der Hemiëdrie gleichzeitig anwenden, und alsdann untersuchen, ob die so entstehenden viertelflächigen Gestalten den allgemeinen Bedingungen der Hemiëdrie (§. 38) noch genügen. Während uns im regulären System die Anwendung je zweier von den drei Hemiëdrien stets zu derselben Tetartoëdrie führte, erhalten wir im hexagonalen verschiedene Resultate, je nachdem wir die erste Hemiëdrie mit der zweiten, oder die erste mit der dritten, oder endlich die zweite mit der dritten combiniren.

Den ersten Fall stellt Fig. 316 dar, in welcher diejenigen Flächen von links unten nach rechts oben schraffirt sind, welche vermöge der trapezoëdrischen Hemiëdrie ausfallen, dagegen von links oben nach rechts unten diejenigen, welche gemäss dem Gesetze der rhomboëdrischen Hemiëdrie die eine Hälftgestalt bilden. Numerirt man die Flächen ebenso, wie in der Fig. 316, so sind die ausfallenden Flächen, in derselben Richtung durchstrichen, wie sie dort schraffirt sind, folgende:

oben: ~~1~~ 2 ~~3~~ ~~4~~ ~~5~~ 6 ~~7~~ ~~8~~ ~~9~~ 10 ~~11~~ 12
unten: ~~1~~ ~~2~~ 3 ~~4~~ ~~5~~ ~~6~~ 7 ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ 11 ~~12~~.

Die zwischen 1 und 2 liegende Symmetrieebene enthält eine horizontale Symmetrieaxe, welche in einem bestimmten Abstande statt von vier, nur von einer Fläche (2 oben) der tetartoëdrischen Form geschnitten wird; die nächste gleichwerthige Symmetrieaxe, zwischen 3 und 4, wird in demselben Abstand und dem gleichen Winkel ebenfalls von einer Fläche (3 unten) durchschnitten; die dritte gleichartige Halbaxe ganz ebenso von »6 oben«, die vierte von »7 unten«, die fünfte von »10 oben«, die sechste endlich von »11 unten«. Was die beiden Seiten der Hauptaxe betrifft, so wird die obere von den Flächen 2, 6 und 10, die untere in demselben Abstande von 3, 7, 11 geschnitten, und aus der Vertheilung dieser Flächen, zwischen denen jedesmal drei der dihexagonalen Pyramide fehlen, ersieht man unmittelbar, dass die dreikantige Ecke, welche die drei oberen Flächen mit einander bilden, dieselben drei gleichen Winkel haben muss, wie die von den drei unteren gebildete Ecke. Die so erhaltene tetarto-

Fig. 316.



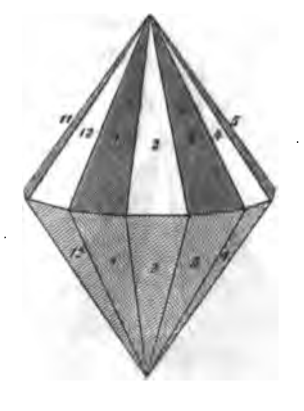
ëdrische Form (das weiterhin zu besprechende »trigonale Trapezoëder«) genügt also allen Bedingungen der Hemiëdrie, und das Zusammenwirken der trapezoëdrischen und der rhomboëdrischen Hemiëdrie liefert uns somit eine mögliche Art der Tetartoëdrie, die trapezoëdrische genannt.

Combinirt man die trapezoëdrische mit der pyramidalen Hemiëdrie, Fig. 317, in welcher die erstere durch Schraffirung von links unten nach rechts oben, die letztere durch solche von links oben nach rechts unten angedeutet ist, so werden, in derselben Richtung durchstrichen, folgende Flächen in Fortfall kommen:

oben: ~~1~~ 2 ~~3~~ 4 ~~5~~ 6 ~~7~~ 8 ~~9~~ 10 ~~11~~ 12
unten: ~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ ~~4~~ ~~5~~ ~~6~~ ~~7~~ ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ ~~11~~ ~~12~~.

Es bleiben also nur oben sechs Flächen, die Hälfte einer hexagonalen Pyramide dritter Ordnung (der pyramidalen Hemiëdrie), übrig, es entsteht demnach eine Gestalt, von deren Flächen nicht gleich viele jede der beiden Hälften der Hauptaxe schneiden, welche somit nicht den allgemeinen Bedingungen der Hemiëdrie genügt. Die trapezoëdrische und die pyramidale Hemiëdrie liefern zusammen keine mögliche Tetartoëdrie.

Fig. 317.

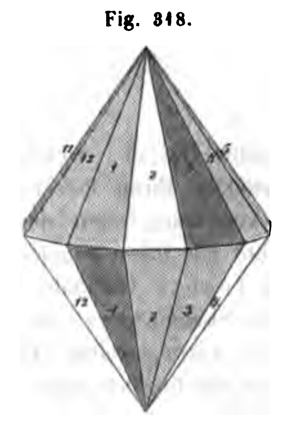


Endlich kann noch die rhomboëdrische mit der pyramidalen Hemiëdrie zur Erzeugung einer Tetartoëdrie combinirt werden. In Fig. 318 entspricht die von links ansteigende Schraffirung der ersteren, die von links abfallende der letzteren. Welche Flächen übrig bleiben, ersieht man leicht aus dem folgenden Schema, in welchem die ausfallenden Flächen in derselben Richtung durchstrichen sind:

oben: ~~1~~ 2 ~~3~~ ~~4~~ ~~5~~ ~~6~~ ~~7~~ ~~8~~ ~~9~~ 10 ~~11~~ ~~12~~
unten: ~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ 4 ~~5~~ ~~6~~ ~~7~~ 8 ~~9~~ ~~10~~ ~~11~~ 12.

Es zeigt sich, dass die 6 Flächen der so entstehenden tetartoëdrischen Form eine ganz andere Vertheilung haben, als in dem ersten Falle. Die in der Symmetrieebene, welche zwischen die Flächen 1 und 2 fällt, liegende halbe Zwischenaxe wird von »2 oben«, die nächste gleichwerthige von »4 unten«, die dritte von »6 oben«, die vierte von »8 unten«, die fünfte von »10 oben«, die sechste von »12 unten«, stets in demselben Abstande geschnitten. Da nun aber »8 unten« die parallele Gegenfläche von »2 oben«, »12 unten« diejenige von »6 oben«, »4 unten« die von »10 oben« ist, so besteht die tetartoëdrische Form aus drei oberen Flächen der di-

Fig. 318.



hexagonalen Pyramide, zwischen denen jedesmal 3 fehlen, welche also oben eine dreikantige Ecke bilden, — und den drei parallelen unteren; dieselbe hat folglich die Gestalt eines Rhomboëders, und die drei unteren Flächen müssen die untere Hälfte der Hauptaxe in demselben Abstande und in derselben dreikantigen Ecke schneiden, wie die drei oberen die obere. Diese viertelflächige Gestalt entspricht also vollkommen den allgemeinen Bedingungen der Hemiëdrie, und wir haben somit die zweite und letzte Art der Tetartoëdrie des hexagonalen Krystallsystems aufgefunden, welche man die rhomboëdrische nennt.

a) Die trapezoëdrische Tetartoëdrie.

§. 69. **Die Krystallformen der trapezoëdrischen Tetartoëdrie.** 1) Die dihexagonale Pyramide Fig. 319 zerfällt durch die rhomboëdrische Hemiëdrie in ein positives und ein negatives Skalenoëder. Das erstere enthält die folgenden Flächen:

oben: 1 2 . . 5 6 . . 9 10 . .
unten: . . 3 4 . . 7 8 . . 11 12

Fig. 319.

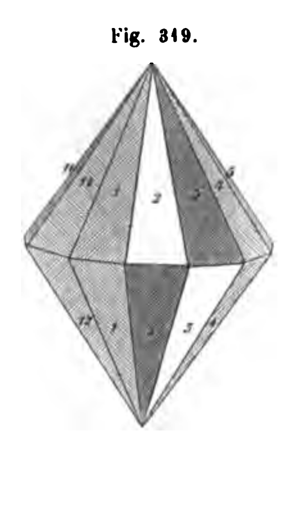
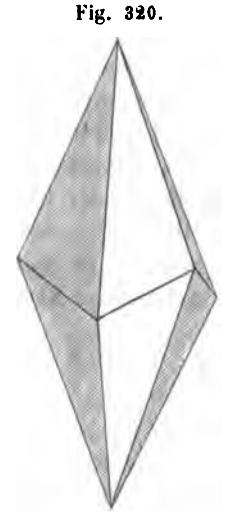


Fig. 320.



und ist in Fig. 320 für sich dargestellt. Wählt man von dessen 12 Flächen abermals die Hälfte aus, indem man auf die holoëdrische Form das Gesetz der trapezoëdrischen Hemiëdrie anwendet, so entstehen daraus zwei Tetartoëder, von denen das eine von folgenden Flächen gebildet wird:

. 2 . . . 6 . . . 10 . .
. . 3 . . . 7 . . . 11 .

Diese Flächen sind in Figg. 319 und 320 weiss gelassen, und sie umschliessen die in Fig. 321 *a* dargestellte Gestalt, welche nach der Trapezform ihrer Flächen und der Dreikantigkeit ihrer Polecken das trigonale Trapezoëder genannt wird. Da von dem, oben dem Beobachter zugekehrten Flächenpaare 1 und 2 die rechte mit ihren zugehörigen jene Form zusammensetzt, so heisst dieselbe das rechte trigonale Trapezoëder. Die sechs anderen Flächen des positiven Skalenoëders, in Fig. 320 schraffirt, bilden die in Fig. 321 *b* dargestellte Form, welche das linke Trapezoëder heisst, weil zu demselben die linke Fläche des oben bezeichneten Flächenpaares gehört. Da das Skalenoëder nur symmetrisch ist zu den sechs Ebenen, welche durch je eine

längere und eine kürzere Polkante gehen, d. h. zu den Flächen des Prismas zweiter Ordnung, einem Trapezoëder aber jedesmal nur die Flächen auf der einen Seite einer solchen Ebene, die auf der anderen dem entgegengesetzten zugehören, so ist das eine Trapezoëder symmetrisch zum anderen in Bezug auf jene Ebenen, besitzt aber selbst keine Symmetrieebenen, d. h. das rechte und linke Trapezoëder sind enantiomorph, sie können durch keine Drehung zur Congruenz gebracht werden.

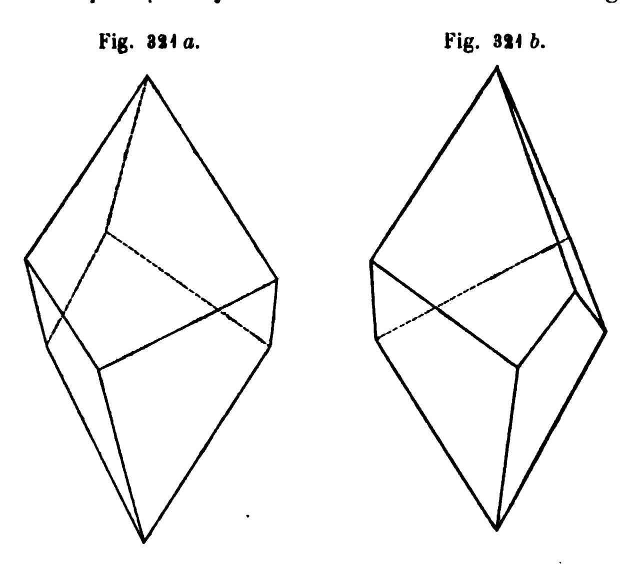


Fig. 321 *a*. Fig. 321 *b*.

Das negative Skalenoëder besitzt die gleiche Gestalt, wie das positive, und unterscheidet sich nur durch seine um 60° oder 180° gedrehte Stellung von demselben; lässt man dieses nun abermals hemiëdrisch werden, so resultiren bei derselben Art der Auswahl der Flächen daraus wiederum ein rechtes Trapezoëder, welches mit dem vorerwähnten rechten gleiche Gestalt hat, und ein linkes, welches sich ebenfalls von dem linken, aus dem positiven Skalenoëder entstehenden, nur durch die Stellung unterscheidet. Die dihexagonale Pyramide zerfällt also durch diese Tetartoëdrie in vier Viertelgestalten, welche wir analog denen des regulären Systems bezeichnen:

1) Rechtes positives Trapezoëder $= + \frac{mPn}{4}\, r,$

2) Linkes positives Trapezoëder $= + \frac{mPn}{4}\, l,$

3) Rechtes negatives Trapezoëder $= - \frac{mPn}{4}\, r,$

4) Linkes negatives Trapezoëder $= - \frac{mPn}{4}\, l.$

Von diesen vier Formen sind 1 und 2, sowie 3 und 4 enantiomorph, dagegen 1 und 3, sowie 2 und 4 congruent. Die Miller'sche Bezeichnung dieser Tetartoëdrie ist

$$\varkappa\pi\ (\xi h k l).$$

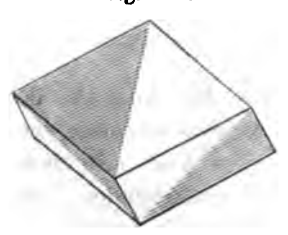
Ein trigonales Trapezoëder besitzt sechs (drei obere und drei untere) einander gleiche Polkanten, ferner drei schärfere und drei stumpfere Mittelkanten, von denen die letzteren identisch sind mit den Mittelkanten des zugehörigen Skalenoëders.

Trigonale Trapezoëder hat man bisher nur in Combinationen, und zwar mit den einfacheren Formen dieser Tetartoëdrie, beobachtet, daher dieselben erst nach diesen (bei den Beispielen) betrachtet werden sollen.

2) Eine hexagonale Pyramide erster Ordnung, derselben Tetartoëdrie unterworfen, Fig. 322, liefert ein Rhomboëder, welches sich nicht von dem hemiëdrischen unterscheidet. Bekanntlich ist jedes Rhomboëder die Grenzgestalt einer Reihe von Skalenoëdern, deren Flächenpaare mit den Flächen jenes Rhomboëders zusammenfallen, wenn die Ableitungszahl n' (s. §. 64) $= 1$ ist. Von diesen Flächenpaaren gehört in der Tetartoëdrie jedesmal die eine Fläche dem rechten, die andere dem linken Trapezoëder an; für diesen Grenzfall, der in Fig. 323 dargestellt ist, fällt somit das rechte Trapezoëder (weiss) mit dem linken (schraffirt) zusammen, und beide unterscheiden sich geometrisch nicht von dem hemiëdrischen Rhomboëder. Ebenso liefern das rechte und linke negative Trapezoëder als gemeinschaftliche Grenzform das negative Rhomboëder, daher diese beiden Gestalten ganz ebenso, wie in der Hemiëdrie, mit $+ mR$ und $- mR$ (die primären mit $\pm R$) bezeichnet werden.

Fig. 322.

Fig. 323.



In den Combinationen der Rhomboëder mit den Trapezoëdern tritt der Unterschied des rechten von dem linken, obgleich beide geometrisch zusammenfallen, hervor, indem z. B. statt der Zuschärfung der Polkanten eines Rhomboëders (Skalenoëder) nur einseitig, entweder rechts oder links, geneigte schiefe Abstumpfungen auftreten.

3) Die Pyramide zweiter Ordnung Fig. 324 liefert in dieser Tetartoëdrie eine aus sechs Flächen bestehende Form, nämlich den drei abwechselnden oben und den darunter liegenden (nicht den alternirenden) drei unteren. Dieselbe heisst trigonale Pyramide und besitzt drei einander gleiche Basiskanten, und sechs ebenfalls einander gleiche Polkanten. Die in Fig. 325*a* dargestellte, entsprechend den weiss gelassenen Flächen in Fig. 324, ist diejenige Form, in welche das positive rechte Trapezoëder übergeht, wenn $n = 2$ wird; Fig. 325*b* dagegen zeigt die Grenzform des linken positiven Trapezoëders für denselben Fall. Aus

Fig. 324.

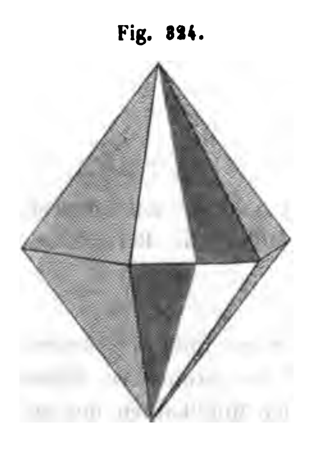


Fig. 324 ist unschwer zu ersehen, dass die erste trigonale Pyramide zugleich die Grenzform der linken negativen Trapezoëder, und Fig. 325 *b* die

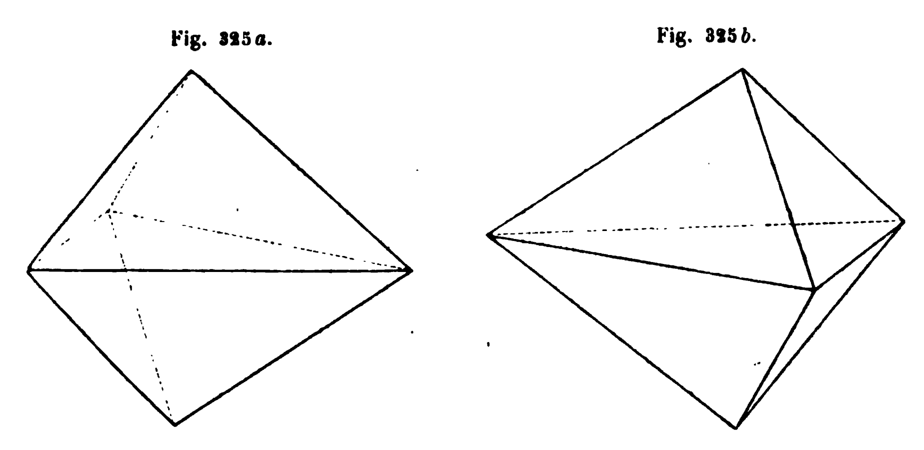


Fig. 325 *a*. Fig. 325 *b*.

gemeinschaftliche Grenzform der linken positiven und der rechten negativen ist, sobald *n* den Werth 2 annimmt.

Auch die trigonalen Pyramiden, mit

$$\frac{mP2}{4} r \text{ die erste}$$

$$\text{und } \frac{mP2}{4} l \text{ die zweite,}$$

zu bezeichnen, kommen nur in Combinationen vor, welche bei den Beispielen zu erläutern sind.

4) Wenden wir auf ein **dihexagonales Prisma** dasselbe Gesetz der Tetartoëdrie, wie auf die dihexagonale Pyramide Fig. 319, an, so ist aus Fig. 326 ersichtlich, dass das rechte positive Trapezoëder für den Fall $m = \infty$ übergeht in eine Form, welche statt von sechs, nur von drei Paaren ver-

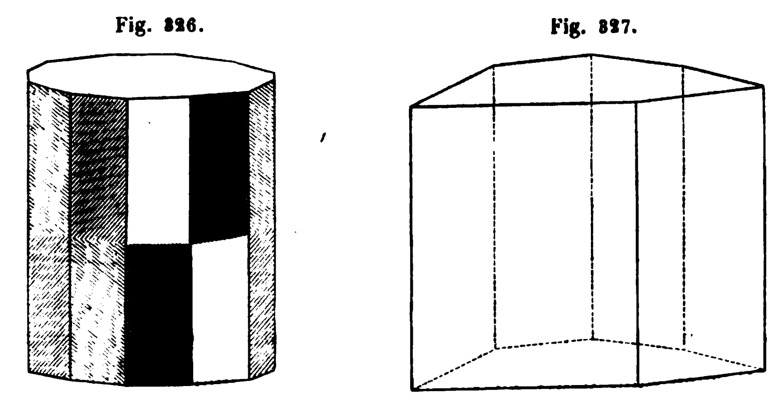


Fig. 326. Fig. 327.

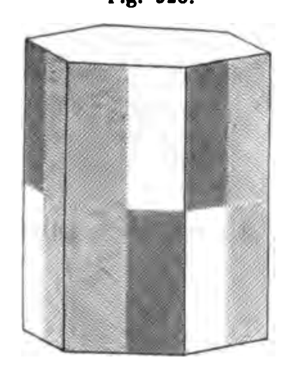
ticaler Flächen gebildet wird und in Fig. 327 in Combination mit der Basis dargestellt ist. Sie wird **ditrigonales Prisma** genannt und besitzt drei

schärfere und drei stumpfere verticale Kanten, deren letztere denselben Winkel haben, wie diejenigen Kanten der holoëdrischen Form, in denen die Nebenaxen endigen.

Da ein dihexagonales Prisma die Kanten des hexagonalen erster Ordnung zuschärft, so erscheint ein ditrigonales nur als Zuschärfung von je drei abwechselnden Kanten desselben.

Das oben dargestellte Prisma $\frac{m\,P\,n}{4}\,r$ ist die gemeinschaftliche Grenzform des rechten positiven und des linken negativen Trapezoëders, das ganz gleich gestaltete, aber 180° dagegen gedrehte, $\frac{\infty\,P\,n}{4}\,l$ ist die gemeinschaftliche Grenzform des linken positiven und des rechten negativen Trapezoëders.

Fig. 328.



5) Das **hexagonale Prisma erster Ordnung** bleibt in dieser Tetartoëdrie völlig unverändert, wie aus Fig. 328 zu ersehen. Es ist die gemeinschaftliche Grenzform aller vier Trapezoëder, wenn die Coëfficienten der dihexagonalen Pyramide $m = \infty$ und $n = 1$ werden.

6) Dagegen zerfällt das **hexagonale Prisma zweiter Ordnung** Fig. 329 in zwei **trigonale Prismen**, deren eines Fig. 330, die gemeinschaftliche Grenzgestalt des rechten positiven und linken negativen, das andere, um 180° gedrehte, diejenige des linken positiven und

Fig. 329.

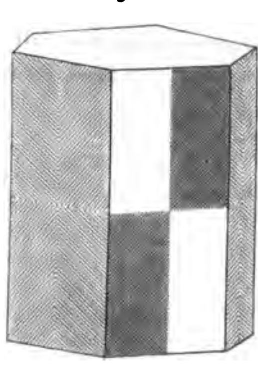
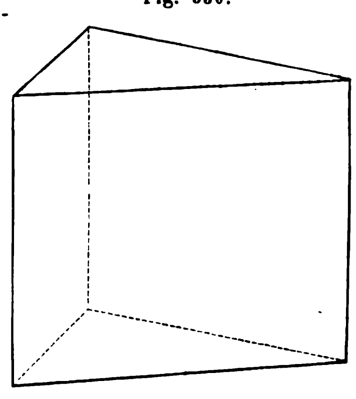


Fig. 330.



des rechten negativen Tetartoëders ist, wenn $m = \infty$ und $n = 2$. Die beiden Formen sind daher zu bezeichnen $\frac{\infty\,P\,2}{4}\,r$ und $\frac{\infty\,P\,2}{4}\,l$.

Das erstere ist zugleich das Endglied der Reihe der trigonalen Pyramiden $\frac{m\,P\,2}{4}\,r$, welche sich demselben um so mehr nähern, je mehr m sich

dem Grenzwerth ∞ nähert; das zweite, $\frac{\infty P2}{4}$ l, ebenso das Endglied der Reihe der linken trigonalen Pyramiden.

Während das hexagonale Prisma zweiter Ordnung alle Kanten desjenigen erster Ordnung gerade abstumpft, tritt ein trigonales in derselben Weise nur an den abwechselnden drei Kanten desselben auf.

7) Dass die Basis, gewöhnlich als untere Grenzform der Reihe der Rhomboëder mit oR bezeichnet, die Gestalt ist, in welche alle vier Tetartoëder einer dihexagonalen Pyramide übergehen, wenn $m = 0$ ist, bedarf keiner weiteren Erläuterung.

§. 70. **Circularpolarisation der trapezoëdrisch tetartoëdrischen Krystalle. Beispiele.** Wir haben im vorigen § gesehen, dass zwei Formen, die Basis und das Prisma erster Ordnung, in dieser Tetartoëdrie unverändert bleiben; ein Körper, welcher nur die Flächen dieser beiden zeigte, wäre daher geometrisch nicht von einem holoëdrischen zu unterscheiden. Wie aber bereits früher bemerkt wurde, zeigen alle Substanzen, deren Krystalle einer enantiomorphen Hemiëdrie oder Tetartoëdrie angehören und entweder isotrop oder einaxig sind, die Erscheinungen der Circularpolarisation. Beobachtet man diese also in der Richtung der optischen Axe an einem Krystall, welcher nur von dem Prisma erster Ordnung und der Basis gebildet wird, so kann derselbe nicht holoëdrisch sein, sondern muss einer enantiomorphen Hemiëdrie oder Tetartoëdrie angehören; eine solche ist aber sowohl die trapezoëdrische Hemiëdrie (§. 62), als die im vorigen § betrachtete trapezoëdrische Tetartoëdrie; um zu entscheiden, welcher von diesen beiden Abtheilungen der Krystall zuzurechnen ist, bedarf es noch der Beobachtung weiterer Flächen an demselben. Es genügen zu diesem Zwecke die einer Pyramide erster Ordnung, welche anscheinend holoëdrisch auftritt in der trapezoëdrischen Hemiëdrie, dagegen als Rhomboëder in der gleichnamigen Tetartoëdrie. Sobald wir also an einem hexagonalen Krystall rhomboëdrische Formenausbildung und zugleich Circularpolarisation wahrnehmen, so ist damit entschieden, dass er der trapezoëdrischen Tetartoëdrie angehört. In der That sind an den Krystallen der unten folgenden Beispiele z. Th. nur Formen beobachtet, denen zufolge dieselben auch der rhomboëdrischen Hemiëdrie angehören könnten, wenn sie nicht circularpolarisirend wären. Ohne die letztere Eigenschaft ist die trapezoëdrische Tetartoëdrie natürlich schon durch die Krystallform erwiesen, sobald das Auftreten von trigonalen Pyramiden oder Trapezoëdern beobachtet ist.

Folgende sind die bis jetzt bekannten Substanzen dieser Abtheilung:

Zinnober HgS. $a : c = 1 : 1{,}1448$. Die gewöhnliche Combination Fig. 331 zeigt $c = oR$, $\frac{r}{3} = +\frac{1}{3}R$, $r = +R$, $m = \infty R$; als Seltenheit hat man beobachtet $\frac{\infty P}{4}$ als schmale Abstumpfung der abwechselnden Prismenkanten und kleine Flächen von trigonalen Trapezoëdern. Spaltbar-

keit nach ∞R ziemlich vollkommen. Die Krystalle besitzen das stärkste Drehungsvermögen der Polarisationsebene, welches überhaupt existirt, indem dasselbe nach Des Cloizeaux, welcher es entdeckte (Ann. d. mines, XI, 339), 15 mal so gross, als das des Quarzes ist. Doppelbrechung $+$; $\omega = 2{,}854$. $\varepsilon = 3{,}201$ Roth.

Fig. 331.

Quarz $= SiO^2$. $a : c = 1 : 1{,}0999$. Gewöhnliche Combination Figg. 332 und 333: $m = \infty R$, $r = + R$, $r' = - R$, letzteres gewöhnlich kleiner als r (diese beiden Rhomboëder haben Polkanten von 94° 14′, sind also sehr würfelähnlich); $s = \frac{2P2}{4}$, wie sich aus seiner Lage in zwei Zonen ergiebt, deren jede von einer Rhomboëder- und einer Prismenfläche bestimmt wird*); in derselben Zone, als Abstumpfungen derjenigen Combinationskante $s : m$, welche entweder rechts oder links unter r (nicht unter r') liegt, erscheinen nun die gewöhnlicheren trigonalen Trapezoëder, unter denen das häufigste $x = \frac{6P\frac{6}{5}}{4}$ **). Da wir r zum positiven primären Rhomboëder gewählt haben, so ist das in Fig. 332 dargestellte $x = + \frac{6P\frac{6}{5}}{4}\,r$, das in Fig. 333 $= + \frac{6P\frac{6}{5}}{4}\,l$. Ausser diesen Trapezoëdern finden sich noch andere positive, meist in derselben Zone gelegene, während solche, deren Flächen unter r' liegen, und welche wir daher als negative Trapezoëder zu bezeichnen haben (Hälften der negativen Skalenoëder), ziemlich selten auftreten. In Bezug auf das Zusammenvorkommen der verschiedenen Arten von Formen sind, vorzüglich durch G. Rose (Abhandl. der Berl. Akad. 1844), folgende Gesetzmässigkeiten erkannt worden: es giebt zweierlei Quarzkrystalle: 1) rechte; diese zeigen $+R$, $-R$, verschiedene andere Rhomboëder, ∞R; ferner $\frac{2P2}{4}$ nur rechts von $+R$, positive Trapezoëder unter $+R$ nur rechts (s. Fig. 332), daneben seltener und untergeordnet negative Trapezoëder unter $-R$, diese aber nur links; 2) linke mit $+R$, $-R$, anderen

*) In derselben Zone liegt ausser der ersteren auch noch die ihr benachbarte Rhomboëderfläche, woraus sich das Zeichen der trigonalen Pyramide ebenfalls ergiebt, wie es für die holoëdrische Combination S. 267 schon abgeleitet worden ist.

**) Die Bedingung, welche das Zeichen mPn erfüllen muss, damit die Flächen der Form in der besprochenen Zone liegen, ergiebt sich folgendermassen: die Indices einer solchen sind m, mn, n, die der Prismenfläche 1 1 0, der seitlich anliegenden Rhomboëderfläche 0 1 1, also müssen die ersteren der Gleichung

$$-m + mn - n = 0$$

genügen; dies giebt die Bedingung

$$n = \frac{m}{m-1}$$

(Beispiele: $6P\frac{6}{5}$, $4P\frac{4}{3}$ u. s. w.).

Rhomboëdern und ∞R, wie die vorigen; dagegen $\frac{2P2}{4}$ nur links von $+R$, positive Trapezoëder unter $+R$ nur links (s. Fig. 333), daneben seltener und untergeordnet negative Trapezoëder unter $-R$, diese aber nur rechts. Es findet sich demnach an den Krystallen der ersten Klasse neben rechten positiven und linken negativen Trapezoëdern nur diejenige trigonale Pyramide, welche zu den gemeinschaftlichen Grenzformen jener gehört; an den Krystallen der zweiten Art nur linke positive und rechte negative Trapezoëder, sowie die andere trigonale Pyramide, welche deren gemeinsame Grenzform für den Fall $n = 2$ ist. Niemals finden sich an einem einfachen Quarzkrystall von den letztgenannten drei Arten von Formen (trigonale Pyramiden, positive und negative Trapezoëder), die den beiden Klassen entsprechenden zusammen, vielmehr schliessen diese Formen einander vollkommen aus, z. B. giebt es keinen einfachen Quarzkrystall mit einem rechten und einem linken positiven Trapezoëder oder mit beiden trigonalen Pyramiden. Dieses Ausschliessen der entgegengesetzten enantiomorphen Formen steht nun in gesetzmässigem Zusammenhang mit dem Sinn der Drehung der Polarisationsebene des Lichtes durch die Quarzkrystalle; diejenigen der ersten Klasse sind nämlich die rechts drehenden, die der zweiten die links drehenden; es müssten folglich nach diesem Gesetze (von welchem noch keine Ausnahme bekannt ist) Krystalle mit beiderlei Formen ohne Circularpolarisation sein, solche sind aber noch nie beobachtet worden. Das Gesetz des Zusammenhanges zwischen der Krystallform und der Circularpolarisation des Quarzes lautet, wenn dasjenige Rhomboëder, welches meist grösser und glänzender ist, als das entgegengesetzte, und unter welchem die gewöhnlichen Trapezoëder vorkommen, zum positiven gewählt wird, folgendermassen:

Fig. 332.

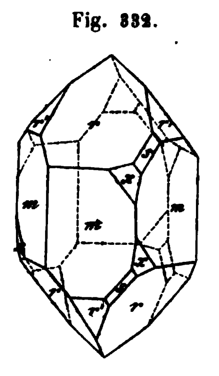
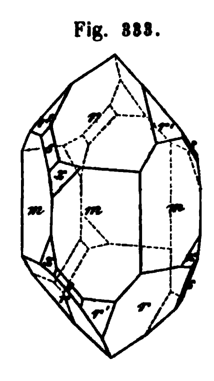


Fig. 333.



1) Rechts drehende Krystalle zeigen die trigonale Pyramide $\frac{2P2}{4}$ rechts von $+R$, sowie rechte positive und linke negative Trapezoëder;

2) die links drehenden Krystalle zeigen $\frac{2P2}{4}$ links von $+R$, sowie linke positive und rechte negative Trapezoëder.

Wählt man das entgegengesetzte Rhomboëder zum positiven, so gilt die erstere der beiden obigen krystallographischen Bezeichnungen für die links, die zweite für die rechts drehenden Krystalle des Quarzes (s. P. Groth, Mon. Ber. der Berl. Akad. 1870).

Die Drehung des Quarzes für 1 Millim. Dicke beträgt für folgende

Fraunhofer'sche Linien nach den Messungen von Stefan (Sitzungsber. der Wien. Akad. 50. Bd. II. Abth. 383):

$$\begin{aligned} \text{für } C &= 17^\circ{,}2 \\ D &= 21{,}7 \\ E &= 27{,}5 \\ F &= 32{,}7 \\ G &= 42{,}4. \end{aligned}$$

Der Quarz ist optisch positiv und besitzt eine sehr schwache Doppelbrechung; die Brechungsexponenten des ordentlichen und ausserordentlichen Strahls sind für dieselben Linien (nach Rudberg):

	ω	ε
C	1,54181	1,55085
D	1,54418	1,55328
E	1,54711	1,55631
F	1,54965	1,55894
G	1,55425	1,56365.

Ueberjodsaures Natrium $= NaJO^4 + 3$ aq. $a : c = 1 : 1{,}094$. Die Krystalle dieses Salzes, dessen Circularpolarisation von Ulrich entdeckt wurde, sind an den beiden Enden verschieden ausgebildet (s. §. 104 unter Hemimorphie), an einem nur die Basis, daher in Fig. 334 nur das andere, in der Richtung der Hauptaxe gesehen, abgebildet ist; hier herrscht das Rhomboëder $r = +R$ vor, dessen Polkanten (deren Winkel 94° 28') abgestumpft durch $\frac{r}{2} = -\frac{1}{2}R$, und zu welchem noch $2r = -2R$ hinzutritt; von den Combinationskanten von r und $\frac{r}{2}$ sind die abwechselnden drei abgestumpft durch ein Trapezoëder, welches bei der obigen Wahl des positiven Rhomboëders die Hälfte eines negativen Skalenoëders, und zwar

Fig. 334.

$$z = -\frac{\frac{8}{15}P\frac{8}{7}}{4}r,$$

darstellt; Krystalle dieser Art sind links drehend. Sind dagegen die drei anderen jener Kanten abgestumpft, d. h. tritt das linke Trapezoëder:

$$-\frac{\frac{8}{15}P.\frac{8}{7}}{4}l$$

auf, so sind die Krystalle rechts drehend. Die durch das Vorherrschen von r naturgemäss erscheinende Wahl desselben als positiven Rhomboëders giebt also hier dieselbe Beziehung, wie beim Quarz, nämlich: 1) Rechts drehende Krystalle zeigen linke negative Trapezoëder; 2) links drehende zeigen rechte negative Trapezoëder. Solche Trapezoëder, welche bei dieser Stellung positiv wären (beim Quarz die gewöhnlichen), kommen nicht vor.

Das überjodsaure Natrium ist optisch positiv und besitzt ziemlich

schwache Doppelbrechung. Die Drehung der Polarisationsebene ist stärker, als beim Quarz, und beträgt:

Linie	
C	19°,4
D	23,3
E	28,5
F	34,2
G	47,1

(Groth, Berl. Akad. Mon. Ber. 1869. Poggendorff's Ann. d. Ph. 137. Bd.).

Unterschwefelsaures Kalium $= K^2S^2O^6$. $a : c = 1 : 0,6467$. $+R$ und $-R$ gleich gross, ∞R, seltener $\frac{\infty P2}{4}$. Doppelbrechung $+$. Drehung:

Linie	
$C =$	6°,2
$D =$	8,4
$E =$	10,5
$F =$	12,3

(Pape, Poggend. Ann. d. Phys. 139. Bd. 225 f.).

Unterschwefelsaures Blei $= PbS^2O^6 + 4$ aq. $a : c = 1 : 1,5160$. Combination von oR, $+R$, $-R$, von denen das vorherrschende zum positiven genommen ist; gewöhnlich nur diese Formen; selten treten hierzu die trigonalen Pyramiden $\frac{\frac{2}{3}P2}{4}$ und $\frac{2P2}{4}$, sowie das Prisma $\frac{\infty P2}{4}$, und zwar: an rechts drehenden Krystallen links von $+R$, an links drehenden rechts davon gelegen. Die Beobachtung Březina's, dass die Pyramide $P2$ oft an benachbarten Ecken, also anscheinend holoëdrisch, vorkommt, dürfte auf Verwachsungen mehrerer Krystalle (s. regelm. Verwachsungen, §. 106) beruhen (Březina, Sitz. Ber. d. Wien. Akad. 64. Bd. I, 1871).

Die Krystalle sind optisch positiv, schwach doppeltbrechend und zeigen folgende Drehung:

Linie	
$C =$	4°,1
$D =$	5,5
$E =$	7,2
$F =$	8,9

(Pape, Poggend. Ann. d. Ph. 139. Bd. 225 f.).

Unterschwefelsaures Calcium $CaS^2O^6 + 4$ aq. Axenverhältniss dem vorigen sehr ähnlich (isomorph). Doppelbrechung $-$, Drehung 2°,1 für Grün (Pape, l. c.).

Unterschwefelsaures Strontium $= SrS^2O^6 + 4$ aq. $a:c = 1:1,5024$. oR, $+R$ und $-R$ in ungefähr gleicher Grösse. Doppelbrechung $-$. Drehung 1°,6 für Grün (Pape, a. a. O.).

Benzil $= C^{14}H^{10}O^2$. $a : c = 1 : 1,630$. Vorherrschend ∞R, an den Enden $+R$ (Polkanten 80° 14'). Drehung 25°,0 f. Natriumlinie. Doppelbrechung $+$, sehr stark.

$$\omega = 1,6588. \quad \varepsilon = 1,6784$$

für die Linie D. (Des Cloizeaux, Compt. rend. de l'Acad. 68. Bd. 310. 1869).

Matico-Stearopten $= C^{10}H^{16}O$. $a : c = 1 : 0{,}3160$. Gewöhnlich nur ∞R, $+R$, seltener die trigonale Pyramide $\frac{4P2}{4} r$ und das Trapezoëder $+\frac{5P\frac{5}{4}}{4} r$ (an rechts drehenden Krystallen). Doppelbrechung schwach und negativ. Brechungsexponenten:

	ω	ε
Lithiumlinie	1,5415	1,5404
Natriumlinie	1,5447	1,5436
Thalliumlinie	1,5488	1,5478.

Für dieselben drei homogenen Farben beträgt die Drehung:

$Li = 1^0\ 41'$
$Na = 2\ \ 4$
$Tl = 2\ \ 28$

(Hintze, Tschermak's mineralog. Mitth. 1874, 227).

b) Die rhomboëdrische Tetartoëdrie.

§. 71. **Die Krystallformen der rhomboëdrischen Tetartoëdrie. Beispiele.** 1) Die dihexagonale Pyramide Fig. 335 zerfällt zunächst durch

Fig. 335.

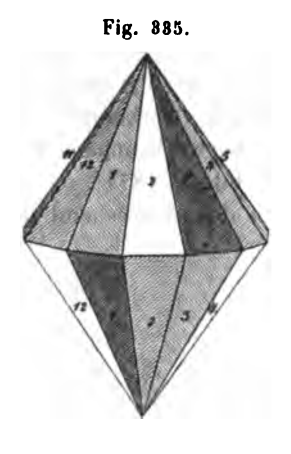
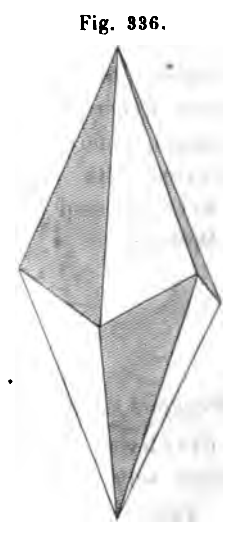


Fig. 336.



die rhomboëdrische Hemiëdrie in ein positives und ein negatives Skalenoëder. Das erstere enthält die folgenden Flächen:

1 2 . . 5 6 . . 9 10 . .
. . 3 4 . . 7 8 . . 11 12

und ist in Fig. 336 für sich dargestellt. Wählt man von dessen 12 Flächen abermals die Hälfte aus, indem man auf die ursprüngliche holoëdrische Ge-

stalt auch noch die pyramidale Hemiëdrie anwendet, so entstehen aus denselben zwei Tetartoëder, deren eines von folgenden Flächen gebildet wird:

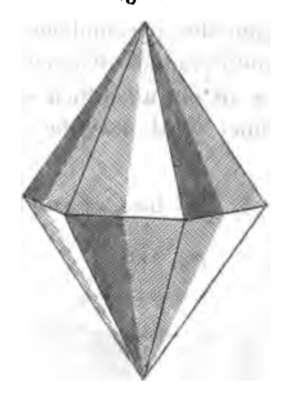
. . 2 . . . . 6 . . . . 10 . .
. . . 4 . . . . 8 12

Diese Form ist, wie bereits S. 294 nachgewiesen wurde, ein Rhomboëder, und da dasselbe weder die Flächenlage einer pyramidalen Form erster, noch einer zweiter Ordnung besitzt, so wird es Rhomboëder dritter Ordnung oder Rhomboëder der Zwischenrichtung genannt und mit

$$+\frac{mPn}{4}\frac{r}{l} \text{ oder } \varkappa''\pi\ (\xi h k l)$$

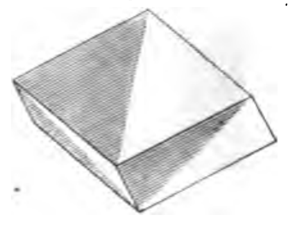
bezeichnet; die 6 schraffirten Flächen des Skalenoëders Fig. 336* bilden ebenfalls ein Rhomboëder dritter Ordnung, $+\frac{mPn}{4}\frac{l}{r}$, von genau derselben Form und nur durch eine Drehung, welche von dem Werthe von m und n abhängt, von dem ersten verschieden. Wir haben es hier also nicht mit einer enantiomorphen Tetartoëdrie zu thun. Selbstverständlich haben die beiden negativen Rhomboëder $-\frac{mPn}{4}\frac{r}{l}$ und $-\frac{mPn}{4}\frac{l}{r}$, welche aus dem negativen Skalenoëder entstehen, ebenfalls eine den beiden ersten congruente Gestalt. Alles, was bei Gelegenheit der rhomboëdrischen Hemiëdrie über die Rhomboëder gesagt wurde, gilt auch hier, mit Ausnahme ihres Auftretens in den Combinationen, welches ihrer abweichenden Stellung wegen ein anderes ist (s. unter Beispiele am Schluss dieses §).

Fig. 337.



2) Die hexagonalen Pyramiden erster Ordnung, nach demselben Gesetz tetartoëdrisch werdend, Fig. 337, liefern dieselben Rhomboëder, welche wir auch in der Hemiëdrie kennen lernten. Sie sind die Grenzgestalten je einer Reihe von Skalenoëdern; deren Flächen fallen dann zu je zwei, von denen eine dem ersten, die andere dem zweiten Rhomboëder dritter Ordnung angehört, zusammen, folglich ist ein Rhomboëder erster Ordnung (die Hälfte einer Pyramide erster Ordnung) die gemeinschaftliche Grenzform des rechten und linken Rhomboëders dritter Ordnung (in Fig. 338 durch Schraffirung des letzteren unterschieden) für den Fall, dass die Ableitungszahl des Skalenoëders (bei der Ableitung aus dem Rhomboëder mit denselben Mittelkanten) = 1 ist. Die Rhomboëder können daher, wie in der Hemiëdrie, mit

Fig. 338.



$$\pm mR$$

bezeichnet werden.

3) Die hexagonalen Pyramiden zweiter Ordnung, dem Gesetz

der rhomboëdrischen Tetartoëdrie unterworfen, Fig. 339, liefern je ein aus sechs abwechselnden Flächen gebildetes »Rhomboëder zweiter Ordnung« als gemeinschaftliche Grenzform des einen positiven und des entgegengesetzten negativen Rhomboëders dritter Ordnung, während die beiden anderen Tetartoëder für den Grenzfall $n = 2$ in dasjenige Rhomboëder zweiter Ordnung zusammenfallen, welches von den übrigen sechs Flächen gebildet wird. Rhomboëder als Theilgestalten der Pyramiden zweiter Ordnung sind nur in dieser Tetartoëdrie möglich. Sie werden bezeichnet:

$$\frac{mP2}{4}\frac{r}{l} \text{ und } \frac{mP2}{4}\frac{l}{r}$$

Fig. 339.

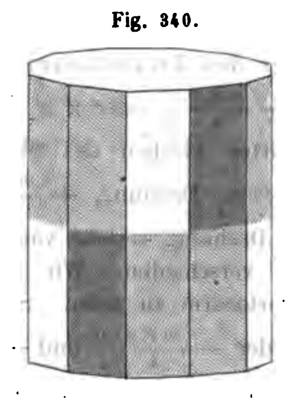


Fig. 340.

4) Die hexagonalen Prismen liefern in dieser Tetartoëdrie, wie aus Fig. 340 hervorgeht, je ein hexagonales Prisma dritter Ordnung, welches sich geometrisch nicht unterscheidet von demjenigen der pyramidalen Hemiëdrie; während dieses indess als eine hexagonale Pyramide dritter Ordnung, deren $m = \infty$, aufzufassen ist, muss man jenes als ein unendlich spitzes Rhomboëder dritter Ordnung betrachten. Bezeichnet wird dasselbe

$$\frac{\infty Pn}{4}\frac{r}{l}$$

5) Das hexagonale Prisma erster Ordnung, Fig. 341, erscheint in der rhomboëdrischen Tetartoëdrie mit seiner vollen Flächenzahl, wie schon daraus folgt, dass es als Rhomboëder, dessen $m = \infty$, nicht weniger Flächen haben kann, als sechs. Wir können es daher, wie in der rhomboëdrischen Hemiëdrie, mit ∞R bezeichnen.

Fig. 341.

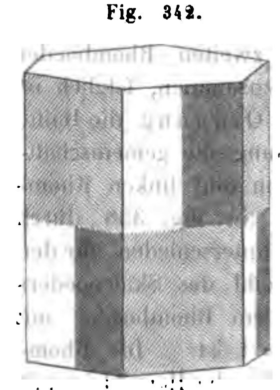


Fig. 342.

6) Das hexagonale Prisma zweiter Ordnung, demselben Gesetz der Tetartoëdrie unterworfen, Fig. 342, giebt eine Form, welche sich ebensowenig, wie vorige, von der holoëdri-

schen unterscheidet und daher auch mit $\infty P 2$ bezeichnet wird. Es ist die gemeinschaftliche Grenzgestalt, in welche die beiden Rhomboëder, welche je aus einer Pyramide zweiter Ordnung entstehen, zusammenfallen, sobald *m* den Maximalwerth ∞ erreicht.

7) Sowohl die Rhomboëder erster Ordnung, wie diejenigen zweiter und dritter, liefern, wenn der Coëfficient $m = 0$ wird, ein und dasselbe Flächenpaar, die Basis $= oR$.

Ueberblicken wir die so resultirenden Formen, so ersehen wir, dass die beiden hexagonalen Prismen und die Basis genau so, wie in der Holoëdrie, erscheinen, dass ferner auch das Auftreten der hexagonalen Prismen dritter Ordnung, welche sich ebenso auch in der pyramidalen Hemiëdrie vorfinden, nicht genügt, um diese Tetartoëdrie nachzuweisen, wohl aber dasjenige der Rhomboëder zweiter Ordnung, da in allen Hemiëdrien die Pyramiden zweiter Ordnung vollflächig, in der trapezoëdrischen Tetartoëdrie als trigonale Pyramiden erscheinen. Sobald also an einem Krystall Rhomboëder beobachtet werden, welche sich von hexagonalen Pyramiden verschiedener Ordnung ableiten, gleichviel, welche derselben man als erster, welche als zweiter Ordnung betrachtet, so kann dieser Krystall keiner andern Abtheilung des hexagonalen Systems angehören, als der rhomboëdrischen Tetartoëdrie. Ebenso unzweifelhaft ist dies natürlich nachgewiesen durch das Auftreten von Rhomboëdern dritter Ordnung in Combination mit anderen Formen, welche sie als solche zu erkennen gestatten.

Beispiele: Der rhomboëdrisch-tetartoëdrischen Abtheilung gehören nur eine kleine Zahl wenig wichtiger Substanzen an; es wird daher genügen, eine einzige derselben, aus der Reihe der in der Natur vorkommenden, hier etwas näher zu betrachten:

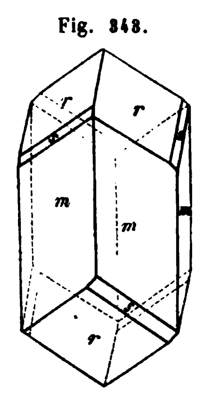


Fig. 343.

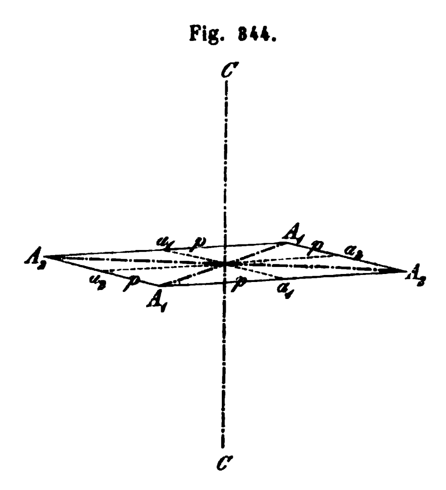
Nat. Dioptas $= H^2\, Cu\, Si\, O^4$. Dieses Mineral findet sich in smaragdgrünen Krystallen, welche nach einem Rhomboëder von 125° Polkantenwinkel spalten. Nimmt man dieses zum primären $+R$, so ist $a : c = 1 : 0{,}5281$, und die in Fig. 343 abgebildete Combination: $r = -2R$ (das Spaltungsrhomboëder stumpft dessen Polkanten ab), $m = \infty P 2$, und das Rhomboëder dritter Ordnung *s*, die Hälftform eines Skalenoëders $-2R\frac{7}{5}$, welches die gleichen Mittelkanten mit $-2R$ hat. Doppelbrechung +, stark. Brechungsexponenten:

$$\omega = 1{,}667, \qquad \varepsilon = 1{,}723.$$

III. Das tetragonale*) Krystallsystem.

§. 72. **Grundform der tetragonalen Krystalle.** Das tetragonale System ist die Gesammtheit aller Formen, welche ausser einer Haupt-Symmetrieebene noch vier andere, senkrecht dazu und einander unter 45° durchschneidend, besitzen. Für die krystallographische Betrachtung werden die Formen, ebenso wie die hexagonalen, stets so gestellt, dass die Haupt-Symmetrieebene horizontal, die Hauptaxe folglich vertical steht. Die tetragonalen Krystallgestalten sind derart beschaffen, dass sie nach einer Drehung von 90° um die Hauptaxe sich selbst wieder genau congruent sind. Seien in Fig. 344 die Geraden A_1, a_1, A_2, a_2 die Durchschnitte der vier Symmetrieebenen mit der Haupt-Symmetrieebene, so heisst jener Satz: die Richtungen A_1 und A_2 können beliebig mit einander vertauscht werden, ebenso a_1 und a_2, ohne die Formen zu ändern. Es sind demnach A_1 und A_2 gleichwerthige Richtungen, ebenso a_1 und a_2.

Fig. 344.



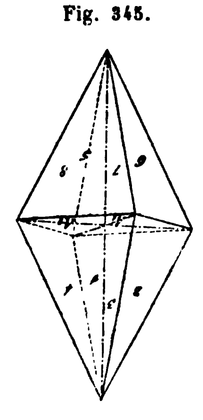
Es wird daher eine Form zu den krystallonomisch möglichen gehören, deren Flächen je zwei dieser gleichwerthigen Richtungen in gleichem Abstande vom Mittelpunkte durchschneiden, deren Durchschnitte mit der Haupt-Symmetrieebene also die Geraden p Fig. 344 sind. Es wird sich der Einfachheit wegen empfehlen, eine solche Form zur Grundform, und zu Axenebenen die Haupt-Symmetrieebene und zwei sich unter 90° schneidende Symmetrieebenen, also zu Axen die Hauptaxe und entweder die beiden Linien A oder die beiden a, zu wählen. Nehmen wir zu diesem Zwecke A_1, A_2**) und die Hauptaxe, und nennen wir die ersteren die beiden

*) Vielfach ist auch der Name »quadratisches System« im Gebrauch.

**) Die Formen sollen stets so gestellt werden, dass A_1 horizontal auf den Beobachter zu, A_2 horizontal quer, und die Hauptaxe vertical läuft.

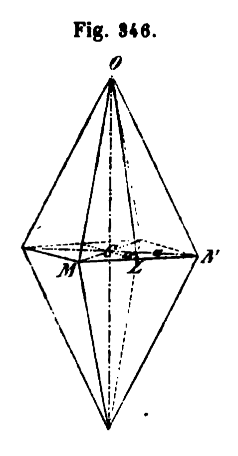
Nebenaxen, so durchschneidet die Fläche 1 (s. Fig. 345) der Grundform, welche in dem Octanten des Raumes, zwischen A_1 und A_2 oberhalb, liegt, die beiden Nebenaxen in gleichem Abstande, die Hauptaxe in einer vorläufig noch unbekannten Entfernung. Da diejenige Ebene, welche die Haupt-Symmetrieebene in A_1 vertical schneidet (kurz: die Ebene A_1), eine Symmetrieebene ist, so muss jene Grundform ausser dieser ersten Fläche noch eine zweite 2 besitzen, welche zu jener in Bezug auf A_1 symmetrisch liegt; da die verticale Ebene durch A_2 ebenfalls eine Symmetrieebene der vollständigen Form ist, so müssen zu derselben noch zwei Flächen 3 und 4 gehören, welche in Bezug auf A_2 symmetrisch zu 1 und 2 liegen; endlich müssen noch, symmetrisch in Bezug auf die Hauptsymmetrieebene zu den genannten, vier untere Flächen 5, 6, 7, 8 vorhanden sein. Die vollständige einfache Krystallform besitzt also 8 Flächen, es ist eine tetragonale Pyramide, Fig. 345, deren sämmtliche Flächen gleiche Neigung gegen die Hauptaxe besitzen.

Fig. 345.



Da die tetragonale Pyramide ebenso, wie die hexagonale, einem physikalisch einaxigen Krystall angehört, so muss die Neigung ihrer Flächen gegen die Hauptaxe in gleicher Weise mit der Temperatur veränderlich sein, d. h. die Pyramide muss bei steigender Temperatur spitzer oder stumpfer werden, je nachdem die Hauptaxe die Axe der grössten oder der kleinsten thermischen Ausdehnung des betreffenden Krystalls ist. Wenn wir die S. 250 u. f. für die hexagonale Pyramide gebrauchten Bezeichnungen sämmtlich in gleicher Weise auf die tetragonale anwenden, so finden wir das Verhältniss $\frac{c}{a}$, in welchem eine Fläche dieser Form die Haupt- und eine Nebenaxe schneidet, oder die Zahl c, wenn $a = 1$ gesetzt wird, in folgender Weise:

Fig. 346.



Sei der Winkel der (horizontalen) Basiskanten, 2β, gemessen, so ist die Hälfte desselben der Winkel β, welchen die Höhe des Dreiecks MNO Fig. 346 mit der Richtung CL bildet; die letztere ist Durchschnittsrichtung einer der Symmetrieebenen a mit der Haupt-Symmetrieebene; nennen wir sie auch hier Zwischenaxe und bezeichnen ihre Länge mit a', so ist

$$\frac{c}{a'} = \operatorname{tg} \beta,$$

und da a' mit a 45°, und mit MN einen Rechten einschliesst, so ist, $a = 1$ gesetzt, $a' = \frac{1}{\sqrt{2}}$ also die gesuchte Zahl, das Parameterverhältniss der Fläche,

$$c = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sqrt{2}}.$$

Ist dagegen der Polkantenwinkel 2π der tetragonalen Pyramide gemessen worden, so berechnet sich c folgendermassen:

Der halbe Polkantenwinkel π ist der Winkel, welchen die Pyramidenfläche mit jeder der beiden verticalen Symmetrieebenen A_1 und A_2 bildet; da letztere sich senkrecht durchschneiden, so sind in dem, durch die drei genannten Flächen gebildeten sphärischen Dreieck, die drei Winkel ($= \pi$, π, 90^0) bekannt, daraus ergiebt sich eine der π gegenüberliegenden Seiten

$$\cos p = \frac{\cos \pi}{\sin \pi} = \operatorname{cotang} \pi$$

und deren Cotangente ist die gesuchte Zahl, also

$$c = \operatorname{cotang} p.$$

Dieselben Betrachtungen, welche S. 252 über die Bedeutung der Zahl c angestellt wurden, gelten wegen der physikalischen Uebereinstimmung zwischen hexagonalen und tetragonalen Krystallen auch für letztere, es muss also c auch hier eine irrationale Zahl sein. Ist dieselbe für eine bestimmte Temperatur durch eine Winkelmessung bestimmt, so sind damit alle Formen, welche an dem Krystall überhaupt möglich sind, gegeben, denn wir kennen nunmehr sämmtliche Elemente (Axenwinkel: 90^0, 90^0, 90^0; Parameterverhältniss der Grundform: $1 : 1 : c$), es sind demnach nur solche Formen krystallonomisch möglich, deren Indices rationale Zahlen sind.

§. 73. **Bezeichnung der tetragonalen Formen durch die Indices.** Nachdem für die tetragonalen Formen die Haupt-Symmetrieebene und zwei gleichwerthige Symmetrieebenen als Axenebenen, eine tetragonale Pyramide als Grundform gewählt worden sind, kann zur Bezeichnung der Formen durch die Indices übergegangen werden. Die 8 Flächen der Grundform Fig. 345 haben offenbar sämmtlich gleiche Indices, nämlich

$$(1\,1\,1) \quad (1\,\bar{1}\,1) \quad (\bar{1}\,\bar{1}\,1) \quad (\bar{1}\,1\,1)$$
$$(1\,1\,\bar{1}) \quad (1\,\bar{1}\,\bar{1}) \quad (\bar{1}\,\bar{1}\,\bar{1}) \quad (\bar{1}\,1\,\bar{1})$$

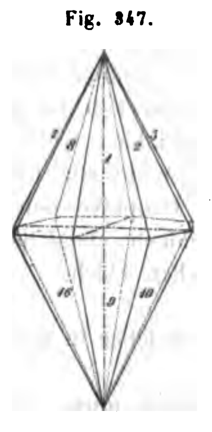
Diese 8 Symbole sind aber zugleich alle möglichen, aus denselben Indices zusammengesetzten; es stellt also auch in diesem System die Gesammtheit aller möglichen Flächen mit denselben Indices eine einfache Krystallform von tetragonaler Symmetrie dar.

Der allgemeinste Ausdruck für eine beliebige Fläche des tetragonalen Krystallsystems ist das Symbol $(h\,k\,l)$; die bereits betrachtete tetragonale Grundform bildet davon den speciellen Fall $h = k = l = 1$. In dem allgemeinen Symbol $(h\,k\,l)$ beziehen sich h und k auf die beiden gleichwerthigen Nebenaxen, die beiden Werthe sind also beliebig vertauschbar, nicht so die dritte Zahl l, welche sich auf die Hauptaxe bezieht. Daraus ergeben sich folgende 16 Flächen mit den Indices h, k, l als möglich:

$$(h\,k\,l) \quad (k\,h\,l) \quad (k\,\bar{h}\,l) \quad (h\,\bar{k}\,l)$$
$$(\bar{h}\,\bar{k}\,l) \quad (\bar{k}\,\bar{h}\,l) \quad (\bar{k}\,h\,l) \quad (\bar{h}\,k\,l)$$
$$(h\,k\,\bar{l}) \quad (k\,h\,\bar{l}) \quad (k\,\bar{h}\,\bar{l}) \quad (h\,\bar{k}\,\bar{l})$$
$$(\bar{h}\,\bar{k}\,\bar{l}) \quad (\bar{k}\,\bar{h}\,\bar{l}) \quad (\bar{k}\,h\,\bar{l}) \quad (\bar{h}\,k\,\bar{l})$$

In Fig. 347 sind diese sämmtlichen Flächen für den speciellen Fall (313), bezogen auf die Grundform Fig. 345, in gleicher Centraldistanz gezeichnet, und bilden, wie man sieht, eine geschlossene Form, welche das vollkommene Analogon der auf gleiche Art entwickelten dihexagonalen Pyramide des vorigen Systems bildet, demnach ditetragonale Pyramide zu benennen ist. Diese Gestalt bildet den allgemeinsten Repräsentanten der tetragonalen Formen, aus welchem alle übrigen als specielle Fälle (dadurch, dass die Indices besondere Werthe, z. B. 0 oder 1, annehmen) sich ableiten. Setzen wir etwa $h = k$, so liefert selbstverständlich die Vertauschung von h und k keine neue Fläche, es befindet sich also in jedem Octanten des Raumes nur eine mögliche Fläche, statt deren zwei, wie im allgemeinen Fall. Diese eine durchschneidet die beiden Nebenaxen in gleichem Abstande, sie bildet also mit den 7 anderen zugehörigen eine tetragonale Pyramide, in dem besonderen Falle, dass $h = k = l$, die zur Grundform gewählte Pyramide. Setzt man einen der beiden Indices h oder $k = 0$, so liefern die Symbole zweier benachbarter Flächen, z. B.

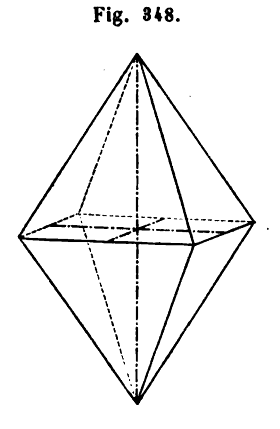
Fig. 347.



$$(k\,0\,l) \text{ und } (k\,\bar{0}\,l)$$

nur eine einzige Fläche, weil $0 = -0$, und ebenso alle folgenden gleichartig benachbarten Flächenpaare der ditetragonalen Pyramide; es giebt also nur 8 Flächen mit den Indices 0, k, l, deren jede einer Nebenaxe parallel ist und welche daher eine tetragonale Pyramide bilden, die sich durch ihre Stellung von den zuerst besprochenen, z. B. von der Grundform, unterscheidet, s. Fig. 348. Ihr horizontaler Querschnitt ist ebenfalls ein Quadrat, dessen Seiten indess den Nebenaxen parallel sind, welches also gegen die Querschnittsfigur der ersten Art von Pyramiden um 45° gedreht erscheint. Diese beiden Arten von Pyramiden unterscheidet man ebenso, wie im hexagonalen System, als solche erster und zweiter Ordnung. Zu den so resultirenden drei Arten von Formen, den ditetragonalen Pyramiden, den tetragonalen Pyramiden erster und denen zweiter Ordnung, erhalten wir nun noch drei weitere, wenn wir den Index der Hauptaxe $l = 0$ setzen. Diese Formen gehen also der Hauptaxe parallel. Endlich giebt es nur noch einen speciellen Fall, nämlich den, dass $h = k = 0$; dies liefert eine Fläche, welche beiden Nebenaxen parallel ist.

Fig. 348.



Es giebt also auch in diesem System sieben verschiedene Arten von

Formen, welche genau den sieben Arten im hexagonalen System entsprechen.

§. 74. **Bezeichnung der tetragonalen Formen durch das Axenverhältniss.** Bei der Bezeichnung der tetragonalen Formen durch die Parameter (Weiss'sche Bezeichnung) denken wir uns diese aufgetragen auf zwei gleichwerthige Normalen zu Symmetrieebenen, die wir wieder Nebenaxen nennen und mit a bezeichnen, und auf die Hauptaxe c. Der allgemeinste Fall ist dann offenbar, dass die Nebenaxen in verschiedenen Abständen, welche sich wie $n : 1$ verhalten (wobei n eine rationale Zahl, wegen der Gleichwerthigkeit der Nebenaxen), geschnitten werden, und dass die Hauptaxe den $m$fachen Parameter der Grundform besitzt (m selbstverständlich ebenfalls rational). Alsdann ist das Parameterverhältniss einer solchen Fläche

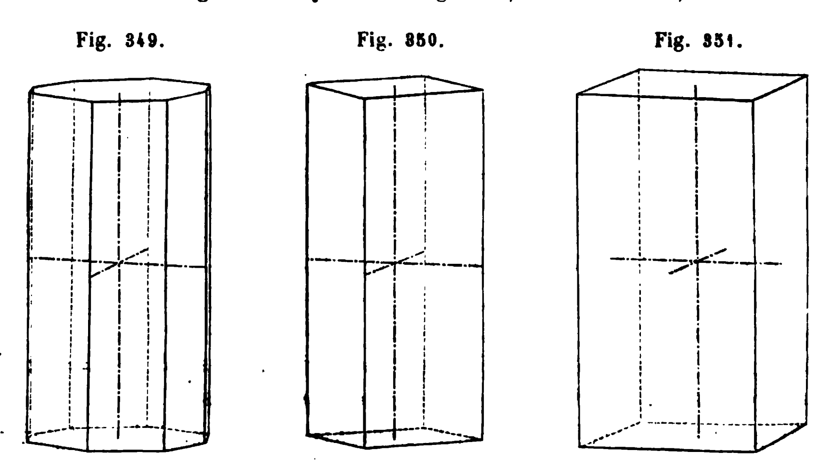
$$= a : na : mc,$$

zu welcher in demselben Octanten noch eine zweite Fläche

$$= na : a : mc$$

gehören muss, welche durch Vertauschung der gleichwerthigen Nebenaxen entsteht. Die analogen Flächenpaare müssen wegen der tetragonalen Symmetrie in allen andern sieben Octanten auftreten, und so entsteht: 1) die vollständige ditetragonale Pyramide (Fig. 347) als Gesammtheit aller möglichen Flächen mit dem Parameterverhältniss $a : na : mc$. 2) Setzen wir $n = 1$, also die Nebenaxen gleich, so kann in jedem Octanten nur eine Fläche existiren, da die Vertauschung der beiden Nebenaxen nun keine neue Fläche mehr liefert; es resultirt eine tetragonale Pyramide erster Ordnung. 3) Lassen wir n den speciellen Werth ∞ annehmen, so durchschneidet die Fläche $a : \infty a : mc$ die Haupt-Symmetrieebene in einer Geraden, welche offenbar der einen Nebenaxe parallel ist; diese Fläche fällt also zusammen mit der benachbarten, welche das Parameterverhältniss $a : -\infty a : mc$ besitzt, und ebenso haben für diesen speciellen Fall je zwei benachbarte Flächen der ditetragonalen Pyramide Fig. 347, wie 2 mit 3, 8 mit 1 u. s. f.

Fig. 349. Fig. 350. Fig. 351.



dieselbe Lage im Raum; also ist die entstehende Pyramide nur eine tetragonale, unterscheidet sich aber von der vorigen durch ihre Stellung und heisst Pyramide zweiter Ordnung. 4) Die Hauptaxe kann unendlich gross werden, d. h. $m = \infty$, während die Nebenaxen verschieden sind; dann resultiren acht der Hauptaxe parallele Flächen, das ditetragonale Prisma (Fig. 349) mit dem Parameterverhältniss $a : na : \infty c$. 5) Das Gleiche kann der Fall sein bei gleichen Nebenaxen, dann liefert das Parameterverhältniss $a : a : \infty c$ nur vier, der Hauptaxe parallele Flächen, deren Durchschnitt durch die Hauptsymmetrieebene zusammenfällt mit demjenigen der tetragonalen Pyramide erster Ordnung mit derselben Fläche. Diese Form ist das tetragonale Prisma erster Ordnung, Fig. 350. 6) Es können bei unendlich grosser Hauptaxe die Nebenaxen im Verhältniss $1 : \infty$ stehen; dann ergeben sich ebenfalls vier der Hauptaxe parallele Flächen, welche aber die Nebenaxen nicht in gleichem Abstande schneiden, sondern paarweise der einen derselben parallel sind, daher ihre Durchschnittsfigur mit der Hauptsymmetrie gleich ist derjenigen der Pyramide zweiter Ordnung. Das Prisma mit dem Parameterverhältniss $a : \infty a : \infty c$ wird deshalb Prisma zweiter Ordnung, Fig. 351, genannt. 7) Endlich kann der Coëfficient beider Nebenaxen $= \infty$ werden; das Axenverhältniss $\infty a : \infty a : c$ liefert nur ein Paar paralleler Flächen, die Basis genannt, welche zugleich der Haupt-Symmetrieebene parallel ist. So giebt uns die Herleitung der möglichen Arten von Formen mit tetragonaler Symmetrie aus den Parameterverhältnissen ebenso sieben Arten, wie es die Ableitung aus den Indices gethan hat.

Da die beiden gleichwerthigen Nebenaxen sich zu einander ganz ebenso verhalten, wie die beiden Zwischenaxen, wir also S. 308 ebenso gut die Richtungen a_1 und a_2 (statt A_1 und A_2) hätten zu Nebenaxen nehmen können, so folgt, dass man die beiden Klassen von tetragonalen Pyramiden, die erste und zweite Ordnung, beliebig mit einander vertauschen, also auch eine Pyramide zweiter Ordnung zur Grundform wählen kann; alsdann werden selbstverständlich alle Pyramiden, sowie das Prisma derselben Ordnung zu solchen erster, die bisherigen Pyramiden und das Prisma erster Ordnung nunmehr zweiter.

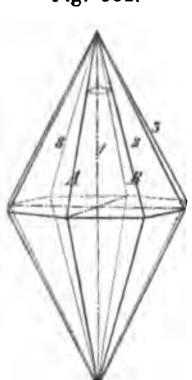
§. 75. **Wahl der Grundform.** Genau dieselben Betrachtungen, welche wir im §. 58 anstellten, können wir hier, auf die tetragonalen Formen angewendet, wiederholen. Wir beobachten in gleicher Weise an einem oder an verschiedenen Krystallen einer tetragonal krystallisirenden Substanz verschiedene Pyramiden gleicher Ordnung, welche aber, wenn wir sie auf gleich lange Nebenaxen reduciren, in einfachem rationalem Verhältniss der Hauptaxen zu einander stehen. Von diesen können wir eine beliebig zur primären Pyramide wählen, welche entweder durch Häufigkeit, durch vorherrschendes Auftreten, durch Spaltbarkeit, oder dadurch, dass sie besonders einfache Coëfficienten der abgeleiteten Pyramiden liefert, ausgezeichnet ist. Da diese Wahl eine conventionelle ist, so findet sich auch hier

oft für eine und dieselbe Substanz das aus den Winkeln der Grundform berechnete Axenverhältniss $1 : c$ bei verschiedenen Autoren verschieden angegeben, wobei aber die Zahlen c derselben in einfachem rationalem Verhältniss stehen, ausser, wenn der Eine diejenige Reihe von Pyramiden als solche erster Ordnung bezeichnet hat, welche ein Anderer zur zweiten Ordnung wählte. In diesem Falle verhalten sich die Werthe von c bei beiden Autoren wie $1 : \sqrt{2}$ oder wie ein rationales Vielfaches dieser Zahl.

Haben wir uns einmal für eine bestimmte Wahl der Grundform entschieden und deren Axenverhältniss bestimmt, so sind nunmehr durch die Kantenwinkel aller übrigen tetragonalen Pyramiden desselben Körpers deren absolute Ableitungszahlen m, d. h. ihr Axenverhältniss $a : a : mc$, gegeben. Dasselbe ist alsdann auch der Fall mit den Ableitungscoëfficienten aller übrigen Formen derselben Krystallreihe, z. B. den etwa noch vorkommenden ditetragonalen Pyramiden $a : na : mc$. Da es sich hierbei um die Bestimmung zweier, von einander unabhängiger Grössen, der Werthe von m und n, handelt, müssen zwei von einander verschiedene Winkel gemessen werden.

An einer ditetragonalen Pyramide, Fig. 352, stossen je zwei benachbarte Flächen an den Nebenaxen, z. B. 1 und 8, unter anderm Winkel zusammen, als die an den Zwischenaxen sich schneidenden, z. B. 1 und 2; eine ditetragonale Pyramide besitzt zweierlei Polkanten. Seien diese beiden bestimmt, z. B. der Winkel, welchen die Fläche 1 mit 8 macht, $= 2\alpha$, derjenige, welchen sie mit 2 einschliesst, $= 2\beta$ gefunden, seien die beiden sich unter 45° schneidenden Symmetrieebenen, in welchen je die Polkanten A und B liegen, mit A und B bezeichnet, so sind in dem sphärischen Dreieck, welches von den Flächen 1, A und B gebildet wird, die drei Winkel gegeben, nämlich 45°, α und β, hieraus sind zwei Seiten desselben zu berechnen, nämlich die Winkel, welche die Polkanten A und B selbst mit der Hauptaxe machen. Durch diese Winkel ist das Verhältniss der Längen sowohl der Nebenaxe, als der Zwischenaxe, zu derjenigen der Hauptaxe bestimmt, und es erübrigt nur noch, aus dem Verhältniss, in welchem die Fläche 1 die Nebenaxe und die 45° damit bildende Zwischenaxe schneidet, dasjenige zu berechnen, in welchem sie dieselbe Nebenaxe und die 90° damit einschliessende zweite Nebenaxe durchschneidet, was mittelst ebener Trigonometrie geschieht. Alsdann kennen wir das Verhältniss zweier Nebenaxen und der Hauptaxe; dadurch, dass wir den kleinsten Werth der Nebenaxen $= 1$ setzen, und die Länge der Hauptaxe alsdann durch c (Hauptaxe der Grundform) dividiren, erhalten wir die Zahlen m und n der betreffenden ditetragonalen Pyramide.

Fig. 352.



Ganz analog ist die Berechnung, wenn eine Polkante und die Basiskante durch Messung bestimmt worden ist.

Wären an den Krystallen einer Substanz keine tetragonalen, sondern nur ditetragonale Pyramiden bekannt, so müsste eine solche zur Bestimmung des Axenverhältnisses dienen, und man hätte ganz ebenso zu verfahren, wie es S. 260 für die dihexagonalen Pyramiden gezeigt worden ist.

Dass hier ebenso wenig, wie im hexagonalen Systeme, das Axenver-

hältniss eines Körpers bestimmt werden kann, wenn die Krystalle desselben nur prismatische Formen (tetragonale und ditetragonale Prismen) zeigen, dass vielmehr sowohl das tetragonale Prisma erster, als das zweiter Ordnung, sowie die verschiedenen ditetragonalen Prismen, für alle tetragonal krystallisirenden Körper identisch sind, bedarf kaum der Erwähnung.

Haben wir dagegen vermittelst einer tetragonalen oder ditetragonalen Pyramide das Axenverhältniss $1 : c$ einer Substanz bestimmt, so ist damit nach dem Gesetz der Rationalität der Indices die Gesammtheit aller übrigen möglichen Formen, d. h. die Krystallreihe der Substanz gegeben, in welche nach der Definition dieses Wortes nur diejenigen Formen gehören, welche sich von der Grundform durch rationale Zahlen ableiten.

Was die Krystallreihen chemisch verschiedener Körper betrifft, so gelten für dieselben wörtlich die S. 261 über die hexagonalen Krystalle angestellten Betrachtungen, die uns zu dem nothwendigen Schlusse führen, dass dieselben in keiner bestimmten Beziehung zu einander stehen, und dass eben so viele, scharf von einander durch Irrationalität ihres Verhältnisses getrennte Krystallreihen im tetragonalen System existiren, als es tetragonal krystallisirende Substanzen giebt.

Im Folgenden werden nun die Formen einer beliebigen tetragonal-holoëdrisch krystallisirenden Krystallreihe und die Art ihrer Combinationen beschrieben, und alles hier Gesagte gilt natürlich für jede andere Krystallreihe desselben Systems, nur mit dem Unterschiede, dass alsdann die Winkel der pyramidalen Gestalten andere, das Axenverhältniss der Grundform ein anderes ist.

1) Holoëdrische Formen des tetragonalen Systems.

§. 76. **Beschreibung und Bezeichnung der holoëdrischen tetragonalen Formen.** 1) Die ditetragonalen Pyramiden Fig. 353 (hkl) durchschneiden die Axen in dem Verhältniss $a : na : mc$, also ist das Weiss'sche Zeichen

$$(a : na : mc)$$

und das ebenso, wie bei den dihexagonalen Pyramiden gebildete Naumann'sche

$$mPn.$$

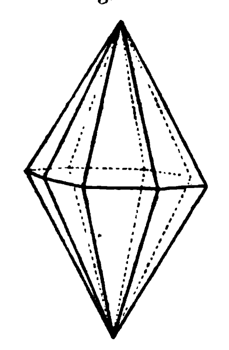


Fig. 353.

Die ditetragonale Pyramide besitzt dreierlei Kanten, nämlich acht Basiskanten und je acht stumpfere und schärfere, mit einander abwechselnde, Polkanten. Eine derartige Pyramide, aber mit 16 genau gleichen Polkanten ist krystallonomisch unmöglich, weil bei derselben die Ableitungszahl $n = \text{tg}\ 67\frac{1}{2}^0 = 2{,}4142\ldots$, also eine irrationale Zahl sein würde. Ist die Zahl n kleiner, als 2,4142, z. B. 2, so sind diejenigen Polkanten die stumpferen, welche vom Pol der Hauptaxe nach denen der Zwischenaxen herablaufen; in diesem Falle ähnelt die Pyramide um so mehr einer tetragonalen erster

Ordnung, je weniger n von 1 verschieden ist; in dem Grenzfall, dass n seinen kleinsten Werth 1 annimmt, ist der Winkel der bezeichneten Polkanten = 180°, d. h. je zwei in einer solchen Polkante an einander stossende Flächen, also die Flächen eines Octanten, fallen in eine Ebene: es resultirt eine tetragonale Pyramide erster Ordnung als untere Grenzgestalt jener Reihe von ditetragonalen. Ist dagegen n grösser, als 2,4142, z. B. 3, so sind die nach den Nebenaxen herablaufenden Polkanten die stumpferen, und zwar um so stumpfwinkeliger, je grösser n ist. Für den Grenzfall $n = \infty$ sind die Basiskanten der Pyramide den Nebenaxen parallel, also werden die oben bezeichneten Polkantenwinkel 180°, d. h. zwei an solchen zusammenstossende, benachbarten Octanten angehörige Flächen fallen in eine Ebene, es entsteht eine tetragonale Pyramide zweiter Ordnung als zweite Grenzgestalt derselben Reihe von ditetragonalen Pyramiden. Die sämmtlichen möglichen ditetragonalen Pyramiden, welche gleiche Ableitungszahl m. aber verschiedene n besitzen, bilden also eine Reihe, deren Endglieder einerseits die tetragonale Pyramide erster Ordnung, andererseits diejenige zweiter Ordnung, mit demselben m, sind. Da die Flächen aller Glieder dieser Reihe, ebenso wie die der beiden Grenzformen, die Haupt- und eine Nebenaxe in demselben Verhältniss, $mc : 1$, schneiden, so müssen die einander entsprechenden Flächen sämmtlich derselben Geraden, welche jene beiden Axen in dem bezeichneten Verhältniss schneidet, parallel sein, also in einer Zone liegen, d. h. die Flächen der ditetragonalen Pyramiden liegen, mit parallelen Combinationskanten, zwischen je einer Fläche derjenigen tetragonalen Pyramide erster Ordnung und derjenigen zweiter Ordnung, mit welchen beiden sie gleiche Ableitungszahl m haben. Wenn zwei solcher ditetragonalen Pyramiden mit einander combinirt erscheinen, so schärft die eine die Polkanten der anderen zu.

Zwei ditetragonale Pyramiden mit gleichem n, aber verschiedenem m, treten so in Combination, dass die flachere als 8-flächige Zuspitzung der 4 + 4kantigen Polecken der anderen erscheint, und die Combinationskanten beider horizontal laufen (vergl. die entsprechenden hexagonalen Combinationen S. 263).

Die ditetragonale Pyramide stellt, ebenso wie im hexagonalen System die dihexagonale, den allgemeinsten Fall einer tetragonalen Krystallgestalt dar, ist also der allgemeine Repräsentant aller anderen, welche gleichsam nur specielle Fälle desselben bilden.

2) Die tetragonale Pyramide erster Ordnung ist derjenige specielle Fall der ditetragonalen, in welchem n den Werth 1 hat. Dieselbe ist also zu bezeichnen durch

$$(hhl) = (a : a : mc) = mP.$$

Unter den verschiedenen Pyramiden einer Krystallreihe wird nach bereits bekannten Grundsätzen eine zur primären gewählt, diese erhält die Zeichen

$$(111) = (a : a : c) = P.$$

Alle abgeleiteten Pyramiden, welche stumpfer sind als diese, haben Indices, unter welchen h grösser als l, während das m des Weiss'schen und Naumann'schen Zeichens ein echter Bruch ist. Bei den spitzeren Pyramiden ist $l > h$ und $m > 1$.

Eine tetragonale Pyramide besitzt acht (vier obere und vier untere) gleiche Polkanten, sowie vier davon verschiedene, unter einander gleiche, Basiskanten.

Da der Hauptquerschnitt aller Pyramiden erster Ordnung dasselbe rechtwinkelige Tetragon ist, so erscheinen je zwei derselben combinirt so, dass die stumpfere die Polecken der spitzeren vierflächig mit horizontalen Combinationskanten zuspitzt, oder diese die Basiskanten jener zuschärft, s. Fig. 354.

Fig. 354.

Eine ditetragonale Pyramide mit einer tetragonalen combinirt, erscheint als Zuschärfung von deren Polkanten, wenn beide gleiche Ableitungszahl m haben, als achtflächige Zuspitzung der Polecken, wenn erstere ein kleineres m besitzt.

3) Die tetragonale Pyramide zweiter Ordnung ist derjenige specielle Fall der ditetragonalen Pyramide, in welchem $n = \infty$ ist. Ihr horizontaler Querschnitt hat dieselbe Form eines rechtwinkeligen Tetragons, wie der der Pyramide erster Ordnung, erscheint aber gegen diesen um 45° gedreht, s. Fig. 355. Das Parameterverhältniss dieser Art von Gestalten ist also

$$(a : \infty a : mc).$$

Fig. 355.

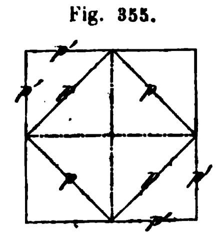
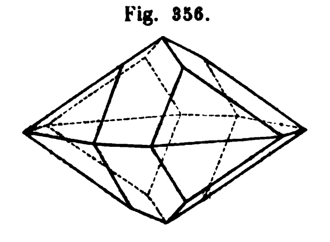


Fig. 355 stellt den Hauptquerschnitt p einer Pyramide erster Ordnung und denjenigen p' der ihr zugehörigen zweiter Ordnung dar, d. h. zweier Pyramiden verschiedener Ordnung mit gleicher Ableitungszahl m. Da eine Fläche der Pyramide zweiter Ordnung die Haupt- und eine Nebenaxe in demselben Verhältniss schneidet, wie eine Polkante, also wie zwei in einer solchen zusammenstossende Flächen der zugehörigen Pyramide erster Ordnung, so liegt sie mit zwei solchen Flächen in einer Zone, d. h. sie stumpft die Polkante der Pyramide erster Ordnung gerade ab. Es stellt demnach Fig. 356 die Combination einer Pyramide erster Ordnung mit der ihr zugehörigen zweiter Ordnung dar. Dieselben sind abgekürzt zu bezeichnen mit mP und $mP\infty$ (letzteres das allgemeine Zeichen der Pyramiden zweiter Ordnung); wenn $m = 1$, d. h. erstere zur primären

Fig. 356.



genommen worden ist, erhält diejenige, welche ihre Polkanten abstumpft, das Zeichen $P\infty$, und wird die primäre Pyramide zweiter Ordnung genannt. Dieselbe ist stumpfer, d. h. hat schärfere Basis und stumpfere Polkanten, als die zugehörige erster Ordnung. Ihr Weiss'sches Zeichen ist:

$$(a : \infty a : c),$$

das Miller'sche (101), dasjenige der Pyramiden zweiter Ordnung überhaupt:

$$(h0l).$$

In den Combinationen zweier Pyramiden verschiedener Ordnung, welche nicht einander zugehörige sind, erscheint diejenige zweiter Ordnung, wenn sie einen kleineren Ableitungscoëfficienten m hat, als die der ersten Ordnung, an dieser als vierflächige Zuspitzung der Polecken, die Zuspitzungsflächen auf die Kanten gerade aufgesetzt, Fig. 357. Ist dagegen m grösser, so erscheint jene als Zuschärfung der Basisecken der Pyramiden erster Ordnung, die Zuschärfungsflächen auf die Polkanten aufgesetzt. In dem in Fig. 358 dargestellten speciellen Falle, dass die Combinationskanten einer Fläche der letzteren mit zwei Flächen der ersteren einander parallel sind, ist das m der Pyramide zweiter Ordnung doppelt so gross, als das der ersten, also beispielsweise ihre Zeichen P und $2P\infty$.

Fig. 357.

Fig. 358.

Die Combinationen der Pyramiden zweiter Ordnung mit ditetragonalen sind analog denen der Pyramiden erster Ordnung, nur mit den Unterschieden, welche in der Verschiedenheit der Stellung von beiderlei Formen begründet sind.

4) Das ditetragonale Prisma ist diejenige ditetragonale Pyramide, deren Ableitungszahl $m = \infty$ ist; es besitzt denselben horizontalen Querschnitt, wie diejenigen ditetragonalen Pyramiden, welche mit jenem gleiches m haben; seine Flächen sind aber sämmtlich der Hauptaxe parallel, also vermag diese Form für sich allein den Raum nicht zu umschliessen. Fig. 349 stellt dieselbe in Combination mit der Basis dar. Ihre verschiedenen Zeichen ergeben sich nunmehr ganz von selbst als:

$$(hk0) = \infty Pn$$
$$= (a : na : \infty c).$$

Das ditetragonale Prisma hat acht Kanten, von denen vier schärfere und die vier alternirenden stumpfer sind. Ein ditetragonales Prisma mit acht gleichen Kanten ist aus demselben Grunde krystallonomisch unmöglich, wie eine gleichkantige ditetragonale Pyramide.

Je nachdem der Zahlenwerth von n näher an 1 liegt oder sehr gross

ist, ähnelt das ditetragonale Prisma mehr dem einen oder dem anderen der beiden folgenden Formen, dem Prisma erster oder dem zweiter Ordnung. Seine Flächen liegen zwischen den Flächen dieser beiden letzterwähnten Formen, und sie bilden Zuschärfungen der Kanten sowohl des einen, wie des anderen.

Die ditetragonalen Pyramiden mit gleichem n sind um so spitzer, sie nähern sich um so mehr der verticalen Stellung der Flächen, je grösser m ist; das Endglied einer solchen Reihe ist das ditetragonale Prisma mit demselben Werth von n; dieses ist zugleich identisch für alle tetragonalen Substanzen, weil seine Winkel nicht von dem Verhältniss $1 : c$, sondern nur von der rationalen Zahl n, welche bei allen jenen Körpern verwirklicht sein kann, abhängt. Ein ditetragonales Prisma stumpft die Basiskanten der ditetragonalen Pyramiden, welche dasselbe n haben, gerade ab.

5) Das tetragonale Prisma erster Ordnung ist die ditetragonale Pyramide mit den besonderen Werthen $m = \infty$ und $n = 1$, oder die tetragonale Pyramide erster Ordnung, deren m den Grenzwerth ∞ angenommen hat. Es ist also eine Pyramide der letzteren Art mit verticalen, der Hauptaxe parallelen Flächen, welche Form für sich den Raum nicht umschliesst. Diese Gestalt ist in Fig. 350 in Combination mit der Basis dargestellt. Da ihr Axenverhältniss $1 : 1 : \infty$ gar keiner Variation mehr fähig ist, so giebt es nur ein tetragonales Prisma erster Ordnung, dessen Kantenwinkel 90°, identisch für alle tetragonal krystallisirenden Körper, und zu bezeichnen:

$$\infty P = (110)$$
$$= (a : a : \infty c).$$

Dasselbe erscheint in Combinationen an allen tetragonalen Pyramiden derselben Ordnung als gerade Abstumpfung der Basiskanten (Fig. 359),

Fig. 359.

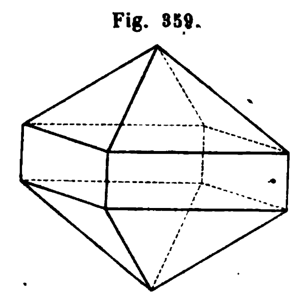
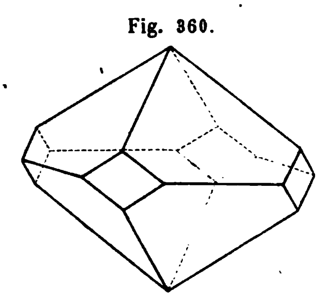


Fig. 360.



an denen der anderen Ordnung als gerade Abstumpfung der Basisecken (Fig. 360).

6) Das tetragonale Prisma zweiter Ordnung $= \infty P \infty = (100) = (a : \infty a : \infty c)$ ist die Grenzform der tetragonalen Pyramiden zweiter Ordnung für den Fall, dass $m = \infty$, es kann also auch nur eine einzige solche Gestalt geben, welche sich von der vorigen nur durch ihre

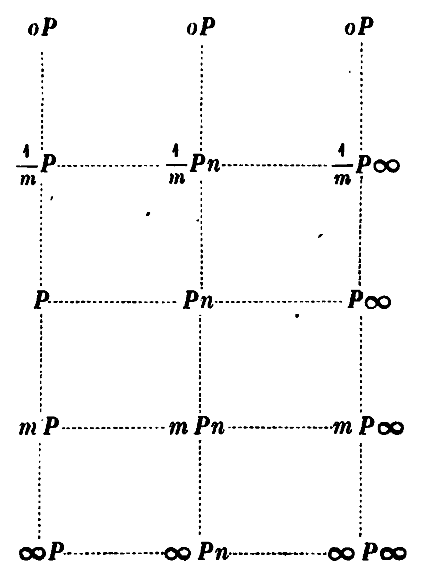
Stellung (sie erscheint um 45° gegen jene gedreht) unterscheidet. Die Figg. 359 und 360 können auch als Combinationen dieses Prismas mit einer Pyramide zweiter Ordnung, resp. erster Ordnung, dienen, wenn man die Nebenaxen mit den Zwischenaxen vertauscht, d. h. jene Gestalten sich um die Hauptaxe, und zwar um 45°, gedreht denkt.

7) Die tetragonale Basis, die Haupt-Symmetrieebene selbst, ist die untere Grenzform aller tetragonalen Pyramiden, welche um so stumpfer sind, sich in der Lage ihrer Flächen um so mehr derselben nähern, als die Ableitungszahl m sich der Null nähert. Ist $m = 0$, so sind die Polkantenwinkel $= 180°$, die Flächen der Pyramide fallen in eine einzige Horizontalebene zusammen. Daher bezeichnet man auch in diesem System die Basis mit oP. Die beiden anderen Bezeichnungen sind:

$$(\infty a : \infty a : c) = (001).$$

Diese Form, deren es natürlich auch nur eine einzige giebt, kann noch weniger für sich allein auftreten, als die Prismen, da sie den Raum nur in einer Richtung, von oben nach unten, abschliesst. Die Gestalt ihres Umrisses in den Combinationen ist entweder diejenige eines rechtwinkeligen Tetragons oder eines gleichwinkeligen Achtecks (zwei um 45° gedrehte Rechtecke), oder eines Ditetragons mit vier schärferen und vier stumpferen Winkeln.

Den Zusammenhang aller dieser soeben beschriebenen holoëdrischen Gestalten einer tetragonalen Krystallreihe kann man am besten in nachfolgendem Schema, welches vollkommen analog dem des hexagonalen Systems S. 270 ist, übersehen:



Die vorderste verticale Reihe ist diejenige der Pyramiden erster Ordnung, welche sämmtlich zwischen der Basis und dem Prisma erster Ordnung

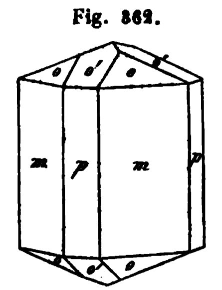
liegen; m stets grösser, als 1, genommen, ist das Zeichen der flacheren, zwischen der primären und der Basis liegenden, $\frac{1}{m}P$ derjenigen, welche spitzer sind, als die Grundform mP. Ganz analog stellt die letzte Verticalreihe alle Pyramiden zweiter Ordnung dar. Dazwischen liegen die Verticalreihen der ditetragonalen Pyramiden, von denen nur die allgemeine Reihe mit der unbestimmten Zahl n als Repräsentant der übrigen aufgeführt ist. Jede ditetragonale Pyramide ist nun zugleich ein Glied einer Horizontalreihe, welche sämmtliche ditetragonale Pyramiden mit gleichem m, und als Endglieder die erste und zweite Pyramide mit demselben m umfasst. Ebenso wird die letzte Horizontalreihe von den ditetragonalen Prismen, sämmtlich zwischen dem ersten und dem zweiten Prisma liegend, gebildet.

Sowohl die Flächen der in einer Verticalreihe stehenden, als der in Horizontalreihen vereinigten Krystallformen bilden mit den entsprechenden Flächen aller Formen derselben Reihe je eine krystallographische Zone, d. h. schneiden sich in parallelen Kanten.

§. 77. **Beispiele:** Bor = B. $a : c = 1 : 0{,}576$. Die von Wöhler und Deville durch Schmelzen von Borsäure mit Aluminium im Kohlentiegel erhaltenen diamantharten Krystalle zeigen $o = P$, $2o = 2P$, $o' = P\infty$, $m = \infty P$, $m' = \infty P\infty$, Fig. 361.

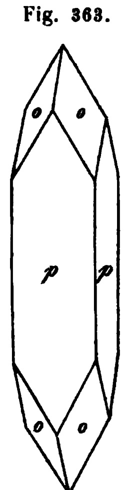
Fig. 361.

Fig. 362.



Zinn = Sn. $a : c = 1 : 0{,}3857$ (Miller, Poggend. Ann. LVIII, 660). Die galvanisch ausgeschiedenen Krystalle dieses Metalles sind entweder nadelförmige Combinationen: $m = \infty P$, $p = \infty P\infty$, $o = P$, $o' = P\infty$, Fig. 362, oder nur die flache Pyramide P.

Fig. 363.



Quecksilberchlorür = Hg^2Cl^2 (nat. Quecksilberhornerz). $a : c = 1 : 1{,}7414$. Die Krystalle sind prismatische Combinationen von $p = \infty P\infty$ und $o = P$, Fig. 363. Doppelbrechung positiv: $\omega = 1{,}96$, $\varepsilon = 2{,}60$ f. Roth (Des Cloizeaux, Ann. d. min. XI, 300).

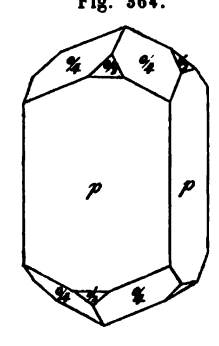
Quecksilberjodid = HgJ^2. $a : c = 1 : 1{,}9955$ (Mitscherlich, Pogg. Ann. XXVIII, 116). Kleine dunkelrothe spitze Pyramiden P mit oP, selten $\frac{1}{4}P$. Spaltbar nach oP vollkommen. Doppelbrechung negativ (Des Cloizeaux, a. a. O. 307).

Die Krystalle dieses Körpers bieten ein bemerkenswerthes Beispiel für die bereits S. 114 allgemein besprochenen

Erscheinungen der inneren Spannung und dadurch bewirkter Veränderung der optischen Erscheinungen. Während die aus einer Auflösung in Jodkalium erhaltenen Krystalle gewöhnlich ohne alle Störung ihrer Structur sind, erscheinen die aus gewissen organischen Lösungsmitteln auskrystallisirten, wenn man dünne Spaltungsplatten nach der Basis im parallelen polarisirten Licht bei gekreuzten Nicols betrachtet, nur stellenweise dunkel, häufig nur die Mitte der Platte, während der grösste Theil beim Drehen hell und dunkel wird, und zwar derart, dass die Substanz gespannt erscheint parallel den Diagonalen der Basis (den Nebenaxen). Im convergenten Licht erscheinen denn auch die ersteren Partien einaxig, die letzteren zweiaxig mit wechselndem Axenwinkel, wobei die Axenebene stets einer der beiden Nebenaxen parallel ist. Sehr häufig sind die dünnsten Spaltungsplatten noch aus mehreren über einander liegenden Schichten zusammengesetzt, in welchen die Spannungsrichtungen, also auch die Axenebenen, gekreuzt sind. Es entstehen dann, um so regelmässiger, je mehr solcher Schichten mit einander abwechseln, die farbigen Hyperbeln Fig. 96, welche sich mit der Platte drehen und welche man stets erhält, wenn man dünne Platten einer zweiaxigen Substanz, z. B. Glimmertafeln, kreuzweise auf einander schichtet (Groth, unveröff. Beob.).

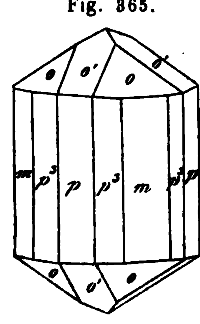
Quecksilbercyanid $= HgCy^2$. $a : c = 1 : 1,8384$. Combination: $\frac{o}{4} = \frac{1}{4}P$, $\frac{o'}{2} = \frac{1}{2}P\infty$, $p = \infty P\infty$ s. Fig. 364. Doppelbrechung — (Des Cloizeaux, a. a. O., 307).

Fig. 364.



Gelbes Blutlaugensalz, Ferrocyankalium $= K^4FeCy^6 + 3$ aq. $a : c = 1 : 7675$ (Bunsen, Pogg. Ann. XXXVI, 404). Grosse gelbe tafelförmige Krystalle: oP, P. Spaltbarkeit nach oP vollkommen. Doppelbrechung +. Diese Krystalle zeigen stets, wie die des HgJ^2, Störungen ihrer optischen Eigenschaften durch Spannungen parallel den Nebenaxen, so dass die basischen Spaltungsplatten nur stellenweise einaxig, sonst zweiaxig erscheinen, die Ebene der Axen, deren Winkel wechselt, stets parallel einer Diagonale der Basis (Des Cloizeaux, nouv. recherches, 17).

Fig. 365.



Zinnsäure $= SnO^2$ (natürl. Zinnerz). $a : c = 1 : 0,6724$. Combination: $m = \infty P$, $p = \infty P\infty$, $p^3 = \infty P3$, $o = P$, $o' = P\infty$, Fig. 365. Doppelbrechung +.

Titansäure $= TiO^2$ (Rutil). $a : c = 1 : 0,6442$. Dieselbe Combination wie die vorige Substanz, Fig. 365. Doppelbrechung +.

Zirkon (nat.) $= ZrO^2 + SiO^2$. $a : c = 1 : 0,6404$.

Combination: $m = \infty P$, $p = \infty P \infty$, $o = P$, $3o = 3P$, $d = 3P3$ *), Fig. 366.

Schwefelsaures Nickel $= NiSO^4 + 6$ aq. $a : c = 1 : 1{,}9061$ (Mitscherlich, Poggend. Ann. XI, 323). $o = P$, $\frac{o}{2} = \frac{1}{2}P$, $c = oP$. Fig. 367. Doppelbrechung —.

Fig. 366.

Fig. 367.

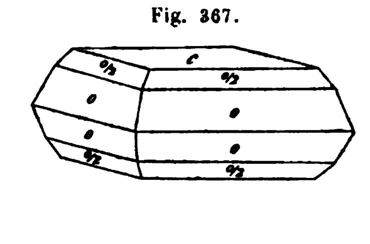
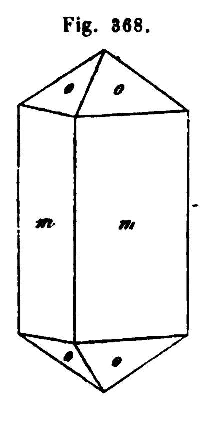
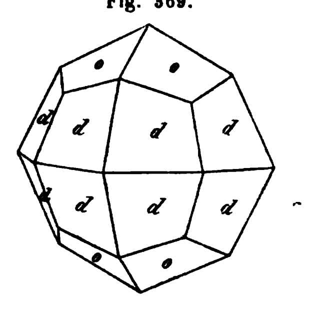


Fig. 368.



Saures Kaliumphosphat $= KH^2PO^4$. $a:c = 1:0{,}6640$ (Mitscherlich, Ann. de chim. et phys. XIX, 364). Combination: $o = P$, $m = \infty P$, Fig. 368. Doppelbrechung —; $\omega = 1{,}505$—$1{,}510$, $\varepsilon = 1{,}465$—$1{,}472$ (Des Cloizeaux, a. a. O. 306).

Fig. 369.



Saures Ammoniumphosphat $= (NH^4)H^2PO^4$. $a : c = 1 : 0{,}7124$ (Mitscherlich, a. a. O. 373). Dieselbe Combination, wie das vorige Salz. Doppelbr. —; $\omega = 1{,}512$—$1{,}519$, $\varepsilon = 1{,}476$—$1{,}477$ (Des Cloizeaux, a. a. O. 306).

Leucit (natürl.) $= (K, Na)^2 Al^2 Si^4 O^{12}$. $a : c = 1 : 0{,}5264$ (vom Rath, Mon. Ber. d. Berl. Akad. 1873). Combination: $o = P$, $d = 4P2$ in gleicher Ausdehnung, deshalb dem regulären Ikositetraëder $2O2$ täuschend ähnlich, Fig. 369. Sehr schwache Doppelbrechung +, $\omega = 1{,}508$, $\varepsilon = 1{,}509$. (Des Cloizeaux, Man. de min. II, XXXIV.)

2) Hemiëdrische Formen des tetragonalen Systems.

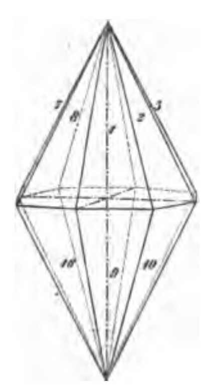
§. 78. **Arten der Hemiëdrie.** Die Entwickelung der möglichen Arten der Hemiëdrie wird, wie bisher, an dem allgemeinen Repräsentanten aller Formen des Systems, an der ditetragonalen Pyramide, auszuführen und damit alsdann die entsprechenden hemiëdrischen Hälften der anderen Gestalten gegeben sein.

---

*) d ist bestimmt durch die beiden Zonen $[o^3, o^3]$ und $[o, p]$.

Denken wir uns den Raum von denjenigen zwei senkrechten Symmetrieebenen, in welchen die Nebenaxen liegen, in 4 Viertel getheilt, so liegen in jedem solchen Quadranten vier Flächen der ditetragonalen Pyramide, zwei obere und zwei untere, z. B. 1, 2, 9 und 10 Fig. 370. Wir werden nur dann eine hemiëdrische Form erhalten, wenn wir die Hälfte aller Flächen so auswählen, dass in jedem Quadranten zwei Flächen in gleicher Weise genommen werden. Jede andere Auswahl der Flächen liefert, ganz ebenso, wie wir S. 272 im hexagonalen Systeme sahen, Formen, welche nicht den Bedingungen der Hemiëdrie genügen. Die Auswahl von zwei Flächen unter jenen vier ist aber nur auf dreierlei Art möglich, nämlich: *a*) die einer oberen und einer anders geneigten unteren, z. B. 1 und 10 Fig. 370; oder *b*) die beider oberen (oder beider unteren), z. B. 1 und 2 Fig. 370; oder endlich *c*) zweier über einander gelegenen, z. B. 1 und 9 Fig. 370.

Fig. 370.



Es sind demnach drei verschiedene Arten von Hemiëdrie möglich, welche ganz genau den drei, auf dieselbe Art abgeleiteten Hemiëdrien des hexagonalen Systems entsprechen und folgendermassen benannt sind:

a) die trapezoëdrische,
b) die sphenoidische,
c) die pyramidale Hemiëdrie.

a) Die trapezoëdrische Hemiëdrie.

§. 79. 1) Die trapezoëdrisch-hemiëdrischen Formen der ditetragonalen Pyramiden entstehen durch Auswahl von acht alternirend oben und unten gelegenen Flächen, Fig. 371. Aus jeder derselben resultiren demnach zwei

Fig. 371.

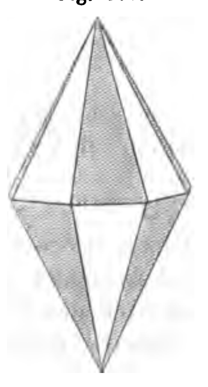


Fig. 372 *a*.

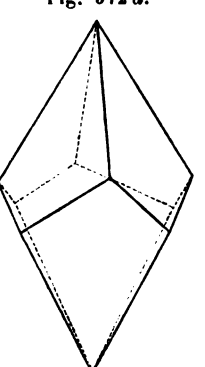
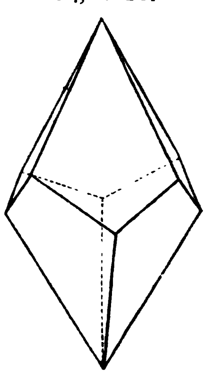


Fig. 372 *b*.



Hemiëder, aus den weiss gelassenen Flächen die in Fig. 372 *a*, aus den schwarz bezeichneten die in Fig. 372 *b* dargestellte Gestalt, welche nach der

Trapezform, die deren Flächen bei gleicher Centraldistanz besitzen, tetragonale Trapezoëder heissen. Die beiden aus einer ditetragonalen Pyramide entstehenden Trapezoëder sind enantiomorph, sie können durch keine Drehung zur Deckung gebracht werden. Wir nennen dasjenige von beiden, welches dadurch entsteht, dass von den vier Flächen des dem Beobachter zugekehrten Quadranten der ditetragonalen Pyramide, die rechte obere und linke untere bleiben, die beiden anderen verschwinden, das rechte Trapezoëder, das entgegengesetzte, in welchem also die linke obere Fläche jenes Quadranten auftritt, das linke, und bezeichnet dieselben mit

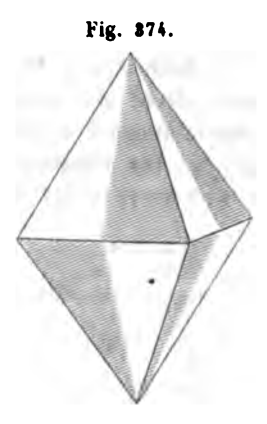
$$\frac{mPn}{2}\,r \text{ und } \frac{mPn}{2}\,l$$
$$= \tfrac{1}{2}\,(a : na : mc) = \varkappa''\,(hkl).$$

Die Trapezoëder besitzen je acht gleiche Polkanten und ebenso viel Mittelkanten, von denen vier stumpfere (bei den rechten Trapezoëdern von links unten nach rechts oben, bei den linken entgegengesetzt laufend, falls, wie in Fig. 371 und 372, $n > 2{,}4142$, vergl. S. 315) und vier schärfere sind.

2) Die tetragonalen Pyramiden erster Ordnung, demselben Gesetz der Hemiëdrie unterworfen, Fig. 373, liefern Formen, welche sich geometrisch nicht von den holoëdrischen unterscheiden, da von den zwei Flächen der ditetragonalen Pyramide, welche hier in eine Ebene fallen, eine zur hemiëdrischen Form gehört, also diese Ebene, und ebenso alle sieben anderen an dieser auftreten müssen.

Fig. 373.

Fig. 374.



3) Das Gleiche ist der Fall mit den tetragonalen Pyramiden zweiter Ordnung, welche, wie Fig. 374 zeigt, durch diese Hemiëdrie nicht verändert wird.

4) Die ditetragonalen Prismen Fig. 375,

5) das tetragonale Prisma erster Ordnung Fig. 376,

6) das tetragonale Prisma zweiter Ordnung Fig. 377,

7) die Basis (s. Fig. 375 bis 377) liefern in Folge dessen ebenfalls hemiëdrische Formen dieser Abtheilung, welche vollkommen mit den holoëdrischen übereinstimmen.

Da sich demnach die Krystallformen dieser Art von Hemiëdrie nur in Beziehung auf die ditetragonalen Pyramiden von den holoëdrischen unter-

scheiden, so müssen die hierher gehörigen Körper, deren man bis jetzt drei (sämmtlich organische Verbindungen) kennt, wenn keine Flächen von ditetragonalen Pyramiden an deren Krystallen vorkommen, sich nur durch ihre Circularpolarisation in der Richtung der Hauptaxe als hierher gehörig

Fig. 375.

Fig. 376.

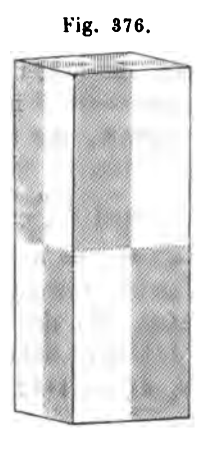
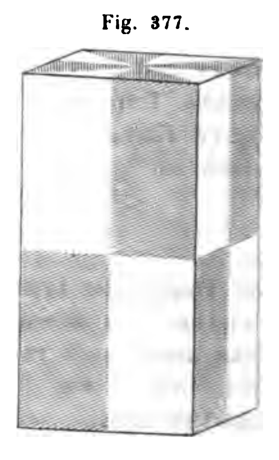


Fig. 377.



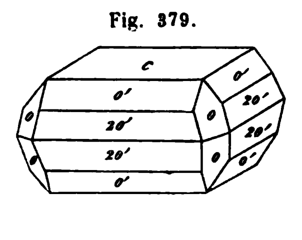
erkennen lassen. Durch diese Eigenschaft ist denn auch zuerst festgestellt worden, dass folgende Stoffe trapezoëdrisch-hemiëdrisch krystallisiren:

Schwefelsaures Strychnin = $(C_{21}H_{24}N_2O_2)S_2O_8 + 13$ aq. $a:c = 1:3{,}312$. Combination*) P und oP, tafelförmig nach letzterer Fläche; nach derselben äusserst vollkommen spaltbar. Doppelbrechung —. Drehung: 9—10° Roth (für 1 Millim.), stets links (ebenso, aber in schwächerem Grade, dreht die wässerige Lösung des Salzes, und ist dies das einzige bekannte Beispiel eines Körpers, der fest und in Lösung Circularpolarisation zeigt). — Des Cloizeaux, Ann. d. min. XI, 340.

Schwefelsaures Aethylendiamin = $(C_2H_4)H_4N_2$, H_2SO_4. $a:c = 1:1{,}4943$. Combination entweder Fig. 378: $2o = 2P$, $c = oP$, oder Fig. 379: $c = oP$, $o = P$, $o' = P\infty$, $2o' = 2P\infty$. Spaltbarkeit vollkommen nach oP. Doppelbrechung +. Drehung 15° 30′ für Natriumgelb. (V. von Lang, Sitz. Ber. d. Wien. Akad. LXV, II.).

Fig. 378.

Fig. 379.



Kohlensaures Guanidin = $(CH^5N^3)^2H^2CO^3$. $a:c = 1:0{,}9910$. Combination P, oP, $\infty P\infty$, die beiden letzteren klein, so dass diese Combination fast vollkommen einer regulären: O, $\infty O\infty$, gleicht. Spaltbarkeit nach oP vollkommen. Doppelbrechung —, nicht stark.

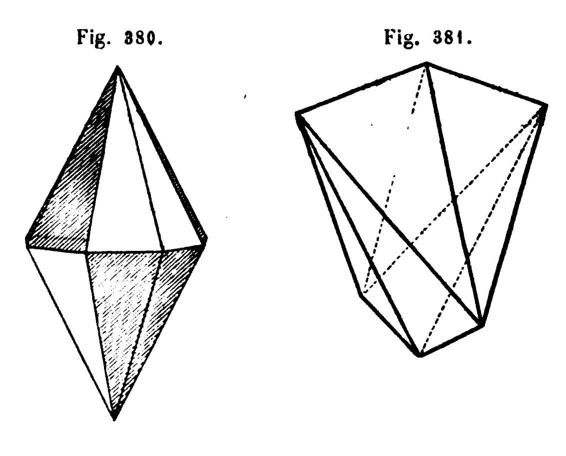
*) Fig. 378 kann für diesen Körper gelten, wenn man $2o$ für P nimmt.

		ω	ε
Roth	Li	= 1,4922	1,4848
Gelb	Na	= 1,4963	1,4864
Grün	Tl	= 1,5003	1,4899.

Drehung 12° 35′ Li, 14° 35′ Na, 17° 4′ Tl (Bodewig, unveröffentlichte Beobachtungen).

b) Die sphenoidische Hemiëdrie.

§. 80. 1) Die ditetragonale Pyramide liefert nach dem Gesetz der sphenoidischen Hemiëdrie, durch Beibehaltung der neben einander liegenden Flächenpaare in allen alternirenden Octanten und Verschwindenlassen der anderen, Fig. 380, je zwei Hälften, welche die Gestalt Fig. 381 besitzen, und zwar bilden die weiss gelassenen Flächen diese Form genau in der Stellung, wie sie die Figur zeigt, während die andere Hälfte derselben eine genau gleiche, aber um 180° gedrehte Gestalt liefert. Eine solche Krystallform heisst, weil bei gleicher Centraldistanz ihre Flächen die Gestalt ungleichseitiger Dreiecke (Skalene) haben, tetragonales Skalenoëder, und unterscheidet man die beiden, aus einer ditetragonalen Pyramide entstehenden Formen als positives und negatives Skalenoëder, welche Unterscheidung auch in der Naumann'schen Bezeichnung


Fig. 380. Fig. 381.

$$+\frac{mPn}{2} \text{ und } -\frac{mPn}{2}$$

ihren Ausdruck findet. Die Miller'schen und Weiss'schen Zeichen der Skalenoëder sind:

$$\varkappa\,(hkl) \text{ und } \tfrac{1}{2}\,(a : na : mc).$$

Selbstverständlich ist es an und für sich beliebig, welche der beiden Hälftformen man in einem speciellen Falle positive, welche negative nennt, und geschieht die Wahl nach denselben Grundsätzen, wie die einer Grundform, also die etwa regelmässig vorherrschende Hälfte ist als positive zu bezeichnen. Ist eine solche Wahl an einem Krystall einmal getroffen, so ist damit natürlich das Vorzeichen, + oder —, für alle anderen, daran auftretenden Formen gegeben.

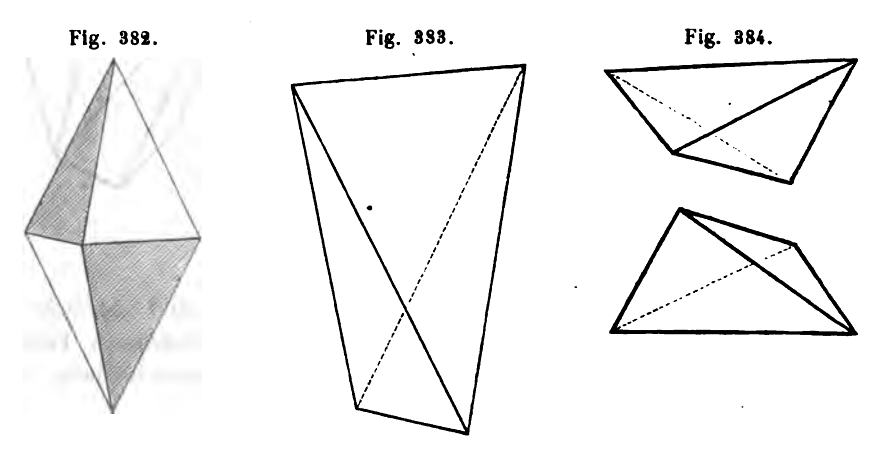
Ein tetragonales Skalenoëder besteht aus zwei oberen und zwei, in alternirender Stellung dazu befindlichen unteren Flächenpaaren, deren Flächen sich je in einer stumpferen Polkante, deren Winkel gleich demjenigen der

entsprechenden Polkante an der ditetragonalen Pyramide ist, schneiden. Ausser diesen vier stumpferen Polkanten besitzt das Skalenoëder noch vier schärfere, mit jenen abwechselnd, und ebenso viel einander gleiche Mittelkanten. Die Polecken desselben sind also 2 + 2kantige, die Seitenecken 2 + 1 + 1kantige.

Combinationen mehrerer Skalenoëder mit einander sind sehr mannigfachen Ansehens je nach dem Verhältniss der Zahlen m und n des einen zu denen des anderen, und je nach dem Vorzeichen. Wie aus den Beispielen zu ersehen, kommen jedoch gewöhnlich nur Combinationen eines solchen mit einfacheren Formen vor.

2) Die tetragonale Pyramide erster Ordnung, derselben Hemiëdrie unterworfen (Fig. 382), liefert eine Form, welche nur aus vier. zwei oberen und zwei alternirend gestellten unteren Flächen besteht. Diese Form (Fig. 383) heisst Sphenoëder oder Sphenoid; die Umrissfigur ihrer vier Flächen bei gleicher Centraldistanz ist die gleichschenkeliger Dreiecke. Ein Sphenoïd besitzt nur zwei, horizontal laufende, einander gleiche

Fig. 382. Fig. 383. Fig. 384.



Polkanten, dagegen vier davon verschiedene, unter einander aber gleiche Mittelkanten. Bei dem in Fig. 383 dargestellten Sphenoëder sind die Polkanten schärfer, als die Mittelkanten, bei dem Fig. 384 dargestellten dagegen sind die Polkanten die stumpferen; erstere Form zeigt besonders die Aehnlichkeit mit einem Keil (Sphen), welcher derselben den Namen verliehen hat. Darnach unterscheidet man die Sphenoide als spitze und stumpfe, und ist ein solches natürlich um so spitzer oder stumpfer, je mehr dies der Fall ist mit der tetragonalen Pyramide, von der dasselbe sich ableitet. Ein Sphenoëder, welches genau zwischen den spitzen und stumpfen mitten inne stände, d. h. dessen Polkanten gleich den Mittelkanten wären, würde die Form des regulären Tetraëders haben. Ein Sphenoëder, welches diesem sehr nahe kommt, ist krystallonomisch bei jeder tetragonal krystallisirenden Substanz dieser Hemiëdrie möglich. Da nun dessen Polkanten beim

Erwärmen schärfer werden, die Mittelkanten stumpfer, wenn die Hauptaxe die Richtung der grössten Ausdehnung durch die Wärme ist, dagegen beide sich in umgekehrtem Sinne ändern, wenn der Krystall sich parallel der Hauptaxe am wenigsten ausdehnt, so wird es eine Temperatur geben, bei welcher jenes Sphenoid sogar genau gleiche Pol- und Mittelkanten besitzt. Dass es deshalb noch keineswegs als ein reguläres Tetraëder betrachtet werden darf, lehren dieselben Betrachtungen, welche über den scheinbaren Uebergang der entsprechenden hexagonalen Form, des Rhomboëders, in einen regulären Würfel, S. 277, angestellt worden sind.

Die beiden, aus einer tetragonalen Pyramide entstehenden Sphenoëder werden als positives und negatives unterschieden; dieselben haben genau gleiche Gestalt, nur ist das eine gegen das andere um 90⁰ gedreht. Combinirt erscheinen beide so, dass eine die Ecken des anderen abstumpft, s. die Combination des Kupferkies Fig. 389. Sie werden folgendermassen bezeichnet:

$+\frac{mP}{2}$ und $-\frac{mP}{2}$ nach Naumann,

$\varkappa\ (h\,h\,l)$ nach Miller,

$\frac{1}{2}\ (a : a : mc)$ nach Weiss.

Erscheinen zwei verschiedene Sphenoide von entgegengesetztem Vorzeichen mit einander combinirt, so stumpft ebenfalls das eine die Ecken des anderen ab, aber mit anderer Neigung der Abstumpfungsflächen gegen die Hauptaxe, s. Fig. 391 Kupferkies. Eine Abstumpfung der Ecken eines Sphenoëders mit verticalen Flächen ist das tetragonale Prisma erster Ordnung; die gerade Abstumpfung der Mittelkanten das Prisma zweiter Ordnung; die gerade Abstumpfung der Polkanten die Basis.

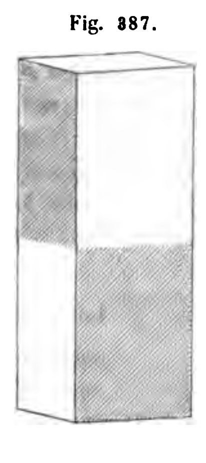
3) Die tetragonale Pyramide zweiter Ordnung, nach demselben Gesetze hemiëdrisch werdend, Fig. 385, liefert eine der holoëdrischen vollkommen gleiche Form, weil jede Fläche derselben zwei derjenigen ditetragonalen Pyramide, deren $n = \infty$ ist, repräsentirt, von denen jedesmal eine der hemiëdrischen Form angehört. Ganz in derselben Art bleibt auch in der entsprechenden Hemiëdrie des hexagonalen Systems, der rhomboëdrischen, die Pyramide zweiter Ordnung scheinbar ungeändert (s. S. 280).

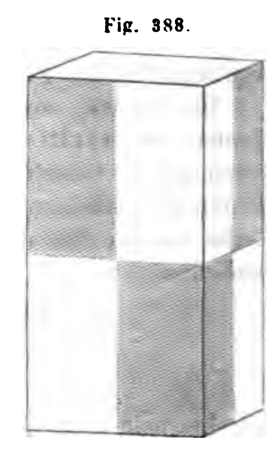
Fig. 385.

4) Das ditetragonale Prisma hat seine Flächen gleichzeitig in den benachbarten oberen und unteren Octanten liegen; wenn also dieselben auch in den abwechselnden fortfallen (Fig. 386), so ist doch die hemiëdrische Form aus ebenso viel Flächen gebildet, als die holoëdrische, sie ist aber nicht diejenige ditetragonale Pyramide, sondern dasjenige Skalenoëder, dessen $m = \infty$ ist.

5) Das tetragonale Prisma erster Ordnung unterscheidet sich sphenoidisch hemiëdrisch (Fig. 387) ebenso wenig vom holoëdrischen, wie das hexagonale in der rhomboëdrischen Hemiëdrie. Dasselbe ist jedoch hier nicht aufzufassen als eine tetragonale Pyramide, deren $m = \infty$, sondern als ein Sphenoëder, dessen m diesen Grenzwerth erreicht, als das Endglied der Reihe von Sphenoëdern mit wachsendem m.

Fig. 386. Fig. 387. Fig. 388.



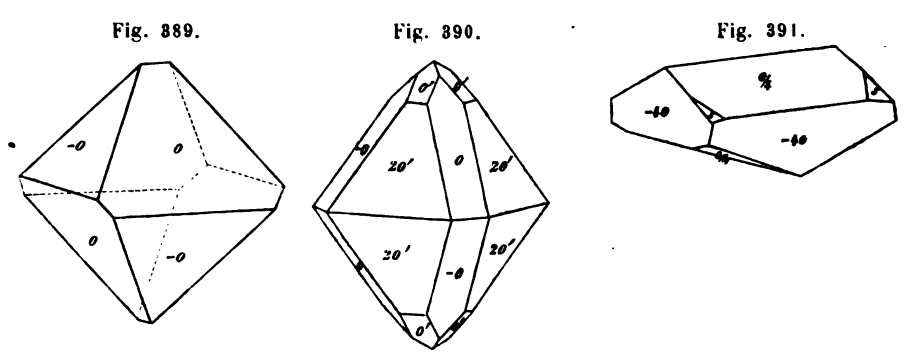


6) Das tetragonale Prisma zweiter Ordnung, derselben Hemiëdrie unterworfen (Fig. 388), liefert natürlich ebenfalls eine der holoëdrischen gleiche Form, die Pyramide zweiter Ordnung, deren $m = \infty$.

7) Die Basis ist dasselbe Flächenpaar, wie die holoëdrische, es ist als das Grenzglied der Reihe der flachen Sphenoëder, dessen m nämlich $= 0$ ist, zu betrachten.

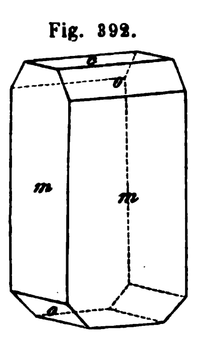
Beispiele. Folgende Substanzen krystallisiren sphenoidisch hemiëdrisch: Kupferkies $CuFeS^2$. $a : c = 1 : 0{,}9856$. Häufigste Combination:

Fig. 389. Fig. 390. Fig. 391.



$o = + \frac{P}{2}$, $- o = - \frac{P}{2}$, Fig. 389 (einem regulären Octaëder sehr ähnlich), durch die Oberflächenbeschaffenheit der beiden Sphenoide (das eine

glänzend, das andere matt) leicht als hemiëdrisch zu erkennen. Weitere Combinationen: Fig. 390: $o = +\frac{P}{2}$, $-o = -\frac{P}{2}$, $o' = P\infty$, $2o' = 2P\infty$, und Fig. 391: $\frac{o}{4} = +\frac{\frac{1}{4}P}{2}$, $-4o = -\frac{4P}{2}$, $s = +\frac{\frac{3}{8}P2}{2}$.


Fig. 392.

Harnstoff $= CH_4N_2O$. $a : c = 1 : 0{,}8345$. Combination Fig. 392: $o = \frac{P}{2}$, $m = \infty P$, $c = oP$. Spaltbarkeit ∞P vollkommen, oP unvollkommen. Doppelbrechung $+$, stark.

c) Die pyramidale Hemiëdrie.

§. 81. 1) Die ditetragonale Pyramide liefert, wenn man nach der dritten möglichen Art die Hälfte der Flächen auswählt (Fig. 393), eine tetragonale Pyramide dritter Ordnung oder der Zwischenstellung, ganz entsprechend der hexagonalen Pyramide dritter Ordnung, welche sich auf dieselbe Art aus der dihexagonalen ableitet. Stellt in Fig. 394 $p^1p^1p^1p^1$ den horizontalen Querschnitt der Pyramide erster Ordnung, also die Richtung der Basiskanten derselben, $p^2p^2p^2p^2$ die der Basiskanten der Pyramide zweiter Ordnung dar, so ist $p^3p^3p^3p^3$ der Querschnitt der einen Pyramide der dritten Ordnung. Diese Formen werden ebenso, wie die entsprechenden des hexagonalen Systems, bezeichnet:

Fig. 393.

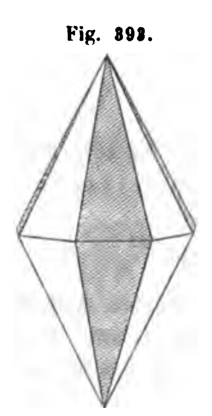
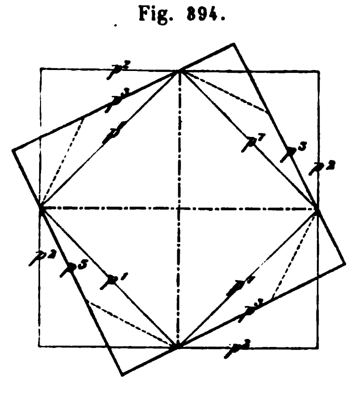


Fig. 394.



$$\frac{mPn}{2}\,\frac{r}{l} \text{ und } \frac{mPn}{2}\,\frac{l}{r} = \pi\,(hkl) = \tfrac{1}{2}\,(a : na : mc).$$

Ihre Combinationen mit anderen Formen werden bei den Beispielen betrachtet werden.

2) Die tetragonale Pyramide erster Ordnung, in gleicher Weise hemiëdrisch werdend, Fig. 395, bleibt scheinbar völlig ungeändert, und die Verschiedenheit einer derartigen hemiëdrischen Pyramide von der geometrisch ihr gleichenden holoëdrischen ist nur in Combinationen ersichtlich. Während z. B. die Kanten der letzteren von einer ditetragonalen Pyramide zugeschärft sein können, würden an der hemiëdrischen entweder nur die an der weissen oder nur die an der schwarzen Seite der Kanten ge-

legenen Zuschärfungsflächen (als Pyramide dritter Ordnung) auftreten und somit gleichsam die Ungleichwerthigkeit der beiden Hälften jeder Fläche der scheinbar holoëdrischen Form documentiren.

3) Die tetragonale Pyramide zweiter Ordnung, dem Gesetz der pyramidalen Hemiëdrie unterworfen, Fig. 396, behält ebenfalls ihre volle Flächenzahl bei.

Fig. 395. Fig. 396.

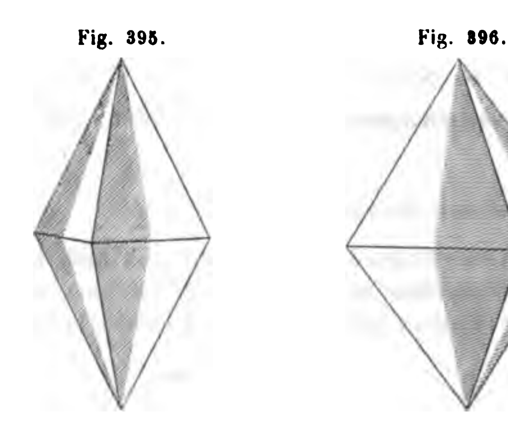
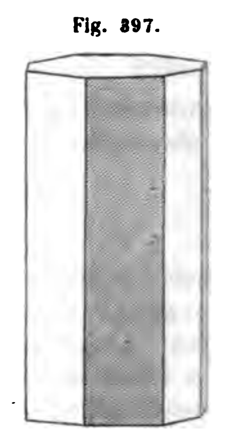


Fig. 397.

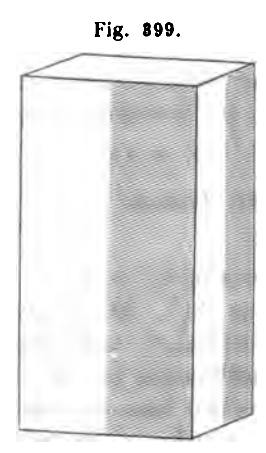


4) Das ditetragonale Prisma dagegen wird, wie Fig. 397 zeigt, durch diese Hemiëdrie zerlegt in zwei tetragonale Prismen dritter Ordnung

$$\frac{\infty P n}{2} \frac{r}{l} \text{ und } \frac{\infty P n}{2} \frac{l}{r}$$

Dieselben stellen die Grenzformen der beiden Reihen von Pyramiden dritter Ordnung vor; das eine ist diejenige rechte Pyramide dritter Ordnung mit demselben Werth von n, deren $m = \infty$ ist, die andere die entsprechende linke.

Fig. 398. Fig. 399.



5) Das tetragonale Prisma erster Ordnung Fig. 398,

6) das tetragonale Prisma zweiter Ordnung Fig. 399, und

7) die Basis erfahren durch diese Hemiëdrie keine Aenderung.

Die Formen dieser Abtheilung unterscheiden sich demnach nur in Bezug auf die ditetragonalen Pyramiden und Prismen, welche als Pyramiden und Prismen dritter Ordnung erscheinen, von den holoëdrischen;

diese Hemiëdrie entspricht also in jeder Beziehung der gleichbenannten im hexagonalen System.

An folgenden Körpern hat man bisher erkannt, dass sie pyramidal hemiëdrisch krystallisiren:

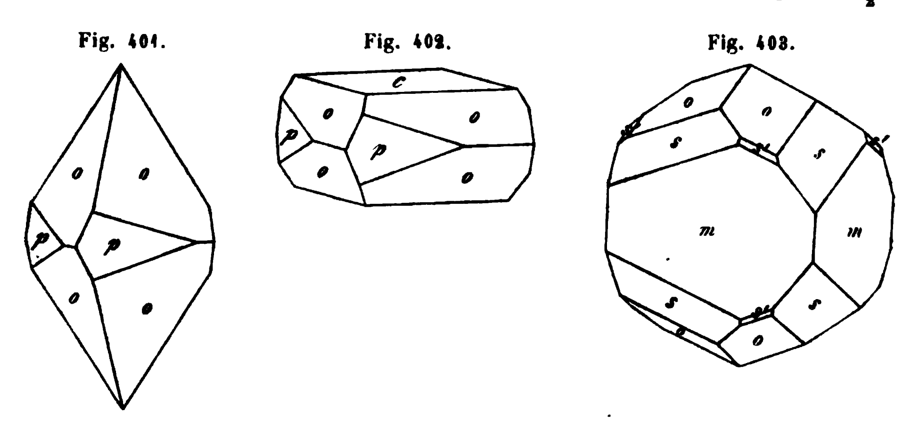
Fig. 400.

Wolframsaurer Kalk (nat. Scheelit) $= CaWO^4$. $a : c = 1 : 1,5359$. Häufige Combination Fig. 400: $o = P$, $o' = P\infty$, $s = \frac{3P3}{2}$, $h = \frac{P3}{2}$, und zwar von den beiden Pyramiden dritter Ordnung die eine an der einen, die andere an der anderen Seite. Spaltbarkeit P unvollkommen. Doppelbrechung $+$,

$\omega = 1,918$, $\varepsilon = 1,934$ Roth.

Wolframsaures Blei (nat. Scheelbleispath) $= PbWO^4$. $a : c = 1 : 1,567$. Combination Fig. 401: $o = P$, $p = \frac{\infty P\frac{4}{3}}{2}$ als Prisma dritter Ordnung. Spaltbarkeit P unvollkommen.

Molybdänsaures Blei (nat. Molybdänbleispath) $= PbMoO^4$. $a : c = 1 : 1,574$. Combinationen Fig. 402: $c = oP$, $o = P$, $p = \frac{\infty P\frac{4}{3}}{2}$.



Spaltbarkeit P. Doppelbrechung $-$, $\omega = 2,402$, $\varepsilon = 2,304$ Roth. (Des Cloizeaux, Ann. d. min. XIV.).

Erythroglucin $= C^4H^{10}O^4$ (Erythrit, Phycit). $a : c = 1 : 0,3762$. Combination Fig. 403: $o = P$, $m = \infty P\infty$, $s = \frac{3P3}{2}\frac{r}{l}$, $s' = \frac{3P3}{2}\frac{l}{r}$. Von diesen beiden, zusammen die ditetragonale Pyramide $3P3$ bildenden Pyramiden dritter Ordnung ist entweder nur s vorhanden, oder s' mit ganz kleinen Flächen, wie es die Figur zeigt. Doppelbrechung $-$, stark.

Roth	ω = 1,5419	ε = 1,5184.
Gelb	1,5444	1,5210.
Blau	1,5495	1,5266.

(Des Cloizeaux, Nouv. Rech. 12.)

3) Tetartoëdrische Formen des tetragonalen Systems.

§. 82. **Mögliche Arten der Tetartoëdrie.** Wenden wir auf den allgemeinen Repräsentanten aller Formen, die ditetragonale Pyramide, zwei von den drei Arten der Hemiëdrie gleichzeitig an, so sind, wie in dem hexagonalen System §. 68 drei Fälle möglich, von denen wieder, wie dort, nur zwei zu Formen führen, welche den Bedingungen der Hemiëdrie genügen. Während nämlich die gleichzeitige Anwendung der trapezoëdrischen (von links oben durchstrichen) und der pyramidalen (von rechts oben durchstrichen) Hemiëdrie folgende Flächen übrig lässt:

~~1~~ 2 ~~3~~ 4 ~~5~~ 6 ~~7~~ 8
~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ ~~4~~ ~~5~~ ~~6~~ ~~7~~ ~~8~~

also nur vier die obere Hälfte der Hauptaxe schneidende, so führen die beiden anderen möglichen Wege zu folgenden Resultaten:

1) Gleichzeitige Anwendung der trapezoëdrischen und der sphenoidischen Hemiëdrie:

~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ 4 ~~5~~ ~~6~~ ~~7~~ 8
1 ~~2~~ ~~3~~ ~~4~~ 5 ~~6~~ ~~7~~ ~~8~~

lässt oben zwei gegenüberliegende Flächen und ebensolches Paar unten übrig, deren jedes sich daher, wie beim tetragonalen Sphenoid Fig. 383, in einer horizontalen Polkante schneidet. Die entstehende Form*) unterscheidet sich aber dadurch vom Sphenoid, dass jene beiden Kanten sich bei ihr nicht rechtwinkelig kreuzen, dass ihre Flächen daher nicht die Gestalt von gleichschenkeligen, sondern von ungleichseitigen Dreiecken haben, dass endlich von ihren vier Mittelkanten zwei abwechselnde schärfer, zwei stumpfer sind. Man sieht hieraus, dass diese Form vollständig dem trigonalen Trapezoëder entspricht, nur dass sie oben und unten, statt drei, nur zwei, zu den anderen unsymmetrisch gestellte Flächen besitzt. Jedes tetragonale Skalenoëder zerfällt dabei in ein rechtes und ein linkes Tetartoëder, welche enantiomorph sind, daher ein Körper, welcher in diese Abtheilung gehörte, circularpolarisirend sein müsste. Diese Tetartoëdrie, auf die übrigen Formen angewendet, führt in der That auch auf diejenigen, welche den entsprechenden in der trapezoëdrischen Tetartoëdrie des Hexagonalsystems ganz analog sind: die tetragonalen Pyramiden erster Ordnung werden Sphenoëder (entsprechend den Rhomboëdern), die Pyramiden zweiter Ordnung werden horizontale Prismen, bestehend aus zwei gegenüberliegenden Flächen oben und den beiden parallelen unten (entsprechend den trigonalen Pyramiden), das

*) Dergl. Formen werden wir in der Hemiëdrie des rhombischen Systems kennen lernen, wie eine solche Fig. 439 dargestellt ist.

ditetragonale Prisma liefert ein solches von rhombischem Querschnitt (entsprechend dem ditrigonalen), das Prisma erster Ordnung, wie die Basis, bleibt unverändert, das Prisma zweiter Ordnung verwandelt sich in ein paralleles Flächenpaar. Ein Krystall würde demnach schon als hierher gehörig erkannt sein, wenn er statt tetragonaler Pyramiden Sphenoëder zeigte, und zugleich die Eigenschaft der Circularpolarisation besässe.

2) Die gleichzeitige Anwendung der sphenoidischen und pyramidalen Hemiëdrie:

~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ 4 ~~5~~ ~~6~~ ~~7~~ 8
~~1~~ 2 ~~3~~ ~~4~~ ~~5~~ 6 ~~7~~ ~~8~~

liefert offenbar als tetartoëdrische Formen der ditetragonalen Pyramiden tetragonale Sphenoëder, welche sich von den hemiëdrischen nur durch ihre Stellung unterscheiden, daher als »Sphenoide dritter Ordnung« zu bezeichnen sind. Wie diese den Rhomboëdern dritter Ordnung in der rhomboëdrischen Tetartoëdrie des hexagonalen Systems entsprechen, so auch die übrigen aus dieser Tetartoëdrie resultirenden Formen. Die Pyramiden erster und zweiter Ordnung werden Sphenoëder erster und zweiter Ordnung (entsprechend den Rhomboëdern derselben Ordnungen), die ditetragonalen Prismen werden tetragonale dritter Ordnung, das Prisma erster und zweiter Ordnung, sowie die Basis, bleiben ungeändert.

Von keiner der beiden möglichen Arten der Tetartoëdrie des tetragonalen Systems ist es bisher gelungen, Beispiele aufzufinden; dieselben haben also vorläufig nur ein theoretisches Interesse, welches hauptsächlich in dem Nachweis besteht, dass die vollkommene Analogie des Tetragonal- und Hexagonalsystems, welche sich in allen Einzelnheiten der Hemiëdrie documentirte, sich auch auf die Tetartoëdrie erstreckt.

Die physikalischen Eigenschaften der hexagonalen und tetragonalen Krystalle.

§. 83. Specielle Darstellung des Zusammenhanges zwischen dem physikalischen Verhalten und der Form bei den einaxigen Krystallen.

Bereits in §. 36 wurde aus dem allgemeinen Grundgesetz der physikalischen Krystallographie abgeleitet, dass die hexagonalen und tetragonalen Krystalle ihrer Symmetrie wegen die Klasse der physikalisch einaxigen bilden, und dass die physikalische Hauptaxe derselben mit ihrer krystallographischen zusammenfallen müsste. Nach der nunmehr erlangten Kenntniss der Formen beider Systeme, welche gezeigt hat, dass die letzteren nur dadurch verschieden sind, dass jede hexagonale Form $1\frac{1}{2}$ mal so viel Flächen besitzt, als die ihr entsprechende tetragonale, können wir jetzt dazu übergehen, den Zusammenhang der physikalischen und geometrischen Eigenschaften dieser beiden Klassen von Krystallen im Einzelnen zu erörtern.

Was zunächst die Elasticität betrifft, so ist klar, dass dieselbe ein Maximum oder Minimum in der Richtung der Hauptaxe haben muss, wodurch indessen nicht ausgeschlossen ist, dass nicht andere Maxima von

höherem, oder Minima von geringerem Betrage vorhanden sein können. Von der Richtung der Hauptaxe ausgehend, nimmt die Elasticität zu oder ab, aber nach verschiedenen Richtungen verschieden; nur innerhalb gleichwerthiger Symmetrieebenen in gleicher Weise, so dass die Elasticität denselben Werth besitzt in den Richtungen der zwei, resp. drei Nebenaxen in tetragonalen, resp. hexagonalen Krystallen, ebenso wie sie in den zwei, resp. drei Zwischenaxen gleich sein muss. Diese Gleichheit der Elasticität findet aber nur statt bei holoëdrischen Krystallen. Bei hemiëdrischen, bei denen die Symmetrie eine geringere ist, zeigen auch die Elasticitätsverhältnisse keinen höheren Grad von Symmetrie, als die geometrischen. Dies ist sehr detaillirt nachgewiesen worden durch die bereits S. 288 erwähnte Untersuchung des Kalkspaths von Baumgarten; trägt man die verschiedenen Grössen des Elasticitätscoëfficienten nach verschiedenen Richtungen auf diese letzteren auf, so bilden die Endpunkte aller dieser Längen eine sehr complicirte krumme Oberfläche, welche, wenn man sie sich um das Spaltungsrhomboëder herum beschrieben denkt, über den drei oberen, wie über den drei unteren Flächen desselben, also alternirend, je einen Buckel, dazwischen sechs Einsenkungen zeigt, und nur symmetrisch ist zu den drei verticalen Ebenen, in welchen die Zwischenaxen liegen, welche Ebenen ja auch die einzigen Symmetrieebenen des Rhomboëders sind.

Die Härte nach verschiedenen Richtungen ist noch bei sehr wenigen einaxigen Körpern genauer untersucht worden (s. Exner, Härte an Krystallen S. 45 f.), nämlich am unterschwefelsauren Blei, bei dessen Krystallen die Differenzen derselben so gering sind, dass sie in die Grenzen der Beobachtungsfehler fallen, daher die Härtecurven auf allen Flächen Kreise geben (im Zusammenhang damit sind auch die Differenzen der Cohäsion bei diesem Körper so gering, dass er keine erkennbare Spaltbarkeit zeigt); ferner liegen Beobachtungen vor am Kalkspath, nach welchen z. B. die Härtecurve auf der Basis drei Maxima und drei Minima zeigt, welche ganz genau der rhomboëdrischen Symmetrie entsprechen. Da es hiernach auch für die noch nicht untersuchten einaxigen Krystalle anzunehmen ist, dass sie in Bezug auf die Härte sich ähnlich verhalten, und dass sie, wie es bei regulären Körpern gezeigt wurde, die kleinste Zahl von Minimis und Maximis der Härte zeigen, welche ihrer Symmetrie entsprechend möglich ist, so gelangt man hier durch analoge Betrachtungen, wie sie §. 53 bei den regulären Körpern angestellt wurden, zu dem Schlusse, dass eine Spaltbarkeit nicht existiren könne parallel den Flächen einer dihexagonalen oder ditetragonalen Pyramide oder eines dihexagonalen, resp. ditetragonalen Prismas, sondern nur nach der Basis, einer hexagonalen oder tetragonalen Pyramide (bei einem rhomboëdrisch-hemiëdrischen oder einem tetartoëdrischen Krystall nach einem Rhomboëder), oder endlich nach einem hexagonalen Prisma. Die Richtigkeit jener Annahme wird dadurch bestätigt, dass in der That keine anderen Spaltungsrichtungen beobachtet werden, als die zuletzt angeführten. In der Richtung der Hauptaxe kann sowohl ein Cohäsionsminimum,

dies giebt basische Spaltbarkeit, als ein Maximum liegen; in letzterem Falle liegen die Minima entweder in den Normalen zu Pyramiden oder Prismen. Daraus folgt, dass die Spaltbarkeit nach oP etwa so häufig vorkommen muss, als pyramidale und prismatische zusammen genommen, d. h. dass die basische Spaltbarkeit die häufigste sein muss, ein Schluss, welcher durch die Erfahrung bestätigt wird.

Die optischen Eigenschaften ergeben sich sämmtlich aus dem allgemeinen Grundgesetz der physikalischen Krystallographie. Nach diesem ist jede geometrische Symmetrieebene auch eine physikalische; dabei ist jedoch nicht ausgeschlossen, dass in physikalischer Beziehung noch mehr Symmetrieebenen existiren, welche keine geometrischen sind, d. h. dass in Bezug auf irgend eine physikalische Eigenschaft die Symmetrie eine noch höhere ist. In den mit einander in innigem Zusammenhange stehenden Eigenschaften der Elasticität, Cohäsion und Härte lernten wir solche kennen, deren Symmetrie bei den tetragonalen und hexagonalen Krystallen absolut zusammenfällt mit deren geometrischer Symmetrie; die optischen Verhältnisse zeigen natürlich dieselbe Symmetrie, aber zugleich noch eine solche höheren Grades. Es sind in optischer Beziehung nicht blos alle Nebenaxen, wie alle Zwischenaxen, unter einander gleichwerthig; sondern auch alle anderen Richtungen, welche denselben Winkel mit der Hauptaxe einschliessen. Da die optische Elasticitätsfläche der einaxigen Krystalle (vergl. §. 25 und 36), deren Axe mit ihrer geometrischen Hauptaxe zusammenfällt, symmetrisch ist zu jedem Hauptschnitt, d. h. zu jeder verticalen, durch die optische Axe gehenden Ebene, so besitzen die hexagonalen und tetragonalen Krystalle ausser der horizontalen Haupt-Symmetrieebene in optischer Beziehung noch unendlich viele Symmetrieebenen, da jede Verticalebene eine solche ist. Die Erscheinungen, welche ein durch zwei parallele Flächen betrachteter Krystall im polarisirten Licht zeigt, ergeben sich unmittelbar aus dem, was in der ersten Abtheilung über die optischen Eigenschaften der einaxigen Krystalle gesagt worden ist. Blicken wir durch die Basis eines tetragonalen oder hexagonalen Krystalls, welcher entweder nach derselben tafelartig ausgebildet ist, oder an welchem wir jenes Flächenpaar durch Abschleifen künstlich hervorgebracht haben, so bleibt derselbe zwischen gekreuzten Nicols im parallelen Licht bei jeder Drehung dunkel*), im convergenten Licht sehen wir das Axenbild der einaxigen Krystalle. Betrachten wir dagegen einen tetragonalen oder hexagonalen Krystall durch irgend ein anderes Flächenpaar im parallelen Licht, so wird er bekanntlich beim Drehen hell und dunkel, und zwar das letztere jedesmal dann, wenn sein Hauptschnitt, d. h. die Ebene durch die Hauptaxe und durch die Normale zu jenem Flächenpaar (die Richtung der hindurchgehenden Strahlen), einem der beiden ge-

*) Falls er nicht circularpolarisirend ist, denn alsdann zeigt er eine von seiner Dicke und Stärke der Drehung abhängige Farbe, welche aber dieselbe bleibt, wenn man ihn in seiner Ebene dreht.

kreuzten Nicolhauptschnitte parallel ist. Durch die Lage des Krystalls gegen die Nicols, wenn diese Auslöschung des Lichtes stattfindet, sind die Schwingungsrichtungen der beiden aus dem Krystall austretenden Strahlen bestimmt, denn die des ausserordentlichen ist im Hauptschnitt, also die Durchschnittsrichtung desselben mit der Ebene des Flächenpaares, die des ordentlichen in der letzteren und senkrecht zur ersteren. Wie sich nun die Schwingungsrichtungen einer Krystallplatte gegen die krystallographischen Richtungen verhalten, ergiebt sich ganz von selbst. Nehmen wir einen prismatisch ausgebildeten tetragonalen oder hexagonalen Krystall und blicken durch irgend zwei parallele Prismenflächen, so müssen die Schwingungsrichtungen offenbar, die eine parallel, die andere senkrecht zu den Prismenkanten stehen, der Krystall muss dunkel erscheinen, sobald seine Hauptaxe der Schwingungsrichtung des einen der beiden Nicols parallel ist. Betrachten wir dagegen eine tetragonale oder hexagonale Pyramide durch zwei entgegengesetzte Flächen im polarisirten Licht, so ist die Schwingungsrichtung des ordentlichen Strahls, da sie senkrecht zum Hauptschnitt ist, parallel der Basiskante der betreffenden Pyramide, die des ausserordentlichen parallel der Höhenlinie des Dreiecks, welches die Austrittsfläche mit den benachbarten bildet, oder, was dasselbe ist, parallel der Halbirenden des ebenen Winkels zwischen den beiden die Fläche begrenzenden Polkanten. Einen besonderen Fall hiervon stellt das Rhomboëder dar; blicken wir durch ein paralleles Rhomboëderflächenpaar, so müssen wir finden, dass die Schwingungsrichtungen den beiden Diagonalen der Flächen parallel sind.

Die thermischen Eigenschaften ergeben sich ebenso aus den Darlegungen des §. 27. Die Winkel sämmtlicher Prismenflächen zu einander können durch keine Temperaturänderung alterirt werden, ebenso wenig ihre Neigung gegen die Basis. Dagegen müssen die Neigungen aller der thermischen, d. i. der krystallographischen, Hauptaxe nicht parallelen Flächen (ausser der Basis) mit der Temperatur variiren; und da alle Richtungen, welche gleichen Winkel mit der Hauptaxe bilden, thermisch, wie optisch, gleichwerthig sind, so findet die Aenderung der Neigung für alle gleichgeneigten Flächen auch gleichartig statt, d. h. die Polkanten einer hexagonalen oder tetragonalen Pyramide oder eines Rhomboëders werden alle gleichmässig spitzer oder stumpfer, wenn die Temperatur des Krystalles steigt. Wenn sich also auch das Axenverhältniss der Substanz ändert, so bleibt Eines doch völlig unabhängig von der Temperatur bestehen, das ist die Symmetrie des Krystalls, oder, was dasselbe sagen will, sein Krystallsystem. Dieses Gesetz, dass das System eines Krystalles durch keine Temperaturänderung desselben alterirt wird, ist ein ganz allgemeines, es fällt zusammen mit demjenigen, welches wir im §. 34 als das Gesetz »der Erhaltung der Zonen« bezeichneten.

C. Krystalle ohne Hauptaxe.

(Physikalisch zweiaxige Krystalle.)

IV. Das rhombische Krystallsystem.

§. 84. Die Symmetrie der rhombischen Krystalle. Das rhombische Krystallsystem umfasst alle Formen, welche zwar einer Haupt-Symmetrieebene entbehren, aber drei zu einander normale gewöhnliche Symmetrieebenen besitzen. Von den Senkrechten zu diesen Ebenen, den drei Symmetrieaxen der rhombischen Formen, kann also keine mit einer anderen vertauscht werden, ohne die Gestalt zu ändern, keine ist einer anderen gleichwerthig. Nach dem Grundgesetz der physikalischen Krystallographie müssen die drei Symmetrieebenen nun auch solche sein in Bezug auf alle physikalischen Eigenschaften der rhombischen Krystalle. Die Elasticität kann ihr Hauptminimum oder -maximum haben in irgend einer der drei Symmetrieaxen, sie kann aber auch Maxima und Minima haben in anderen Richtungen, nur müssen diejenigen, in welchen sie den gleichen Werth besitzt, symmetrisch zu einander liegen in Bezug auf jene drei Ebenen. Trägt man also auf jede Richtung, von einem gemeinsamen Mittelpunkt aus, eine Länge, proportional dem Werthe des Elasticitätscoëfficienten in dieser Richtung auf, so liegen die Endpunkte aller dieser Radien auf einer geschlossenen krummen Oberfläche, welche symmetrisch getheilt wird durch jede der drei krystallographischen Symmetrieebenen. Ebenso muss nach denselben die Härte und die Cohäsion symmetrisch sein. Existirt in einem rhombischen Krystall also nach irgend einer Richtung ein Minimum der Cohäsion (senkrecht dazu also Spaltbarkeit), so muss das Gleiche stattfinden in jeder Richtung, welche zu jener symmetrisch liegt in Bezug auf eine der drei erwähnten Ebenen.

Wie bereits hergeleitet wurde (§. 36), müssen die Krystalle ohne Hauptaxe optisch zweiaxig sein. Bei der jetzt zu betrachtenden ersten Klasse derselben, der rhombischen, müssen die optischen Verhältnisse in ihrer Gesammtheit der Symmetrie nach den drei auf einander senkrechten krystallographischen Symmetrieebenen unterworfen sein. Dies ist jedoch nur möglich, wenn die drei Hauptschnitte der optischen Elasticitäts- und der Wellen-

fläche absolut zusammenfallen, und zwar für alle Farben, mit den drei geometrischen Symmetrieebenen der Krystalle. Dann fallen die Hauptschnitte also auch für die verschiedenen Farben zusammen, d. h. wir haben denjenigen einfachsten Fall der optisch zweiaxigen Krystalle vor uns, der S. 94 f. ausführlich erörtert worden ist. Daraus folgt, dass die Richtungen der drei optischen Elasticitätsaxen zugleich diejenigen der drei Symmetrieaxen sind; dass stets eine der letzteren die Schwingungsrichtung der grössten Lichtgeschwindigkeit, eine andere die der kleinsten, die dritte die der mittleren ist; dass die optische Axenebene bei den rhombischen Krystallen stets eine der drei Symmetrieebenen ist, wobei nicht ausgeschlossen, dass für einen Theil der Farben die eine, für den übrigen Theil eine der beiden anderen Symmetrieebenen optische Axenebene ist (vergl. S. 97). Diese optische Symmetrie und ihr Verhältniss zur geometrischen muss auch erhalten bleiben, sobald der Krystall eine andere Temperatur annimmt; ändert sich hierbei auch der Winkel der optischen Axen, so bleibt die Lage der Mittellinie doch immer constant einer Symmetrieaxe parallel; ist die Aenderung der drei Hauptbrechungsindices so verschieden, dass ein Wechsel der Axenebene eintritt, so geht dieselbe in eine andere der drei Symmetrieebenen über u. s. f. (vergl. S. 147).

Auch die thermischen Verhältnisse der rhombischen Krystalle befolgen das allgemeine Grundgesetz der physikalischen Krystallographie. So ist eine der drei Symmetrieaxen stets die Richtung der grössten Ausdehnung durch die Wärme, eine andere die der kleinsten, die dritte die der mittleren. Da die thermische Ausdehnung des Krystalls somit symmetrisch zu den geometrischen Symmetrieebenen erfolgt, so mögen die Aenderungen der Dimensionen nach den verschiedenen Richtungen noch so ungleich sein, niemals wird dadurch der Grad der Symmetrie eines rhombischen Krystalls geändert werden können.

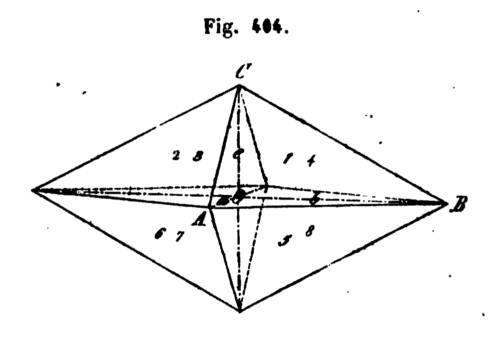
Endlich gilt das Gleiche auch von den übrigen physikalischen Eigenschaften; eine der drei Symmetrieaxen ist z. B. die Richtung des stärksten Para- oder Diamagnetismus, die beiden anderen die des mittleren und kleinsten u. s. f. Dabei aber ist es selbstverständlich nicht nöthig, dass dieselbe Symmetrieaxe, der die Richtung der grössten Lichtgeschwindigkeit parallel ist, zugleich auch die Axe der grössten thermischen Ausdehnung, der grössten Wärmeleitungsfähigkeit u. s. w. ist, da ja selbst für das Licht diese Uebereinstimmung nicht allgemein ist, indem es Krystalle giebt, in welchen die Richtung der mittleren optischen Elasticität in Bezug auf eine Farbe diejenige der kleinsten für eine andere Farbe ist.

§. 85. **Wahl der Axen und der Grundform.** Bei der Betrachtung der bisherigen Krystallsysteme wurden stets Symmetrieebenen zu Axenebenen gewählt, weil alsdann die Indices der übrigen Krystallflächen die einfachsten Werthe erhielten, und vor Allem, weil in diesem Falle alle Flächen einer einfachen Form gleiche Indices hatten. Es wird daher nicht zweifelhaft sein, dass es in jeder Hinsicht das Einfachste und Bequemste sei, im rhom-

bischen Systeme ebenso zu verfahren; nur haben wir hier keine Wahl unter den Symmetrieebenen, da eben nur die erforderliche Zahl von dreien vorhanden ist. Nehmen wir also diese zu Axenebenen, so werden die drei Symmetrieaxen die Axen, auf welche wir die Formen des rhombischen Systems zu beziehen haben, und welche sämmtlich zu einander normal stehen, so dass diese Wahl auch noch den wichtigen Vortheil sehr vereinfachter Berechnung mit sich bringt. Unter diesen Axen ist nun aber keine eine Hauptaxe, es ist also völlig gleichgültig, welche derselben wir senkrecht aufstellen, da alle drei gleichsam von demselben Range sind.

Hiermit haben wir von den Elementen eines Krystalls nur die Axenwinkel (sämmtlich $= 90^0$); um auch das Parameterverhältniss festzustellen, haben wir nun eine Grundform auszuwählen, d. h. eine Fläche, welche die drei Axen in endlichen Abständen schneidet, und das Verhältniss der letzteren festzustellen. Sei dieses $= a : b : c$, oder, wenn wir eine Axenlänge gleich 1 setzen, $= a : 1 : c$, so beziehen sich die absoluten Längen a, b und c auf die drei Symmetrieaxen; in deren Richtungen ist aber bekanntlich die Ausdehnung der Krystalle durch die Wärme eine verschiedene, diese Längen ändern sich also mit der Temperatur nicht proportional, folglich ändert sich mit dieser das Verhältniss $a : b : c$, oder die absoluten Zahlen a und c in der Relation $a : 1 : c$, stetig; es müssen diese also irrationale Zahlen sein, und genau genommen nur für eine bestimmte Temperatur gelten. Bei einer anderen hat die zur Grundform gewählte Fläche andere Neigungswinkel (wenn auch nur sehr wenig verschiedene) zu den Axenebenen. Die Symmetrie des Krystalls erfordert nun zu dieser Fläche noch sieben zugehörige. Seien in Fig. 404 $a = OA$, $b = OB$ und $c = OC$ die Parameter der Grundform, so erfordert die Symmetrie nach der Ebene ac (d. i. AOC) zu jener, mit 1 bezeichnet, die Fläche 2, die Symmetrie nach bc die Flächen 3 und 4, und endlich die Symmetrie nach ab die vier unteren Flächen 5—8. So erhalten wir als vollständige Grundform eine Gestalt, welche, weil ihr Durchschnitt durch jede der drei Symmetrieebenen die Gestalt eines Rhombus hat, rhombische Pyramide genannt wird. Es ist üblich, die zur Grundform gewählte*) und die primäre genannte Pyramide so zu stellen, dass von den beiden horizontalen Axen die kürzere auf den Be-

Fig. 404.



*) Welche von den verschiedenen möglichen oder vorkommenden Pyramiden eines rhombischen Krystalls man zur Grundform wählt, ist an und für sich gleichgültig (vergl. darüber die Bemerkungen S. 258).

obachter zuläuft, also mit a bezeichnet wird; da man gewöhnlich $b = 1$ setzt, so ist demnach der Zahlenwerth von a stets kleiner als 1. Man nennt nun diese Axe die Brachydiagonale (auch »Brachyaxe«), die querlaufende b die Makrodiagonale (oder »Makroaxe«). Dass es völlig gleichgültig ist, welche der drei Symmetrieaxen wir vertical stellen, wurde bereits oben erwähnt; die dazu gewählte nennt man Verticalaxe*) oder kurz Verticale, und bezeichnet, wie bisher, ihre Länge mit c. Die in Fig. 404 dargestellte Pyramide hat das Axenverhältniss:

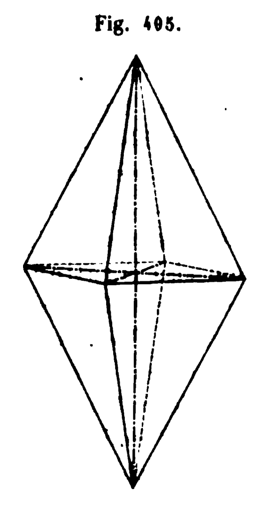
$$a : b : c = 0,4271 : 1 : 0,5258.$$

Wir hätten aber mit demselben Rechte auch jede der beiden anderen, z. B. die mit b bezeichnete Axe, zur Verticalen machen können; dann würde die bisherige Verticale zur Makrodiagonalen, die frühere Brachydiagonale würde es auch in der neuen Stellung bleiben, und wir hätten die in Fig. 405 dargestellte Form mit dem Axenverhältniss

$$a : b : c = 0,8130 : 1 : 1,9037$$

(d. i. = 0,4271 : 0,5258 : 1).

Fig. 405.



Bei gleicher Ausdehnung der Flächen besitzt die rhombische Pyramide sechs Ecken, welche 2 + 2kantig sind, da von den vier in einer solchen zusammenstossenden Kanten je zwei gegenüberliegende gleich (wegen der Symmetrie), zwei benachbarte ungleich sein müssen (weil sonst die Pyramide tetragonal wäre, also eine höhere Symmetrie hätte). Daraus folgt, dass die genannte Gestalt dreierlei Kanten besitzt, von denen je vier, welche einer Symmetrieebene parallel sind und deren Winkel von derselben halbirt wird, gleich stumpf sind. Haben wir uns für eine bestimmte Stellung der Pyramide entschieden, wie Fig. 404, so nennen wir die vier unter einander gleichen horizontalen Kanten, z. B. AB, Basiskanten, die übrigen acht Polkanten, unter denen wir zweierlei zu unterscheiden haben, stumpfere, wie AC, und schärfere, wie BC.

Es bedarf kaum der Erwähnung, dass es auch rhombische Pyramiden geben könne (und zwar sind solche bei jeder Substanz möglich), welche fast genau gleiche Winkel der stumpferen und schärferen Polkanten haben; ist nun die Brachydiagonale die Richtung der stärksten Ausdehnung durch die Wärme, so wird es eine Temperatur geben, bei welcher jene genau gleich sind, die Pyramide in geometrischer Beziehung also genau mit einer tetragonalen übereinstimmt. Sie ist aber keine solche, denn dazu müsste

*) Die vertical gestellte Symmetrieaxe wurde früher allgemein »Hauptaxe« genannt. Es bedarf nach dem Bisherigen keiner Erklärung weiter, dass dies unpassend und geeignet ist, eine irrthümliche Ansicht über die Bedeutung derselben zu erregen.

sie nicht nur deren krystallographische Symmetrie für alle Temperaturen, sondern auch deren physikalische Symmetrie besitzen, was keineswegs der Fall ist.

Von den dreierlei Kantenwinkeln, welche die rhombischen Pyramiden (von dem letzterwähnten Fall abgesehen) besitzen, bedarf es nur der Kenntniss zweier, um das Parameterverhältniss zu berechnen, da dasselbe nur zwei von einander unabhängige Grössen enthält. Diese Berechnung ist eine höchst einfache:

Seien z. B. die Winkel der beiden Polkanten AC und BC Fig. 404 gemessen, so ist die Hälfte des ersteren gleich dem Winkel der Fläche ABC mit der Axenebene ac, die Hälfte des zweiten gleich dem Winkel derselben mit der Axenebene bc; in dem sphärischen Dreieck, gebildet von ABC, AOC und BOC, sind somit, da die beiden letzteren Flächen sich unter 90° schneiden, alle drei Winkel bekannt. Berechnet man daraus die beiden gegenüberliegenden Seiten, d. i. die Winkel ACO und BCO, so sind die Axenlängen bestimmt, denn

$$\text{cotang} \measuredangle BCO = \frac{c}{b} = c \text{ (wenn } b = 1 \text{ gesetzt wird) und}$$

$$\text{tang} \measuredangle ACO = \frac{a}{c}.$$

Sind die Axenlängen dagegen gegeben, so findet man die Kantenwinkel der Pyramide durch ganz die gleiche Rechnung, nur in umgekehrter Reihenfolge, so dass man zuerst die Winkel, welche die Pyramidenkanten mit den Axen bilden, dann jene selbst berechnet. So verfährt man namentlich in dem Falle, dass man aus zwei Kantenwinkeln den dritten, um den berechneten mit dem direct beobachteten zu vergleichen, ableiten will; man sucht alsdann zuerst das Axenverhältniss und aus diesem den dritten Kantenwinkel.

§. 86. Ableitung und Bezeichnung der rhombischen Pyramiden. Die von uns zur Grundform gewählte Fläche, mit ihren zugehörigen die primäre Pyramide bildend, ist an und für sich eine ganz beliebige, und es können an den Krystallen derselben Substanz noch zahlreiche andere rhombische Pyramiden auftreten, deren Axenverhältnisse jedoch in rationaler Relation zu dem der primären stehen, oder deren Indices, bezogen auf die Parameter jener, rationale Zahlen sein müssen. Die Gesammtheit aller in derartigem Zusammenhang stehenden Pyramiden (mit Einschluss der besonderen Fälle, welche wir als eigenthümliche Formen im nächsten § kennen lernen werden), bilden die Krystallreihe des betreffenden Körpers. Welche von allen den etwa an den Krystallen desselben vorkommenden oder möglichen Pyramiden wir zur primären wählen, hängt wesentlich von Zweckmässigkeitsgründen ab; so wählt man entweder die am häufigsten vorherrschende; oder diejenige, auf welche sich die übrigen mit den einfachsten Indices beziehen lassen, oder durch welche die Beziehungen des Körpers zu der Krystallform chemisch verwandter Stoffe deutlicher hervortritt. Die üblichen Bezeichnungen der so gewählten Primärform sind:

P nach Naumann,
$(a : b : c)$ nach Weiss,
$(1\,1\,1)$ nach Miller.

Von dieser haben wir nun alle übrigen Formen abzuleiten. Zunächst ist es klar, dass Pyramiden zu den krystallonomisch möglichen desselben Körpers gehören werden, welche dasselbe Verhältniss der Brachy- zur Makrodiagonale haben, wie die primäre, aber eine kleinere oder grössere, zu der jener in rationalem Verhältniss stehende, Verticalaxe; diese bezeichnen wir, je nachdem sie spitzer oder stumpfer als P sind, mit

$$mP = (a : b : mc)$$

$$\text{oder } \frac{1}{m}P = (a : b : \frac{1}{m}c),$$

wo m eine rationale Zahl und grösser als 1 ist. Die so von der primären abgeleiteten Pyramiden nennt man diejenigen der Verticalreihe; ihr Miller'sches Zeichen ist (hhl), da die beiden ersten Indices in demselben Verhältniss, nämlich $1 : 1$, stehen müssen, wie bei (111). In Fig. 406 sind neben der stärker gezeichneten P (= Fig. 404) zwei solcher abgeleiteter Pyramiden dargestellt, nämlich $2P = (a : b : 2c) = (221)$ und $\frac{1}{2}P = (a : b : \frac{1}{2}c) = (112)$. Es ist unschwer, sich vorzustellen, wie die Glieder dieser Verticalreihe, deren Grenzformen wir erst im nächsten Paragraphen kennen lernen werden, mit einander combinirt erscheinen; diejenige Pyramide, deren Coëfficient von c grösser ist, schärft die Basiskanten der stumpferen zu; umgekehrt spitzt die letztere die Polecken der spitzeren Pyramiden so zu, dass die Combinationskanten den Basiskanten derselben parallel sind. Die Flächen sämmtlicher rhombischer Pyramiden einer Verticalreihe, welche nach der Numerirung der in Fig. 404 dargestellten die Zahlen 1, 3, 5, 7 tragen, liegen in einer Zone, da sie sämmtlich einer und derselben Basiskante parallel sind, ebenso alle mit 2, 4, 6, 8 zu bezeichnenden.

Fig. 406.

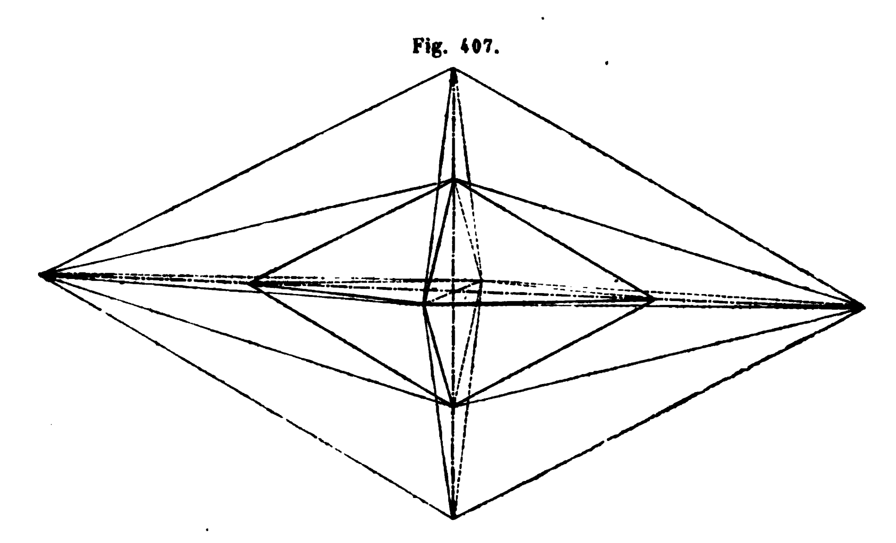
Weitere Pyramiden derselben Krystallreihe werden wir erhalten, wenn wir das Verhältniss der Brachydiagonalen zur Verticalen $a : c$ constant, und die Länge der Makrodiagonalen um rationale Vielfache ihrer eigenen Länge variiren lassen. So resultiren Pyramiden einer sogenannten makrodiagonalen Reihe, welche bezeichnet werden mit

$$\bar{P}n = (a : nb : c) = (hkh),$$

wo n, resp. das ihm gleiche $\frac{h}{k}$ angeben, das wie Vielfache die Makrodia-

gonale von derjenigen der Pyramide P ist. Alle Pyramiden $\bar{P}n$, wenn $n > 1$, erscheinen an P als Zuschärfungen der stumpferen Polkanten. Wie von der primären, lässt sich aber auch von jeder anderen Pyramide der Verticalreihe, so z. B. von $2P$, eine neue makrodiagonale Reihe ableiten,

Fig. 407.



deren Zeichen alsdann $2\bar{P}n = a : nb : 2c = (hkl)$ wäre, wobei $h = 2l$. Das allgemeine Zeichen aller Pyramiden der makrodiagonalen Reihen ist somit

$$m\bar{P}n = (a : nb : mc) = (hkl).$$

Von diesen sind in Fig. 407, bezogen auf dieselbe (stärker gezeichnete) Grundform, wie in Fig. 406, zwei Beispiele dargestellt, nämlich

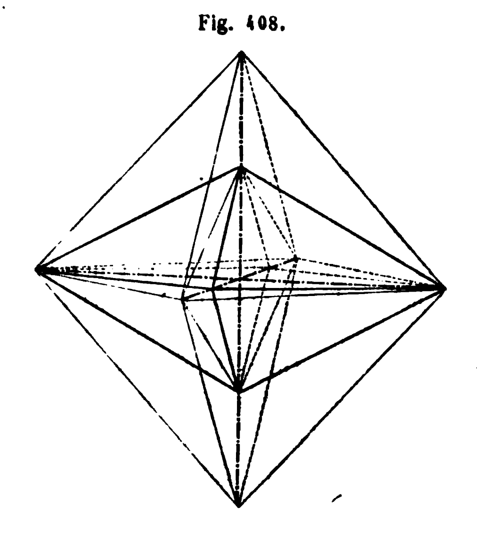
$$\bar{P}2 = (a : 2b : c) = (212)$$
$$2\bar{P}2 = (a : 2b : 2c) = (211).$$

Endlich giebt es noch eine dritte Art, krystallonomisch mögliche Pyramiden von der primären abzuleiten, durch Verlängerung der Brachydiagonalen um rationale Vielfache ihrer Länge, so dass wir eine brachydiagonale Reihe von Pyramiden mit dem Zeichen

$$\breve{P}n = (na : b : c) = (hkk)$$

erhalten, welche die schärferen Polkanten von P zuschärfen. Eine solche Reihe kann aber auch hier von jeder Pyramide der verticalen Reihe abgeleitet werden, daher es solcher beliebig viele giebt, deren allgemeines Zeichen

Fig. 408.



$$m\breve{P}n = (na : b : mc) \doteq (hkl).$$

Fig. 408 zeigt neben der mit der früheren identischen Grundform die beiden brachydiagonalen Pyramiden

$$\breve{P}2 = (2a : b : c) = (1\,2\,2)$$
$$\text{und } 2\breve{P}2 = (2a : b : 2c) = (1\,2\,1).$$

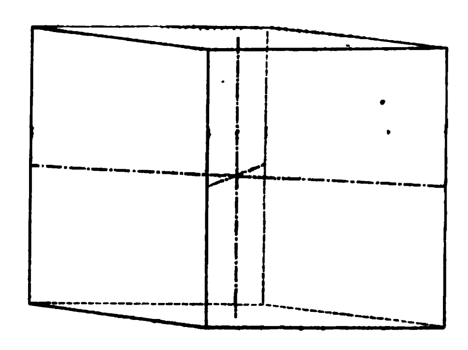
Bei der Ableitung der makrodiagonalen und der brachydiagonalen Pyramiden wurde nur von einer rationalen Vervielfältigung einer Axe gesprochen, also der Coëfficient n stets > 1 angenommen. Es ist aber leicht, zu zeigen, dass damit wirklich alle möglichen Fälle erschöpft sind, denn würde man z. B. von P eine Pyramide $P\frac{1}{2}$ ableiten, welche dasselbe Verhältniss $a : c$, wie die primäre, aber nur eine halb so grosse Makrodiagonale habe, so ist deren Axenverhältniss $= a : \frac{1}{2}b : c$, d. i. aber $= 2a : b : 2c$; diese Pyramide fällt also zusammen mit der brachydiagonalen Pyramide $2\breve{P}2$, und so jede andere mit gebrochenem n. Wir können also, wie weiterhin immer geschehen soll, uns darauf beschränken, $n > 1$ zu nehmen.

Alle Zeichen der abgeleiteten Pyramiden müssen selbstverständlich geändert werden, wenn eine andere Grundform gewählt wird; die neuen ergeben sich unmittelbar aus dem Verhältniss, in welchem die Parameter der neuen Grundform zu denen der früheren stehen.

Die Berechnung irgend einer beliebigen rhombischen Pyramide unterscheidet sich nicht von derjenigen der primären.

§. 87. **Ableitung und Bezeichnung der rhombischen Prismen und Pinakoide.** In der oben besprochenen verticalen Ableitungsreihe werden die Pyramiden mP um so spitzer, je grösser der Coëfficient m wird, ihre Flächen nähern sich um so mehr der verticalen Stellung; das Endglied der Reihe ist diejenige rhombische Pyramide, deren $a : b$ demjenigen der primären gleich ist, deren m aber $= \infty$. Da die Flächen dieser Form der Verticalaxe parallel sind, so fallen je zwei über einander liegende Pyramidenflächen für sie in eine Ebene, die Gestalt besteht nur aus vier verticalen, den Raum allein nicht umschliessenden Flächen, in Fig. 409 in Combination mit der horizontalen Symmetrieebene dargestellt, und heisst das primäre rhombische Prisma:

Fig. 409.



$$\infty P = (a : b : \infty c) = (1\,1\,0).$$

Der horizontale Querschnitt dieser Form ist derjenige der primären Pyramide, sie bildet also in Combination mit dieser die gerade Abstumpfung der Basiskanten derselben. Je kleiner das Verhältniss $\frac{a}{b}$, desto stumpfer ist die dem Beobachter zugekehrte stumpfe Kante des Prismas.

Diese Form ist jedoch nicht das einzige verticale Prisma derselben Krystallreihe. Nehmen wir irgend eine abgeleitete Pyramide der makrodiagonalen Reihen $m\bar{P}n$, so ist diese ein Glied einer neuen verticalen Reihe mit constantem n, deren Endglied für den Fall $m = \infty$ abermals ein Prisma ist, dessen vorderer Kantenwinkel um so stumpfer ist, je grösser n. Diese makrodiagonalen Prismen, deren Zeichen

$$\infty\bar{P}n = (a : nb : \infty c) = (hk0)_{(h>k)},$$

schärfen die stumpfen Kanten des primären Prismas zu.

Ausserdem existiren noch eine Reihe von Prismen, deren vordere Kante schärfer ist, als diejenige des primären, welche demnach die scharfen Kanten desselben zuschärfen. Dies sind die Grenzformen der Reihen brachydiagonaler Pyramiden für den Fall $m = \infty$. Ihre Bezeichnung ist

$$\infty\breve{P}n = (na : b : \infty c) = (hk0)_{(k>h)}.$$

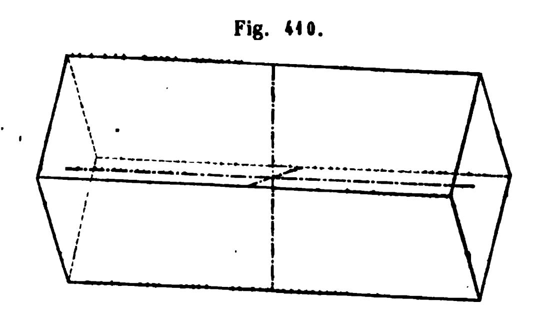
So sind also an den Krystallen eines Körpers theoretisch eine unendliche Zahl von verticalen Prismen möglich, von welchen aber gewöhnlich nur sehr wenige, durch die einfachsten Zahlenwerthe des Coëfficienten n von ∞P ableitbar, vorkommen.

Betrachten wir die von irgend einer Pyramide, z. B. P, sich ableitende makrodiagonale Reihe, so muss deren Endglied diejenige Pyramide $\bar{P}n$ sein, deren $n = \infty$, welche wir also mit

$$\bar{P}\infty = (a : \infty b : c) = (101)$$

bezeichnen müssen. Dies ist aber offenbar ebenso eine prismatische Form, wie die zuletzt betrachteten, deren vier Flächen jedoch nicht der Verticalaxe, sondern der Makrodiagonale parallel laufen, denn für deren speciellen Werth $n = \infty$ fallen immer je eine rechte und eine linke Pyramidenfläche in eine Ebene. Ein solches horizontales Prisma, in Fig. 410 in Combination mit einer Symmetrieebene dargestellt, wird seiner Dachform wegen Doma genannt, und das bezeichnete, welches der Makrodiagonale parallel ist und dessen Flächen die beiden anderen Axen im Verhältniss $a : c$ der primären Pyramide schneiden, das primäre Makrodoma. Dasselbe bildet die gerade Abstumpfung der stumpferen Polkanten der Pyramide $P = (111)$.

Fig. 410.



Da nun aber von jeder Pyramide mP oder $\frac{1}{m}P$ sich eine makrodiagonale Reihe ableitet, so wird das Endglied jeder solchen Reihe eine Makrodoma, aber ein solches mit anderem Verhältniss der Brachydiagonale zur

Verticale, sein. Die spitzeren, deren obere Kante schärfer ist, als diejenige des primären, haben das Zeichen

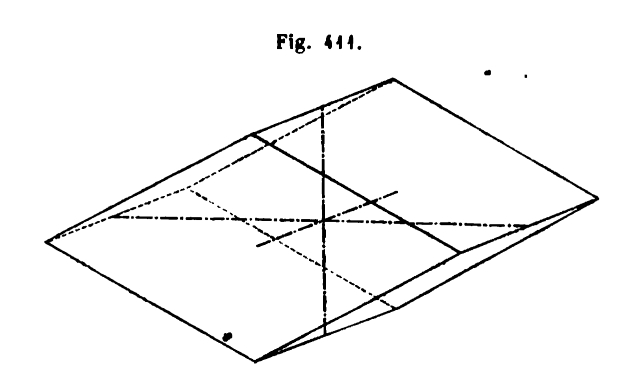
$$m\bar{P}\infty = (a : \infty b : mc) = (h0l)_{(h>l)};$$

die stumpferen

$$\frac{1}{m}\bar{P}\infty = (a : \infty b : \frac{1}{m}c) = (h0l)_{(h<l)}.$$

Jedes Makrodoma stumpft die stumpfen Polkanten derjenigen rhombischen Pyramiden ab, welche dasselbe Verhältniss $a : c$ haben, wie das Doma.

Fig. 411.



Ganz analoge Formen bilden die Endglieder der brachydiagonalen Ableitungsreihen der Pyramiden für den Fall $n = \infty$, wobei je eine vordere mit einer hinteren Fläche in eine Ebene fällt und so aus der achtflächigen Pyramide ein vierflächiges horizontales Prisma wird, dessen zwei Paare paralleler Flächen der Brachydiagonale parallel laufen, Fig. 411. Diese Brachydomen sind wieder theils spitzere

$$m\breve{P}\infty = (\infty a : b : mc) = (0kl)_{(k>l)},$$

theils stumpfere

$$\frac{1}{m}\breve{P}\infty = (\infty a : b : \frac{1}{m}c) = (0kl)_{(k<l)}.$$

Zwischen beiden Classen steht das **primäre Brachydoma**

$$\breve{P}\infty = (\infty a : b : c) = (011)$$

mitten inne; dieses stumpft die schärferen Polkanten der primären Pyramide ab, die anderen Brachydomen die schärferen Polkanten derjenigen Pyramiden, deren Axenverhältniss $b : c$ das gleiche ist, wie das des betreffenden Domas.

Die Makrodomen wie die Brachydomen bilden daher unter einander eine Reihe von den stumpfsten bis zu den spitzesten, d. s. diejenigen $m\bar{P}\infty$ und $m\breve{P}\infty$, bei denen m eine sehr grosse rationale Zahl ist. Das Endglied der einen wie der andern Reihe ist eine Form, für welche auch $m = \infty$ wird, somit je zwei Flächen des Domas in eine verticale Ebene zusammenfallen. So liefert die Reihe der Makrodomen als Endglied ein verticales paralleles Flächenpaar, das **Makropinakoid** genannt, welches der Makrodiagonale und der Verticalaxe parallel ist und das Zeichen

$$\infty\bar{P}\infty = (a : \infty b : \infty c) = (100)$$

hat; das Endglied der Reihe der Brachydomen dagegen ist ebenfalls ein Paar

paralleler Flächen, das **Brachypinakoid**, welches zugleich der Brachydiagonale und der Verticalaxe parallel ist und daher mit

$$\infty \breve{P} \infty = (\infty a : b : \infty c) = (0\,1\,0)$$

bezeichnet wird.

Es leuchtet ein, dass die beiden letzten Formen nichts Anderes sind, als zwei von den drei Symmetrieebenen des rhombischen Systems. Wir haben also auch für die dritte eine Bezeichnung zu suchen. Da sie horizontal ist, wird sie, wie in den beiden letzten Systemen, die **Basis** genannt und, als untere Grenze der Verticalreihe der Pyramiden aufgefasst, mit

$$o P$$

bezeichnet; da sie der Brachy- und der Makrodiagonale parallel ist, ist ihr Weiss'sches und Miller'sches Zeichen:

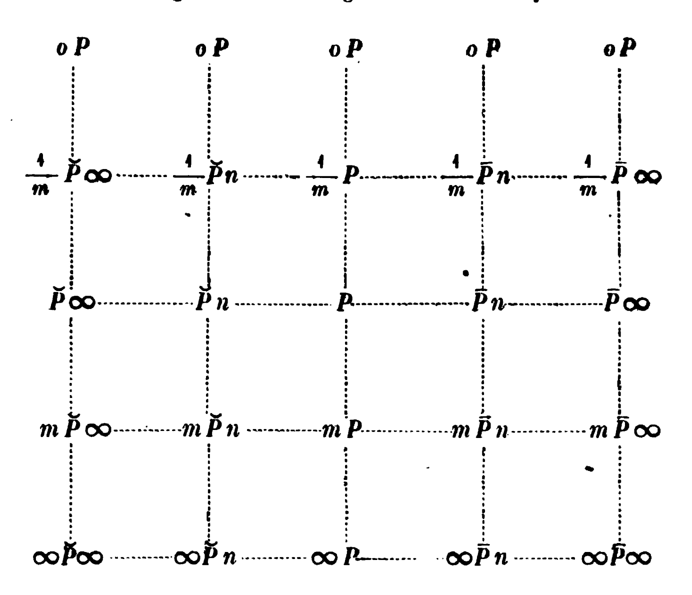
$$(\infty a : \infty b : c) \text{ resp. } (0\,0\,1).$$

Die drei Pinakoide (Basis, Makro- und Brachypinakoid) stumpfen die Ecken jeder Pyramide gerade ab, $o P$ die obere und untere, $\infty \bar{P} \infty$ die vordere und hintere, $\infty \breve{P} \infty$ die rechte und linke; die beiden letzteren bilden die geraden Abstumpfungen der Prismenkanten u. s. f.

Dieselben drei Flächenpaare $(0\,0\,1)$, $(0\,1\,0)$, $(1\,0\,0)$ bilden für sich allein in Combination eine Gestalt, welche sich geometrisch nicht vom regulären Hexaëder unterscheidet, selbstverständlich aber physikalisch, in Bezug auf Spaltbarkeit, optische Eigenschaften u. s. f. Es leuchtet ein, dass das Axenverhältniss eines Krystalls nicht zu bestimmen ist, wenn an demselben nur jene drei Flächenpaare vorkommen; durch die Erforschung seiner physikalischen Eigenschaften ist alsdann zwar festzustellen, dass der Krystall rhombisch sei, dass seine Axenwinkel α, β, γ sämmtlich $= 90^0$ seien, aber sein Axenverhältniss $a : b : c$ bleibt unbekannt. Tritt zu diesen Flächen nun noch eine prismatische Form hinzu, so gestattet diese, wenigstens das Längenverhältniss zweier Axen zu bestimmen. Betrachten wir z. B. diese Form als primäres verticales Prisma und messen den stumpfen Winkel desselben, so ist aus Fig. 409 ersichtlich, dass die Cotangente des halben Prismenwinkels gleich dem Verhältniss $a : b$ ist. Betrachtet man die prismatische Form als Makrodoma oder Brachydoma, so ist es natürlich das Verhältniss $a : c$, resp. $b : c$, welches auf die angegebene Art gefunden wird.

Sind nun aber zwei prismatische Formen vorhanden, welche zwei verschiedenen Symmetrieaxen parallel laufen, so ist eine vollständige Bestimmung der **Krystallform**, d. h. aller Elemente des Krystalls, möglich; sei z. B. die eine Form verticales Prisma mit dem gemessenen Winkel $2\,m$, so ist $a : b =$ cotang. m; sei die andere Brachydoma, dessen obere Kante $2\,q^0$ messe, so ist $c : b =$ cotang. q, also $a : b : c$ bekannt. Daraus geht hervor, dass es nicht des Auftretens rhombischer Pyramiden bedarf, um das Parameterverhältniss vollständig zu bestimmen.

Die verschiedenen Ableitungsreihen einer Krystallreihe des rhombischen Systems lassen sich wieder in einem Schema vereinigen, welches den Zusammenhang derselben in übersichtlicher Weise darlegt:



Gehen wir von der in der Mitte stehenden primären Pyramide aus, so ist diese das mittelste Glied einer horizontalen Reihe, bestehend einerseits aus den Brachypyramiden bis zum Brachydoma, andererseits aus den makrodiagonalen Pyramiden bis zum Makrodoma. Da für alle Formen dieser letzteren Reihe $a : c$ constant, so bestimmt ein in einer stumpferen Polkante zusammenstossendes Flächenpaar von P eine Zone, in welcher die entsprechenden Flächenpaare aller Makropyramiden $\bar{P}n$ liegen; da ebenso für den vorderen Theil der Reihe das Verhältniss $b : c$ constant bleibt, so ist durch zwei in einer längeren (d. i. schärferen) Polkante zusammenstossende Flächen von P eine weitere Zone bestimmt, in welcher die entsprechenden Flächenpaare aller Pyramiden $\breve{P}n$ bis $\breve{P}\infty$ liegen.

Betrachten wir nunmehr eine flachere Pyramide $\frac{1}{m}P$, so leiten sich von dieser nach rechts und links Makro- und Brachypyramiden und je ein Doma ab, und für jede dieser beiden Reihen gilt das analoge Zonenverhältniss, wie für die beiden vorigen Reihen. Ganz dasselbe ist der Fall auch für die beiden von einer spitzeren Pyramide mP sich herleitenden Reihen. Von der spitzesten Pyramide der Verticalreihe, dem Prisma ∞P, werden nun, ebenso Makroprismen, deren stumpfestes das Makropinakoid, dessen vorderer Winkel 180^0 ist, und Brachyprismen abgeleitet, von denen das schärfste (der nach vorn gekehrte Winkel $= 0^0$) das Brachypinakoid. Alle Flächen sämmtlicher Formen der untersten Horizontalreihe gehören einer Zone an, denn sie sind ohne Ausnahme der Verticalaxe parallel.

Vergleicht man nun die Glieder irgend einer verticalen Reihe des obigen Schemas, sei es die der primären, sei es die einer makrodiagonalen oder einer brachydiagonalen Pyramide, mit einander, so sieht man leicht, dass durch zwei in einer Basiskante zusammenstossende Flächen irgend einer

Pyramide eine Zone bestimmt ist, in welcher die entsprechenden Flächenpaare *aller* anderen der ganzen Verticalreihe liegen; denn für alle ist $a : b$ constant, also die Basiskanten von derselben Richtung. Diese Richtung besitzt ferner auch die Kante, in welcher eine Fläche des derselben Verticalreihe angehörigen Prismas von der Basis geschnitten wird, also liegen alle Pyramiden einer solchen Reihe mit parallelen Kanten zwischen jenem Prisma und der Basis, sie stumpfen die Combinationskanten der beiden letzteren ab, z. B. P, $2P$, $\frac{1}{2}P$ u. s. f. die Kanten $\infty P : oP$, ebenso $\breve{P}2$, $2\breve{P}2$, $\frac{1}{2}\breve{P}2$ die Kanten $\infty\breve{P}2 : oP$.

Endlich gilt dasselbe auch für die beiden äussersten Reihen, die der Makrodomen und die der Brachydomen. Da aber die ersteren nur Flächen haben, welche der Makrodiagonale parallel, die letztere nur solche, welche der Brachydiagonale parallel sind, so bilden alle Flächen sämmtlicher Makrodomen eine einzige Zone, deren Axe die Makrodiagonale b ist, d. h. sie stumpfen sämmtlich die Combinationskanten der Basis mit dem Makropinakoid ab; ebenso sind alle Flächen sämmtlicher Brachydomen tautozonal, und ihre Zonenaxe ist die Axe a, d. h. die Kante zwischen Basis und Brachypinakoid, welche sie abstumpfen.

Weiteres über die Zonenverhältnisse des rhombischen Systems zu erörtern, wird sich bei den Beispielen Gelegenheit darbieten.

Ueberblicken wir noch einmal die verschiedenen Arten von Formen, welche bei der Symmetrie nach drei auf einander senkrechten Flächen möglich sind, so sehen wir, dass es deren wie in den bisherigen Systemen *sieben* giebt; es sind folgende:

1) rhombische Pyramiden,
2) verticale Prismen,
3) Makrodomen,
4) Brachydomen,
5) das Makropinakoid,
6) das Brachypinakoid,
7) die Basis.

Dies sind aber nur scheinbar *sieben* verschiedene Arten von Formen, in Wirklichkeit deren nur *drei*. Erinnern wir uns nämlich, dass wir bei der Ableitung der Formen dieses Krystallsystems davon ausgingen, die drei Symmetrieebenen, das Makropinakoid, das Brachypinakoid und die Basis als Axenebenen*) zu Grunde zu legen, also deren drei Durchschnittsrichtungen, d. i. die drei Symmetrieaxen, als »Axen« zu wählen, — dass es aber a priori keinen Grund gab, eine *bestimmte* von diesen drei zur Verticalaxe zu machen. Wir können folglich jede dieser drei Pinakoide zur Basis, jede beliebige zum Brachypinakoid u. s. f. wählen, diese drei Flächenpaare bilden demnach nur *eine* Art von Formen. Wenn wir von drei möglichen

*) Selbstverständlich hätten wir auch drei beliebige andere Flächen zu Axenebenen nehmen können.

Aufstellungsarten eines rhombischen Krystalls eine bestimmte gewählt haben, so werden die Formen, deren Flächen der Verticalaxe parallel sind, Prismen, die der Axe *a* parallelen Brachydomen, die *b* parallelen Makrodomen; ändern wir dagegen die Stellung, so werden die bisherigen Makro- oder Brachydomen verticale Prismen. Diese drei Arten der prismatischen Formen sind also nicht principiell verschieden, und ihre Unterscheidung beruht nur auf der willkürlichen Stellung der Krystalle. So bleiben denn, wie oben bemerkt, nur drei, wirklich von einander verschiedene Arten von Formen im rhombischen Systeme übrig, nämlich 1) Pyramiden, bestehend aus je acht Flächen, welche für sich den Raum umschliessen; 2) Prismen, bestehend aus vier Flächen, welche nach einer Richtung offene Formen darstellen; 3) Pinakoide, d. i. Paare paralleler Flächen, zu welchen die übrigen symmetrisch sind.

§. 88. **Die physikalischen Eigenschaften der rhombischen Krystalle.** Ueber die Elasticität solcher liegen directe Messungen nicht vor: das Eingangs §. 84 Bemerkte ist daher nur nach Analogie geschlossen aus den Cohäsionsverhältnissen der rhombischen Krystalle. Ueber letztere geben Aufschluss die Bestimmungen der Härte nach verschiedenen Richtungen: wenn der a. a. O. angegebene Zusammenhang mit der Symmetrie, wie er aus dem physikalisch krystallographischen Grundgesetze folgt, richtig ist, so muss die Härtecurve auf allen drei Pinakoiden symmetrisch sein zu je zwei auf einander senkrechten Geraden, und diese müssen je zwei Symmetrieaxen parallel sein. Dies ist in der That der Fall, wie die Bestimmungen am Schwerspath u. a. gezeigt haben (s. Exner, Härte an Krystallen, S. 60). Am einfachsten wird jener Zusammenhang jedoch bewiesen durch die Verhältnisse der Spaltbarkeit der rhombischen Krystalle, welche genau ihrer Symmetrie entsprechen. Der einfachste Fall hierbei ist offenbar der, dass in der Richtung einer Symmetrieaxe ein Minimum der Cohäsion vorhanden ist, also Spaltbarkeit nach demjenigen Pinakoid, welches dazu normal steht: in Wirklichkeit ist auch die Theilbarkeit nach einem der drei Pinakoide eine sehr häufig auftretende (s. unter den Beispielen: Quecksilberbromid, Antimon- und Arsensulfid, arsenige Säure, Glimmer, Topas, Citronensäure u. a.). Natürlich kann auch parallel einer zweiten Symmetrieaxe ein Minimum der Cohäsion stattfinden, dieses ist aber nicht gleichwerthig mit dem ersten, folglich existirt alsdann Spaltbarkeit nach zwei Pinakoiden, aber nicht von gleichem Grade der Vollkommenheit (Beisp. Bleioxyd, Schwerspath). Endlich können alle drei Symmetrieaxen dreien Minimis der Cohäsion entsprechen; in diesem Falle ist der Krystall spaltbar nach oP, $\infty\bar{P}\infty$ und $\infty\breve{P}\infty$, aber selbstverständlich nicht gleich vollkommen; ein derartiger Körper ist das wasserfreie Kalksulfat (nat. Anhydrit), welches wegen der Seltenheit seiner Krystalle nicht unter die Beispiele aufgenommen ist, dessen krystallinische Aggregate charakterisirt sind durch die fast gleich vollkommene Spaltbarkeit nach den drei Pinakoiden, wodurch es einem regulären, hexaëdrisch spaltbaren Körper ähnelt.

Sind die Minima der Cohäsion nicht den Symmetrieaxen parallel, in welchem Falle zu der betreffenden Richtung keine andere symmetrische existirt, so ist der nächst einfache der, dass sie wenigstens einer Symmetrieebene parallel gehen, mit den Axen aber schiefe Winkel einschliessen; jedes solche Minimum erfordert aber ein zweites in der dazu symmetrischen Richtung, welche in derselben Axenebene liegt; die beiden zu diesen Richtungen normalen Ebenen müssen demnach einen gleichen Grad der Spaltbarkeit besitzen, der Krystall spaltet nach einem Prisma, je nach der demselben gegebenen Stellung ein verticales, oder ein Makro-, oder ein Brachydoma (Beispiele: Quecksilberchlorid, ameisensaures Barium), doch ist eine derartige Spaltbarkeit ziemlich selten. Weit zahlreicher sind diejenigen Körper, bei denen das Hauptminimum der Cohäsion einer Symmetrieaxe parallel, ausserdem aber noch secundäre Minima vorhanden sind in einer Symmetrieebene, welche also spaltbar sind nach einem Pinakoid und weniger vollkommen nach einer prismatischen Form (Beispiele: Schwefel, überchlorsaures und übermangansaures Kalium, schwefelsaures Baryum, Strontium und Blei u. a.). Bei fast allen diesen Beispielen ist das Spaltungsprisma senkrecht zu dem Spaltungspinakoid, d. h. die Cohäsion nimmt, von ihrem Minimum in der Richtung einer Axe ausgehend, zu, nach verschiedenen Seiten verschieden, alsdann wieder ab, und erreicht zwei neue Minima in der senkrecht zu jener Axe stehenden Symmetrieebene.

Da die Mehrzahl der Substanzen den einfachsten Fall realisiren, in welchem nämlich die geringste Cohäsion einer Symmetrieaxe parallel ist, eine weit kleinere Zahl denjenigen, in welchem neben jenem Minimum noch solche einer Axenebene parallele merklich hervortreten, endlich kaum einige existiren, wo nur die letztere Art von Minimis vorhanden ist, so hat der letzte mögliche Fall, dass die Cohäsionsminima auch nicht den Axenebenen parallel sind, äusserst geringe Wahrscheinlichkeit. Ein solches mit keiner Symmetrieebene zusammenfallendes Minimum würde noch ein gleiches nach den drei anderen dazu symmetrischen Richtungen (den Normalen zu den übrigen Pyramidenflächen) erfordern. In der That ist eine einigermassen vollkommene Theilbarkeit nach einer rhombischen Pyramide noch bei keinem Körper beobachtet worden.

Wie aus den Herleitungen des §. 84 hervorgeht, ist die optische Axenebene entweder die Basis, oder das Makropinakoid, oder endlich das Brachypinakoid, die erste Mittellinie eine der drei Axen. Daraus folgt, dass man zur Aufsuchung der Ebene der optischen Axen nur nöthig hat, Platten nach den drei Pinakoiden (wie eine solche sehr häufig schon durch die natürliche Ausbildung der Krystalle gegeben ist, ebenso oft durch Spaltbarkeit erhalten werden kann) im convergenten Licht zu untersuchen; eine derselben muss*) beide optischen Axen symmetrisch, im Gesichtsfeld des

*) Die einzige Ausnahme bildet der Fall, dass der Axenwinkel fast 90° und der mittlere Brechungsexponent so gross, dass die jenen parallelen Strahlen aus einer solchen

Polarisationsinstrumentes, zeigen, und zwar so, dass ihre Verbindungslinie einer Symmetrieaxe parallel geht. Nur wenn die Brechbarkeit der Substanz eine geringe und der spitze und stumpfe Axenwinkel wenig verschieden sind, kann man sowohl durch die Platte, welche normal zur ersten, als durch die, welche normal zur zweiten Mittellinie ist, beide Axen erblicken, vorausgesetzt, dass das Gesichtsfeld des Instrumentes sehr gross ist. Diejenige von beiden Platten, bei welcher der scheinbare Axenwinkel der kleinere ist, oder, was das Gewöhnlichere ist, diejenige, durch welche allein die Axen sichtbar sind, steht senkrecht zur ersten Mittellinie. Bestimmt man nun mit dieser, nach der in §. 21 angegebenen Methode, durch Einfügung eines Viertelundulationsglimmerblattes das Zeichen der Doppelbrechung, so kann man nunmehr angeben, welche der drei Symmetrieaxen des Krystalls die Axe der grössten, welche die der kleinsten, welche die der mittleren optischen Elasticität ist. Sind so grosse und durchsichtige Krystalle zur Verfügung, dass man sich bei der optischen Untersuchung nicht mit der Bestimmung des Axenwinkels (wozu jene Pinakoidplatte dient) begnügt, sondern auch die Brechungsexponenten bestimmen will, so können hierzu sehr oft natürliche Prismen dienen. Ist z. B. ein verticales Prisma, dessen scharfe Kanten einen Winkel von 40—60° haben, vorherrschend an den Krystallen, so können zwei seiner in einer solchen Kante zusammenstossenden Flächen unmittelbar als Prisma zur Bestimmung zweier Brechungsexponenten dienen (s. S. 86), denn ein solches erfüllt die a. a. O. gestellten Bedingungen vollständig. Ist nun noch ein Makro- oder Brachydoma vorhanden, welches in ähnlicher Weise benutzt werden kann, so ist man im Stande, ohne Herstellung künstlicher Prismen, alle drei Hauptbrechungsexponenten, d. h. die Gesammtheit der optischen Constanten des Krystalls, festzustellen. Statt der beiden Flächen eines Prismas kann, wie S. 87 gezeigt worden ist, auch eine derselben und eine Pinakoidfläche zur Bestimmung zweier Brechungsexponenten dienen; diese Methode ist vortheilhaft; wenn z. B. eine Fläche eines verticalen Prismas sehr gross ausgedehnt ist, an der Rückseite des Krystalls dagegen das Makropinakoid vorherrscht, und wenn je zwei Prismenflächen einen zu stumpfen Winkel einschliessen, um die Strahlen im Minimum der Ablenkung hindurchzulassen.

Wenn an einem Krystall nur ein Pinakoid entwickelt ist, diesem aber die Axenebene parallel, so dass man durch dasselbe keine Axen erblickt, oder wenn gar keines auftritt, dagegen ein Prisma vorhanden ist, dessen Flächen normal zur optischen Axenebene stehen, so wird, wenn die Richtung einer optischen Axe nicht einen allzugrossen Winkel mit der Normalen zu einer Prismenfläche*) einschliesst, durch jedes der beiden prismatischen

Platte nicht mehr in Luft austreten können; alsdann muss die Aufsuchung der Axen in Oel vorgenommen werden.

*) Die beiden Normalen der Prismenflächen und die beiden optischen Axen liegen alsdann in einer Ebene.

Flächenpaare eine optische Axe sichtbar sein, aber im Gesichtsfeld des Polarisationsinstrumentes verschoben, von der Mitte aus in einer Richtung, normal zur Prismenkante. In diesem Falle kann man somit auch feststellen, welcher der drei Hauptschnitte die optischen Axen enthält, und durch Messung des Winkels der sichtbaren Axe zur Normale der Prismenfläche den Winkel derselben herleiten.

Durch ein Paar paralleler Pyramidenflächen blickend, wird man nur ausnahmsweise eine optische Axe, natürlich nie in der Mitte des Gesichtsfeldes, beobachten, da meist der Winkel jener gegen die Axenebene so gross ist, dass die einer Axe parallelen Strahlen sie in bedeutender Schiefe treffen, also dieselbe unter fast rechtwinkeligem Brechungswinkel verlassen, oder gar nicht austreten können.

In allen derartigen Fällen, wo durch directe Beobachtung mittelst natürlicher Krystallflächen die Lage der optischen Axenebene nicht erkannt werden kann, hat man die Pinakoide künstlich durch Schleifen (oder durch Spaltbarkeit, wenn eine solche vorhanden ist) herzustellen, und alsdann ebenso, wie oben angegeben, zu verfahren.

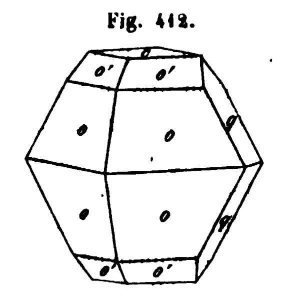
Besonders wichtig für die krystallographische Praxis ist das Verhalten der rhombischen Krystalle im parallelen polarisirten Licht. Wenn eine doppeltbrechende Krystallplatte zwischen gekreuzten Nicols um 360° in ihrer Ebene gedreht wird, so erscheint sie bekanntlich (s. S. 90) in vier Stellungen dunkel, dazwischen hell (oder farbig, wenn sie sehr dünn ist); in jenen sind ihre Schwingungsrichtungen, d. h. die der beiden Strahlen, welche aus einem normal in sie eindringenden Lichtstrahl entstehen, denen der beiden Nicols parallel. So vermag man annähernd (genauer nach einer in der III. Abth. beschriebenen Methode) die Lage der Schwingungsrichtungen für eine bestimmte Krystallfläche gegen die sie begrenzenden Kanten zu bestimmen. Um einen Krystall als einen zum rhombischen System gehörigen zu erkennen, ist es oft nöthig, zu untersuchen, ob die Schwingungsrichtungen des Lichtes beim Durchgang durch diejenigen Flächen, nach welchen er vorherrschend ausgedehnt ist, so gelegen sind, wie es die rhombische Symmetrie erfordert. Es ist daher diese Lage für die drei verschiedenen Arten von Flächen des rhombischen Systems hier festzustellen. Sie ergiebt sich aus der Gestalt, welche der Querschnitt der optischen Elasticitätsfläche (S. 128) parallel der betreffenden Krystallfläche besitzt, und welche im Allgemeinen die einer Ellipse ist. Nur zwei Ebenen giebt es, deren Durchschnitt mit jenem dreiaxigen Ellipsoid die Form von Kreisen haben, dies sind diejenigen beiden prismatischen Ebenen, deren Normalen die optischen Axen sind. Da die natürlichen Prismenflächen gegen diese stets mehr oder weniger geneigt sind, so kommen sie praktisch kaum in Betracht; sollte aber einmal zufällig ein Prisma auftreten, dessen Flächen genau senkrecht zu den beiden optischen Axen wären, so müsste ein derartiger Krystall, durch eines dieser Flächenpaare betrachtet, in allen Stellungen dunkel bleiben, da die vertical hindurchgehenden Lichtstrahlen keine Dop-

sind auch bei veränderter Temperatur alle vier Basiskanten an Winkelgrösse einander gleich, ebenso die vier schärferen und die vier stumpferen Polkanten, d. h. die Pyramide bleibt stets symmetrisch zu den drei Pinakoiden. Da somit die drei Symmetrieebenen der rhombischen Krystalle bei allen Temperaturen rechte Winkel mit einander bilden, und die prismatischen Formen, wie die Pyramiden, stets symmetrisch zu jenen bleiben, so ist damit der in §. 84 bereits ausgesprochene Satz bewiesen, dass die Symmetrie eines rhombischen Krystalls unabhängig von der Temperatur sei.

Von dieser Symmetrie hängt aber nach dem Grundgesetz der physikalischen Krystallographie diejenige der physikalischen Eigenschaften ab, also können die optischen Eigenschaften z. B. durch keine Temperaturänderung so sich verändern, dass sie nicht mehr der allgemeinen Symmetrie rhombischer Krystalle entsprächen. Wenn also auch der Winkel der optischen Axen sich beim Erwärmen ändert, so muss diese Bewegung doch bei beiden die gleiche sein, da die Mittellinie stets dieselbe Richtung, parallel einer krystallographischen Axe, beibehält. Nimmt der Axenwinkel bei steigender Temperatur ab, so wird er bei einer bestimmten für eine Farbe Null sein, und bei noch höherer werden die beiden Axen sich wieder von einander entfernen, nunmehr aber in der senkrecht dazu stehenden Ebene gelegen sein. Dass die neue optische Axenebene ebenfalls eine Symmetrieebene des Krystalls sein muss, geht daraus hervor, dass die Hauptschwingungsrichtungen dieselben geblieben sind, wenn auch durch die ungleiche Aenderung der Dichte nach den drei Axen die der mittleren Lichtgeschwindigkeit entsprechende nunmehr die der kleinsten geworden ist, u. s. f. Wie die optischen, so bewahren auch alle übrigen physikalischen Eigenschaften der rhombischen Krystalle ihre Symmetrie bei allen Temperaturen.

§. 89. **Beispiele:** Schwefel $= S$. $a : b : c = 0,8130 : 1 : 1,9037$. Entweder nur die spitze Pyramide P Fig. 405, oder die Combination Fig. 412: $o = P$, $o' = \frac{1}{3}P$, $c = oP$, $q = \breve{P}\infty$; von diesen Formen liegt o' in der Zone oc, kann sich also nur durch die Verticalaxe von o unterscheiden; q ist gerade Abstumpfung der längeren Polkanten von P, also primäres Brachydoma. — Spaltbarkeit oP und ∞P unvollkommen. Optische Axenebene ist $\infty\breve{P}\infty$, Axe c ist erste Mittellinie, Doppelbrechung positiv; die Brechungsexponenten für Natriumlicht:

Fig. 412.



$$\alpha = 1,958, \quad \beta = 2,038, \quad \gamma = 2,240,$$

der wahre Axenwinkel

$$2V = 69^0\ 40';$$

für Roth ist $\beta = 2,029$, für Blau 2,082 (Cornu, Annales de chimie et phys. (4). XI, 28. 3 f.; Des Cloizeaux, Nouv. Rech. 93.).

Jod $= J$. $a : b : c = 0,6644 : 1 : 1,3653$. Combination Fig. 413.

$o = P$, $o' = \bar{P}3$ (die kürzeren Polkanten von o zuschärfend, also dasselbe $a : c$), $c = oP$, $o'' = \frac{1}{2}\bar{P}3$ (in der Zone $o'c$, also mit demselben $a : b$, wie ersteres), $p = \infty P$ (gerade Abstumpfung der Basiskanten von P), $b = \infty\breve{P}\infty$.

Bleichlorid $= PbCl^2$. $a : b : c = 0{,}5943 : 1 : 1{,}1898$. Combination Fig. 414, tafelartig nach $c = oP$, $o = P$, $o' = \frac{1}{2}P$ (Zone oc), $q = \frac{1}{2}\breve{P}\infty$ (Zone $o'o'$), $q' = 2\breve{P}\infty$ (Zone qq), $b = \infty\breve{P}\infty$. Oft auch nur c, o' und b.

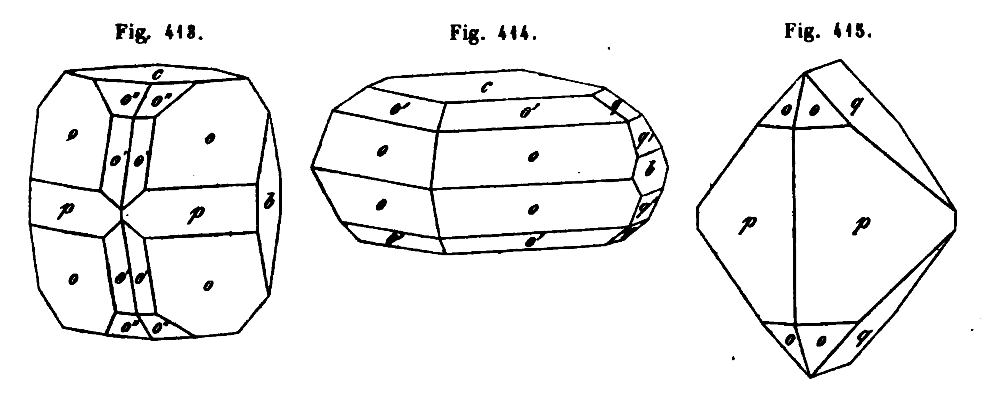


Fig. 413. Fig. 414. Fig. 415.

Quecksilberchlorid $= HgCl^2$. $a : b : c = 0{,}7254 : 1 : 1{,}0688$. Kurz prismatische Combination Fig. 415: $p = \infty P$, $o = P$, $q = \breve{P}\infty$. Spaltbarkeit q vollkommen. Optische Axenebene $\infty\bar{P}\infty$, c erste Mittellinie. Doppelbrechung negativ.

Quecksilberjodid $= HgJ^2$. $a : b : c = 0{,}6494 : 1 : ?$ Die Krystalle nur gebildet von ∞P und oP, daher die Verticalaxe unbekannt.

Quecksilberbromid $= HgBr^2$. $a : b : c = 0{,}6796 : 1 : ?$ Combination wie bei dem vorigen. Spaltbarkeit oP. Optische Axenebene oP.

Jodbromquecksilber $= HgJBr$. $a : b : c = 0{,}6443 : 1 : 0{,}9194$. Kurze Prismen Fig. 416: $p = \infty P$, $c = oP$; in der Zone beider $o = P$, $o' = 2P$, $o'' = 4P$. Spaltbar oP. Optische Axenebene oP, b ist erste Mittellinie.

Fig. 416.

Arsensulfid (nat. Auripigment) $= As^2S^3$. $a : b : c = 0{,}9044 : 1 : 1{,}0113$. Natürl. selten deutliche Krystalle: ∞P, $\infty\breve{P}2$, $\bar{P}\infty$, $\infty\breve{P}\infty$. Spaltbarkeit $\infty\breve{P}\infty$ vollkommen.

Antimonsulfid (natürl. Antimonglanz) $= Sb^2S^3$. $a : b : c = 0{,}9844 : 1 : 1{,}0110$. Dünne Prismen ∞P (fast rechtwinkelig), am Ende P (dem regulären Octaëder sehr ähnlich). Spaltbarkeit $\infty\breve{P}\infty$ vollkommen.

β Eisenbisulfid (nat. Markasit) $= FeS^2$. $a:b:c = 0,7549:1:1,1815$. Combination Fig. 417: $p = \infty P$, $q' = \frac{1}{3}\breve{P}\infty$, $q = \breve{P}\infty$ (Zone $qq'q'q$).

Kupfersulfür (nat. Kupferglanz) $= Cu^2S$. $a:b:c = 0,5822:1:0,9709$. Combination Fig. 418: $c = oP$, $o = P$, $o' = \frac{1}{3}P$, $q = 2\breve{P}\infty$, $q' = \frac{2}{3}\breve{P}\infty$,

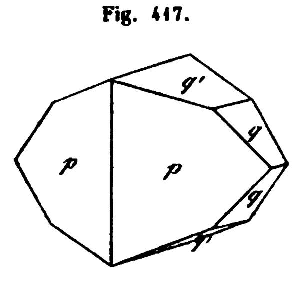


Fig. 417.

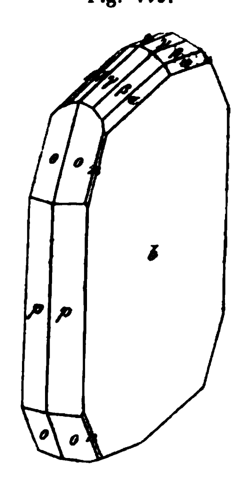


Fig. 419.

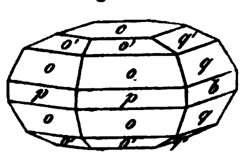


Fig. 418.

$p = \infty P$, $b = \infty\breve{P}\infty$. Diese Combination ähnelt sehr einer hexagonalen, da das Prisma p wenig von 120° verschieden ist, also p und b sich fast unter gleichen Winkeln schneiden; wie diese einem hexagonalen Prisma, so gleichen o und q einer hexagonalen Pyramide*), und o' und q' einer solchen von kleinerer Hauptaxe.

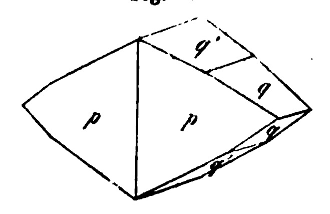


Fig. 420.

Bleioxyd $= PbO$. $a:b:c = 0,8845:1:?$ Dünne Tafeln nach oP ausgedehnt, nur von schmalen Flächen von ∞P begrenzt. Spaltbarkeit oP und $\infty\bar{P}\infty$. Optische Axenebene oP.

Arsenige Säure $= As^2O^3$. $a:b:c = 0,3758:1:0,3500$. Combination Fig. 419: tafelförmig nach $b = \infty\breve{P}\infty$, an den Seiten $p = \infty P$, ferner $o = P$, schmal $n = 7\breve{P}7$ (Zone $o\,n\,b$), und am Ende drei abgeleitete Pyramiden, deren Verhältniss $a:c$ 12 mal das der primären, nämlich $\alpha = 4\breve{P}48$, $\beta = 2\breve{P}24$, $\gamma = \breve{P}12$ (Zone $b\alpha\beta\gamma\gamma\beta\alpha b$). Spaltbarkeit $\infty\breve{P}\infty$ vollkommen. Optische Axenebene dieselbe Fläche.

*) Wenn der Winkel eines rhombischen Prismas genau = 120°, so ist die Neigung einer Pyramide gegen die Basis genau dieselbe, wie die eines Brachydomas von doppelt so grosser Verticalaxe, so dass die Combination beider geometrisch absolut zusammenfällt mit einer hexagonalen Pyramide.

Antimonige Säure (Antimonoxyd, nat. Weissspiessglanzerz) = Sb^2O^3. $a:b:c = 0,3822:1:0,3443$. Combination Fig. 420: $p = \infty P$, $q = 2\breve{P}\infty$, $q' = \frac{2}{3}\breve{P}\infty$; oder tafelförmig nach $\infty\breve{P}\infty$, ganz ähnlich Fig. 419, doch kommen Pyramiden mit noch längerer Brachydiagonale, z. B. $\frac{1}{3}\breve{P}20$, vor. Spaltbarkeit $\infty\breve{P}\infty$ vollkommen. Optische Axenebene für Roth oP, für den brechbareren Theil des Spectrums $\infty\breve{P}\infty$; Axenwinkel sehr klein.

Titansäureanhydrit (nat. Brookit) = TiO^2. $a:b:c = 0,9444:1:0,8416$. Combination Fig. 421: $a = \infty\bar{P}\infty$, $p = \infty P$, $b = \infty\breve{P}\infty$, $o = P$, $e = \breve{P}2$ (Zone $b\,e\,e\,o$; da e häufiger und meist grösser als o, so wird es von manchen Autoren zur primären Pyramide genommen; alsdann wird a, nach welchem die Krystalle meist tafelartig, Brachypinakoid), $x = \frac{1}{2}\bar{P}\infty$ (Zone $e\,e$), $y = \frac{1}{4}\bar{P}\infty$, $z = \frac{1}{2}P$ (bestimmt durch die beiden Zonen $p\,o\,z$ und $e\,z\,x\,z\,e$), $t = 2\breve{P}\infty$. Spaltbarkeit $\infty\breve{P}\infty$. Optische Axenebene für Roth oP, $2e = 65°$; für Grün $\infty\breve{P}\infty$, $2E = 10°$; erste Mittellinie ist für alle Farben die Axe a; man erblickt daher im convergenten weissen Licht die in Fig. 5 Taf. I abgebildete Interferenzerscheinung (vergl. S. 97). Doppelbrechung +.

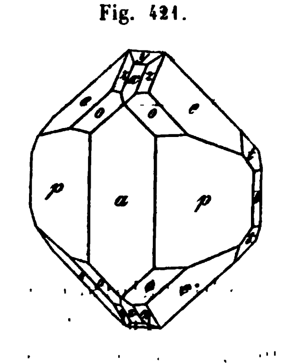


Fig. 421.

Salpetersaures Kalium (Kalisalpeter) = KNO^3. $a:b:c = 0,5843:1:0,7028$. Combination Fig. 422: $b = \infty\breve{P}\infty$, $p = \infty P$, $q = \breve{P}\infty$, $o = P$ (oft ohne die letzte Form). Spaltbarkeit nach p und b unvollkommen. Optische Axenebene $\infty\bar{P}\infty$, c ist erste Mittellinie. Doppelbrechung —; die Hauptbrechungsindices für die Fraunhofer'schen Linien:

Fig. 422.

	α	β	γ
für B:	1,3328	1,4988	1,4994
„ D:	1,3346	1,5056	1,5064
„ E:	1,3365	1,5124	1,5135
„ H:	1,3436	1,5385	1,5404.

Daraus berechnen sich die wahren Axenwinkel:

für B:	$2V = 6°\,11'$
„ D:	7 12
„ E:	8 5
„ H:	10 22.

(Schrauf, Sitz. Ber. d. Wiener Akad. 41. Bd. 788.) Den scheinbaren Winkel in Luft fand Des Cloizeaux (Nouv. Recherches, 42):

für Roth $2E = 7^\circ 55'$ bei 17° C.
$6^\circ 42$ „ $71,5$ „
$6^\circ 6$ „ 121 „

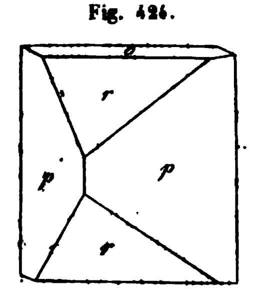
so dass also derselbe durch die Temperatur eine nicht unbeträchtliche Aenderung erleidet.

Salpetersaures Silber $= AgNO^3$. $a : b : c = 0,5302 : 1 : 0,7263$. Combination Fig. 423: $c = oP$, $o = \breve{P}2$, $m = \infty\breve{P}4$ (die Pyramide o ist nicht zur primären gewählt worden, um die Aehnlichkeit des Axenverhältnisses mit dem des Salpeters zu zeigen). Optische Axenebene $\infty\bar{P}\infty$; c erste Mittellinie. Scheinbare Winkel der Axen:

$2E = 126^\circ 37'$ roth
$133 \quad 50$ blau.

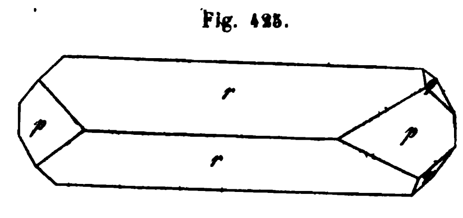
Fig. 423.

Fig. 424.



Ueberchlorsaures Kalium $= KClO^4$. $a : b : c = 0,7819 : 1 : 0,6396$. Combination Fig. 424: $c = oP$, $p = \infty P$, $r = \bar{P}\infty$. Spaltbarkeit nach c und p vollkommen. Optische Axenebene oP, b erste Mittellinie, Doppelbrechung $+$.

Fig. 425.



Uebermangansaures Kalium $= KMnO^4$. $a:b:c = 0,7974:1:0,6492$. Combination Fig. 425, prismatisch durch Vorherrschen von $r = \bar{P}\infty$, ferner $p = \infty P$, $q' = 2\breve{P}\infty$. Spaltbarkeit oP und ∞P vollkommen.

β-Kohlensaurer Kalk (Aragonit) $= CaCO^3$. $a:b:c = 0,6228 : 1 : 0,7207$. Combination $=$ Fig. 422: $p = \infty P$, $b = \infty\breve{P}\infty$, $q = \breve{P}\infty$. Spaltbarkeit $\infty\breve{P}\infty$ unvollkommen. Optische Axenebene $\infty\bar{P}\infty$, c erste Mittellinie. Doppelbrechung $-$; Brechungsexponenten:

	α	β	γ
für die Linie C:	1,5282	1,6778	1,6820
D:	1,5301	1,6816	1,6859
E:	1,5326	1,6863	1,6908.

Daraus folgen die Axenwinkel:

	$2V =$	$2E =$
für C:	$17^\circ 48'$	$30^\circ 5'$
D:	17 50	30 14
E:	18 3	30 41

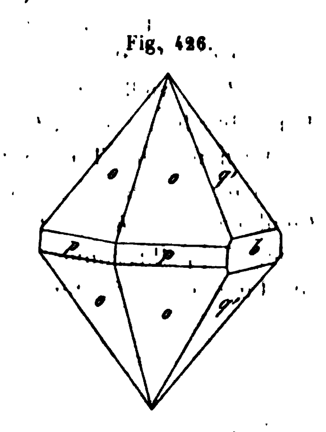
(Rudberg, Poggendorff's Ann. 17. B.). Durch directe Messung fand Kirchhof (Poggendorff's Ann. 108, 567):

für C:	$2V = 18^0\ 7'$	$2E = 30^0\ 40'$
D:	$18\ 11$	$30\ 52$
E:	$18\ 17$	$31\ \ 7.$

Der scheinbare Axenwinkel ändert sich nur wenig mit der Temperatur (bei einer Erhöhung der letzteren um 160^0 verringert er sich um circa $10'$).

Kohlensaurer Baryt (nat. Witherit) $= BaCO^3$. $a : b : c = 0,5949 : 1 : 0,7413$. Combination Fig. 426: $o = P$, $q' = 2\breve{P}\infty$, $p = \infty P$, $b = \infty\breve{P}\infty$: die ersteren sehr nahe ein hexagonale Pyramide, die beiden letzteren eine dergl. Prisma bildend. Spaltbarkeit ∞P unvollkommen. Optische Axenebene $\infty\breve{P}\infty$, c erste Mittellinie. Doppelbrechung —. Axenwinkel $2E = 26^0\ 30'$ für Roth und Blau, d. h. die Dispersion der optischen Axen ist so gering, dass sie durch die Messung nicht zu bestimmen; die Farbensäume der Hyperbeln deuten an, dass $\varrho > v$. $\alpha = 1,740$ (Des Cloizeaux, Nouv. Rech. 106).

Fig. 426.



Kohlensaures Blei (natürl. Cerussit) $= PbCO^3$. $a : b : c = 0,6402 : 1 : 0,7232$. Combination = Fig. 426, doch $b = \infty\breve{P}\infty$ gewöhnlich grösser ausgebildet, die Krystalle darnach oft tafelartig. Spaltbarkeit ∞P unvollkommen. Optische Axenebene $\infty\breve{P}\infty$, c erste Mittellinie. Doppelbrechung —. Brechungsexponenten und daraus berechnete Axenwinkel:

Linie	α	β	γ	$2V$	$2E$
B:	1,7945	2,0595	2,0643	$8^0 22'$	$17^0 17'$
- D	1,8037	2,0763	2,0780	8 14	17 8
- E	1,8164	2,0919	2,0934	7 35	17 55

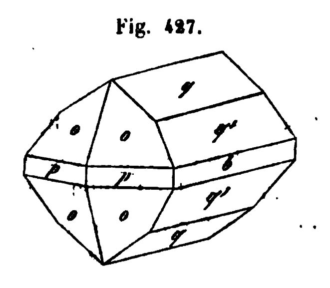
(Schrauf, Sitz.-Ber. d. Wiener Akademie, 42, 120). Durch die Wärme nicht unbeträchtliche Aenderung:

$$2E = 18^0\ 22' \text{ bei } 12^0 \text{ C.}$$
$$= 22^0\ 2' \text{ - } 95,5^0 \text{ C.}$$

(Des Cloizeaux, Nouv. Rech. 48).

Schwefelsaures Kalium $= K^2SO^4$. $a : b : c = 0,5727 : 1 : 0,7464$. Combination entweder genau = 426, oder nach der Brachydiagonale prismatisch Fig. 427: $o = P$, $p = \infty P$, $b = \infty\breve{P}\infty$, $q = \breve{P}\infty$, $q' = 2\breve{P}\infty$. Spaltbarkeit $\infty\breve{P}\infty$ und oP unvollkommen. Optische Axenebene $\infty\bar{P}\infty$, a Mittellinie. Doppelbrechung +; $\varrho < v$. Brechungsexponenten:

Fig. 427.



	α	β	γ
C	1,4911	1,4928	1,4959
D	1,4932	1,4946	1,4980
E	1,4976	1,4992	1,5029

(Topsöe, Ann. d. chim. et phys. [5] I, 1874). Direct beobachtet:

$2E = 110^0\ 15'$ roth
— 24 grün
— 26 blau.

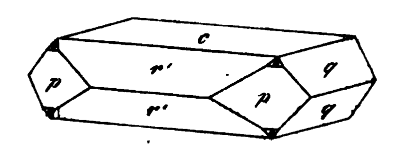
Durch Temperaturerhöhung um 140^0 C. wird $2E$ etwa 10^0 grösser (Des Cloizeaux, Nouv. Rech.).

Schwefelsaures Ammonium $= (NH^4)^2 SO^4$. $a : b : c = 0{,}5643 : 1 : 0{,}7310$. Combination = vorige Fig. 427. Spaltbarkeit $a = \infty \bar{P} \infty$ vollkommen. Optische Axenebene $\infty \breve{P} \infty$, a erste Mittellinie. Doppelbrechung +; $2E = 87^0\ 44'$ roth, $88^0\ 47'$ blau. Der Winkel steigt merklich mit der Temperatur (Des Cloizeaux, Nouv. Rech.).

Chromsaures Kalium $= K^2CrO^4$. $a : b : c = 0{,}5695 : 1 : 0{,}7297$. Combination = K^2SO^4 Fig. 427. Optische Axenebene $\infty \bar{P} \infty$, b erste Mittellinie. Doppelbrechung —. Der mittlere Brechungsexponent $\beta = 1{,}713$ für die Linie C, 1,725 für D, 1,770 für F.

$2E = 100^0\ 32'$ roth
= 95 40 grün
= 93 10 blau.

Fig. 428.



Schwefelsaures Baryum (nat. Schwerspath) $= BaSO^4$. $a : b : c = 0{,}7622 : 1 : 1{,}2416$. Combination Fig. 428: $c = oP$, $p = \infty P$, $r' = \frac{1}{2}\bar{P}\infty$, $q = \breve{P}\infty$, $o = P$. Spaltbarkeit oP vollkommen, ∞P ziemlich vollkommen, $\infty \breve{P} \infty$ deutlich. Optische Axenebene $\infty \breve{P} \infty$, a erste Mittellinie. Doppelbrechung +. Brechungsexponenten:

	α	β	γ	$2E$
C	1,6336	1,6348	1,6452	$62^0\ 34'$
D	1,6363	1,6375	1,6480	63 12
E	1,6397	1,6409	1,6517	64 10

(Heusser, Poggendorff's Ann. 87, 454). Starke Aenderung des Axenwinkels mit der Temperatur:

$2E = 63^0\ 5'$ roth, bei 12^0 C.
70 10 - - 121 -
74 42 - - 196 -

(Des Cloizeaux, Nouv. Rech.).

Schwefelsaures Strontium (nat. Cölestin) $= SrSO^4$. $a : b : c = 0{,}7789 : 1 : 1{,}2800$. Combination und Spaltbarkeit = vorigem. Axenebene $\infty \breve{P} \infty$, a erste Mittellinie. Doppelbrechung +.

$2E = 88^0\ 30'$ $\beta = 1{,}623$ roth
= 89 36 = 1,625 gelb
= 92 49 = 1,635 blau.

Mit der Temperatur erleidet der Axenwinkel eine ähnliche Aenderung, wie bei der vorigen Verbindung.

Schwefelsaures Blei (natürl. Bleivitriol) = $PbSO^4$. $a:b:c = 0{,}7756 : 1 : 1{,}2178$. Combination wie $BaSO^4$. Spaltbarkeit ebenso, aber weniger vollkommen. Optische Axenebene $\infty \breve{P} \infty$, a erste Mittellinie.

	α	β	γ	$2V$
Roth:	1,8740	1,8795	1,8924	66° 40′
Gelb:	1,8770	1,8830	1,8970	66 50

(Des Cloizeaux, Nouv. Rech. 205).

Nitroprussidnatrium = $Na^{12}Fe^{8}N^{5}O^{5}Cy^{30} + 6H^2O$. $a:b:c = 0{,}7650 : 1 : 0{,}4115$. Combination Fig. 429: $p = \infty P$, $r = \bar{P}\infty$, $q = \breve{P}\infty$ (je ein Paar paralleler Flächen jede der drei Formen liegt mit einem solchen der beiden anderen in einer Zone, und dies gilt für jede Combination der drei zugehörigen prismatischen Formen). Optische Axenebene $\infty \bar{P} \infty$, c erste Mittellinie. Doppelbrechung +. $2E = 61°$ roth.

Fig. 429.

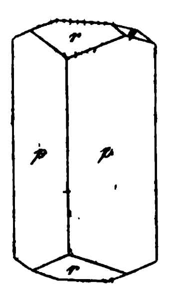
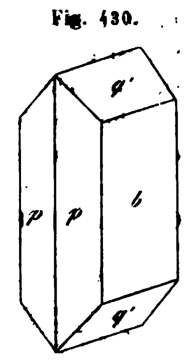


Fig. 430.



Normales Magnesiasilicat (nat. Olivin) = $(Mg, Fe)^2 SiO^4$. $a:b:c = 0{,}4358 : 1 : 0{,}5722$. Combination $p = \infty P$, $b = \infty \breve{P} \infty$, $q' = 2\breve{P}\infty$. Spaltbarkeit $\infty \breve{P} \infty$ deutlich. Optische Axenebene oP, a erste Mittellinie. Doppelbrechung +. Dispersion der Axen gering, $\varrho < v$.

Gelb: $\alpha = 1{,}661$, $\beta = 1{,}678$, $\gamma = 1{,}697$, $2V = 87° 46'$ (Des Cloizeaux).

Normales Eisensilicat (Frischschlacke) = Fe^2SiO^4. $a:b:c = 0{,}4623 : 1 : 0{,}5813$. Combination = vorigem.

Natürl. Glimmer (Kaliglimmer) = $(K, H)^2 Al^2 Si^2 O^8$. $a:b:c = 0{,}577 : 1 : 3{,}297$. Gewöhnlich nur sechsseitige Tafeln, deren meist unvollkommene Randflächen ∞P und $\infty \breve{P} \infty$ oder sehr steile Pyramiden und Brachydomen bilden, deren Hauptfläche oP, die Ebene der vollkommensten Spaltbarkeit, welche überhaupt eine Substanz zeigt; da man parallel der Basis Blättchen von Glimmer ablösen kann, in welchen die beiden entstehenden Strahlen nicht mehr als $\frac{1}{8}\lambda$ Phasendifferenz erhalten, so finden solche Glimmertafeln eine ausgedehnte Anwendung in der Optik (s. z. B. Abth. I, S. 109). Die Körnerprobe (vergl. S. 7), zu welcher hier eine Nähnadel verwendet werden kann, giebt bei einem Spaltungsblättchen von Glimmer einen sechsstrahligen Stern, von verticalen Sprüngen gebildet, entsprechend ∞P und $\infty \breve{P} \infty$. Durch Druck mit einer stumpfen Spitze erhält man Aufblätterungen ebenfalls nach einem sechsstrahligen Stern, dessen Radien aber mit denen des obigen 30° bilden; diese entsprechen Gleitflächen (Flächen leichtester Knickung) und sind parallel $\breve{P}3$ und $2\bar{P}\infty$, deren Durchschnitt mit der Basis ein Sechseck mit gleichen Winkeln ist;

parallel den Seiten dieses Sechseckes zeigen die Glimmertafeln einen faserigen Bruch, welcher auf eine weniger vollkommene Spaltbarkeit nach jener Pyramide und jenem Doma hindeutet. (Vergl. Reusch, Poggendorff's Ann. 136. Bd. 130, und Bauer, Zeitschr. der deutsch. geolog. Gesellsch. XXVI. 137). Die optische Axenebene der verschiedenen Glimmerarten (über deren chemische Verschiedenheiten s. des Verf. »tabellar. Zusammenst. d. Mineralien« ist theils parallel $\infty \breve{P} \infty$, theils $\infty \bar{P} \infty$; bei allen ist die Axe c, die Normale zur vollkommenen Spaltungsfläche, erste Mittellinie. Doppelbrechung —. ziemlich stark, $\beta = 1,61$ ungefähr (genaue Bestimmungen der Brechungsexponenten unmöglich, da die ausserordentliche Spaltbarkeit der Substanz nicht gestattet, Prismen derselben zu schleifen). Der optische Axenwinkel $2E$ ist bei verschiedenen Glimmern sehr variirend, bei einigen so klein, dass sie nur sehr schwer von einaxigen Krystallen unterschieden werden können (s. die Dove'sche Probe, S. 126), bei anderen nahe 80°; und zwischen diesen Werthen kommen alle möglichen vor.

Nat. Topas $= 5 Al^2 Si O^5 + Al^2 Si Fl^{10}$. $a : b : c = 0,5285 : 1 : 0,9539$. Combination Fig. 431: $p = \infty P$, $p' = \infty \breve{P} 2$, $o = P$, $o' = \frac{1}{2} P$ $o'' = \frac{1}{3} P$, $c = oP$, $q = \breve{P}\infty$, $x = \frac{2}{3}\breve{P}2$ (in den Zonen qo' und $p'c$). Spaltbarkeit oP vollkommen. Axenebene $\infty \breve{P} \infty$, c erste Mittellinie (daher durch eine Spaltungsplatte, wie beim Glimmer, beide Axen sichtbar; Doppelbrechung +. Brechungsexponenten:

Fig. 431.

	α	β	γ	$2V$	$2E$
C	1,6094	1,6114	1,6188	56° 19'	99° 0'
D	1,6116	1,6138	1,6211	56 39	100 10
E	1,6145	1,6167	1,6241	58 58	100 54

In verschiedenen Varietäten ist der scheinbare Axenwinkel grösser (bis 125°). Mit der Temperatur ändert er sich merklich (z. B. $2E = 119°$ bei 20° C., $= 123°$ bei 250° C.).

Chlorkohlenstoff $= C^2 Cl^6$. $a : b : c = 0,5543 : 1 : 1,7556$. Combination tafelförmig nach oP, ferner $p = \infty P$, $q = \breve{P}\infty$, $a = \infty \bar{P} \infty$, $b = \infty \breve{P} \infty$.

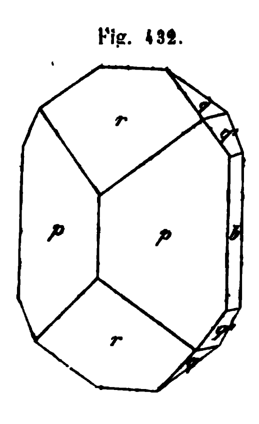
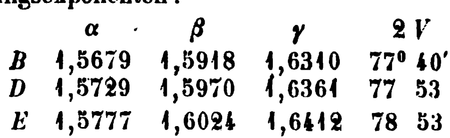


Fig. 432.

Ameisensaures Baryum $= Ba C^2 H^2 O^4$. $a : b : c = 0,7650 : 1 : 0,8638$. Combination Fig. 432: $p = \infty P$, $r = \bar{P}\infty$, $q = \breve{P}\infty$, $q' = 2\breve{P}\infty$. Spaltbarkeit $\breve{P}\infty$ deutlich. Optische Axenebene $\infty \breve{P} \infty$, a erste Mittellinie. Doppelbrechung +. Brechungsexponenten:



	α	β	γ	$2V$
B	1,5679	1,5918	1,6310	77° 40'
D	1,5729	1,5970	1,6361	77 53
E	1,5777	1,6024	1,6412	78 53

(Schrauf, Sitz.-Ber. d. Wien. Ak. 42,125). Des Cloizeaux (Nouv. Rech. 59) berechnete den scheinbaren Winkel in Luft aus demjenigen in Oel und dem Brechungsexponenten des letzteren (vergl. S. 105) und fand:

$$2E = 161^{0}\ 18'\ \text{roth}$$
$$164\ —\ \text{gelb}$$
$$176\ 34\ \text{blau}.$$

Ameisensaures Calcium $= CaC^2H^2O^4$. $a:b:c = 0,7599:1:0,9342$. Combination Fig. 433: $a = \infty \bar{P} \infty$, $o = P$, $o' = \frac{1}{2}P$, $p' = \infty \breve{P} 2$, $b = \infty \breve{P} \infty$. Optische Axenebene $\infty \breve{P} \infty$, a Mittellinie. Doppelbrechung +.

Fig. 433.

	α	β	γ	$2V$	$2E$
B	1,5067	1,5100	1,5731	26° 29'	40° 28'
D	1,5101	1,5135	1,5775	— 49	41 5
E	1,5132	1,5167	1,5819	— 59	41 27

(Schrauf, Sitz.-Ber. d. Wien. Ak. 42,128). Starke Aenderung des Axenwinkels mit der Temperatur:

$$2E = 37^{0}\ 44'\ \text{bei}\ 15^{0}\ C.$$
$$= 41\ 36\ \text{-}\ 47\ \text{-}$$
$$= 42\ 40\ \text{-}\ 56\ \text{-}$$

(Des Cloizeaux, Nouv. Rech. 60).

Citronensäure $= C^6H^8O^7 + H^2O$. $a:b:c = 0,6740:1:1,6621$. Combination Fig. 434: $p = \infty P$, $r = \bar{P} \infty$, $q = \breve{P} \infty$, $o = P$. Spaltbarkeit oP vollkommen. Optische Axenebene $\infty \bar{P} \infty$, b Mittellinie. Doppelbrechung +.

	α	β	γ	$2V$	$2E$
B	1,4896	1,4943	1,5054	66° 31'	110° 3'
D	1,4932	1,4977	1,5089	65 9	107 28
E	1,4967	1,5011	1,5122	64 47	107 4

(Schrauf, Sitz.-Ber. d. Wien. Akad. 41,790). Der scheinbare Axenwinkel in verschiedenen Platten oft ziemlich variirend.

Fig. 434.

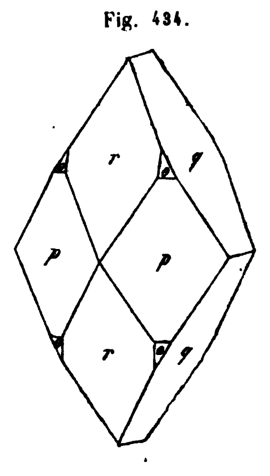
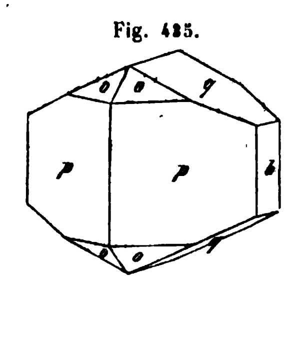


Fig. 435.



Terpin (Terpentinölhydrat) = $C^{10}H^{20}O^2 + 2H^2O$. $a:b:c = 0{,}8072 : 1 : 0{,}4764$. Combination Fig. 435: $p = \infty P$, $o = P$, $q = \breve{P}\infty$, $b = \infty\breve{P}\infty$. Axenebene $\infty\breve{P}\infty$, a Mittellinie. Doppelbrechung +. Brechungsexponenten:

	α	β	γ
Li-Linie	1,5024	1,5093	1,5211
Na -	1,5049	1,5124	1,5243
Tl -	1,5073	1,5148	1,5272

Der wahre Axenwinkel direct bestimmt (durch Messung des scheinbaren spitzen und stumpfen in Oel, s. S. 105):

Li-Linie	$2V =$	77° 37′
Na -		— 27
Tl -		— 18

(Arzruni, Poggendorff's Ann. 152,282.).

Benzol = C^6H^6. $a:b:c = 0{,}891 : 1 : 0{,}799$. Nur die primäre Pyramide.

Trinitrophenol (Pikrinsäure) = $C^6H^3N^3O^7$. $a:b:c = 0{,}9744 : 1 : 0{,}9374$. Combination Fig. 436: $o = P$, $p' = \infty\breve{P}2$, $a = \infty\bar{P}\infty$. Optische Axenebene $\infty\breve{P}\infty$.

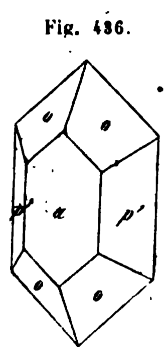


Fig. 436.

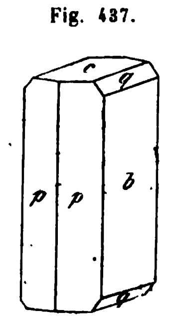


Fig. 437.

Phtalsäure $C^6H^4(HCO^2)^2$. $a:b:c = 0{,}355 : 1 : 1{,}363$. Combination Fig. 437: $p = \infty P$, $b = \infty\breve{P}\infty$, $c = 0P$, $q = \breve{P}\infty$.

Mellithsaures Ammon = $C^6(NH^4CO^2)^6 + 9H^2O$. $a:b:c = 0{,}6461 : 1 : 0{,}3564$. Gewöhnlich sind die Krystalle nur sechsseitige Prismen, gebildet von ∞P und $\infty\breve{P}\infty$, mit der Basis; dazu treten zuweilen kleine Flächen von $\bar{P}\infty$ und $\breve{P}\infty$. Optisch interessant durch seine grosse Dispersion der Axen; die Verticalaxe ist erste Mittellinie und Axe der grössten Elasticität für alle Farben, die optische Axenebene dagegen ist für Roth $\infty\breve{P}\infty$, für Violett $\infty\bar{P}\infty$; die Krystalle sind also für eine Farbe, und zwar für Grün, welches näher an Gelb als an Blau liegt, einaxig, und zeigen daher die in Fig. 5, Tafel I dargestellte Interferenzfigur (vergl. S. 97). Brechungsexponenten für Strahlen, deren Schwingungsrichtung

	‖ a	‖ b
roth	1,550 (β)	1,552 (γ)
grün	1,564 (γ)	1,563 (β)
blau	1,572 (γ)	1,570 (β)

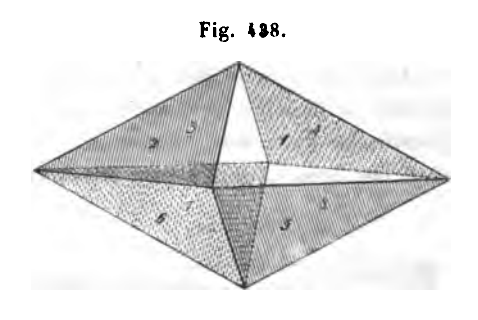
$2V = 11^0\ 0'$, $2E = 17^0$ roth
12 40 20 blau.

Demnach ist die Dispersion der wahren Axen 23° 40′, die der scheinbaren 37° (Grailich und v. Lang, Sitz.-Ber. der Wien. Akad. 27,49).

Hemiëdrische Formen des rhombischen Systems.

§. 90. Die sphenoidische Hemiëdrie. 1) Der allgemeine Repräsentant aller rhombischen Formen ist die rhombische Pyramide, von der die Prismen und die Pinakoide nur specielle Fälle darstellen. Jede Hälfte einer Symmetrieaxe wird von vier Flächen der holoëdrischen Pyramide in einem Punkte geschnitten, wir werden also eine hemiëdrische Form derselben erhalten, wenn wir in denselben Punkten nur je zwei Flächen schneiden lassen, welche so ausgewählt sind, dass die von ihnen gebildeten Kanten an den beiden zu einer Symmetrieaxe gehörigen Seiten jedesmal gleichen Winkel haben. Dieser Bedingung genügt nun offenbar die Form, welche entsteht, wenn alle abwechselnden Flächen der rhombischen Pyramide allein vorhanden gedacht werden. Behalten wir die Numerirung der Fig. 404 bei und lassen z. B. die Flächen 2, 4, 5, 7 ausfallen, wie es in Fig. 438 dargestellt ist, so ist offenbar die von 1 und 8 gebildete Kante gleich der von 3 und 6 gebildeten; die zwischen 1 und 3 gleich der zwischen 6 und 8; endlich Kante 1 : 6 = Kante 3 : 8; folglich die von den Flächen 1, 3, 6, 8 umschlossene Form eine den Bedingungen der Hemiëdrie vollkommen genügende.

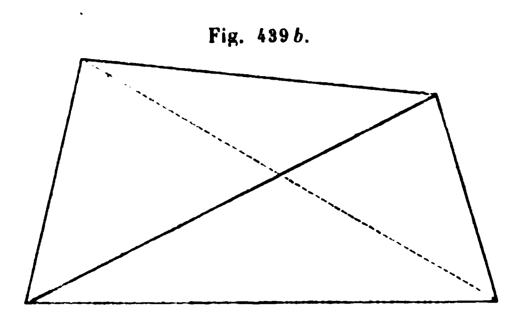
Fig. 438.



Dieselbe ist in Fig. 439*a* dargestellt, während Fig. 439*b* die entgegengesetzte hemiëdrische Gestalt, aus den schraffirten Flächen der Fig. 438

Fig. 439*a*.

Fig. 439*b*.



bestehend, zeigt. Die in Rede stehenden Krystallformen führen den Namen rhombische Sphenoide, und unterscheiden sich dadurch von den tetragonalen Sphenoiden, dass ihre vier Mittelkanten nicht gleich sind, sondern, wie aus Obigem hervorgeht, immer nur je zwei gegenüberliegende. Sie haben also dreierlei Kanten, zwei Polkanten, zwei stumpfere und zwei schärfere Mittelkanten; die Polkanten können sich demnach nicht, wie bei den tetragonalen Sphenoiden, rechtwinkelig kreuzen, sondern müssen dies

unter schiefen Winkeln thun. Daraus geht hervor, dass ein rhombisches Sphenoid keine Symmetrieebene besitzt und dass die beiden entgegengesetzten Hälften einer rhombischen Pyramide, zu bezeichnen mit:

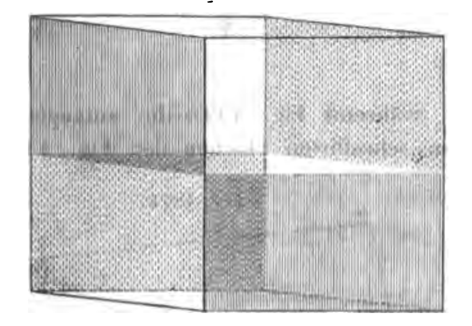
$$+\frac{mP}{2} \text{ und } -\frac{mP}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}(na : b : mc) = \varkappa\,(hkl),$$

enantiomorphe Gestalten sind. Wären diese Krystalle nicht optisch zweiaxig, bei welcher Klasse eine Circularpolarisation nicht nachzuweisen ist, so würden sie nach Analogie der übrigen enantiomorphen Krystalle eine solche besitzen müssen. Es steht nun jedenfalls mit dieser Eigenschaft der sphenoidischen Hemiëdrie in gesetzmässigem Zusammenhange, dass fast alle in derselben krystallisirenden Substanzen in Lösung die Polarisationsebene des Lichtes drehen.

2) Wenden wir dieselbe Hemiëdrie nun auch auf die prismatischen Formen an, so muss das Resultat das Gleiche sein bei den Makro- und Brachydomen, wie bei den verticalen Prismen, da diese drei Arten von Formen ja beliebig vertauscht werden können. Sei z. B. Fig. 440 diejenige rhombische Pyramide, deren $m = \infty$, d. h. ein rhombisches Prisma, so wird bei Anwendung dieser Hemiëdrie auf dasselbe je eine Fläche des einen Hemiëders mit einer des entgegengesetzten zusammenfallen, die Prismen bleiben also scheinbar holoëdrisch; dasselbe gilt von denjenigen Pyramiden, deren Brachydiagonale $= \infty$, den Brachydomen, endlich auch von den Makrodomen. Das primäre Prisma ist nun aber aufzufassen als ein rhombisches Sphenoid, dessen $m = \infty$, als die Grenzgestalt der verticalen Reihe der Sphenoide, welche um so spitzer werden, d. h. um so schärfere Polkanten erhalten, je grösser m ist.

Fig. 440.



3) Für den Werth $m = 0$ fallen sowohl die beiden oberen, wie die beiden unteren Flächen der Sphenoide zu einer zusammen; diese ist die Basis, welche sich demnach nicht von der holoëdrischen unterscheiden kann. Wie in diesem Falle die Polkanten verschwinden, weil ihr Winkel $= 180^{0}$ wird, so ist das gleiche der Fall mit den stumpferen Mittelkanten, sobald der Coëfficient der Makrodiagonalen und der Verticalen gleichzeitig $= \infty$ werden, endlich mit den schärferen Mittelkanten, wenn die Axen a und c den Factor ∞ erhalten, d. h. das Makro- und das Brachypinakoid werden durch diese Hemiëdrie ebenso wenig, als die Basis und die prismatischen Formen alterirt.

Beispiele. Schwefelsaure Magnesia (Bittersalz) $= MgSO^4$

$+ 7 H^2O$. $a : b : c = 0,9901 : 1 : 0,5709$. Combination Fig. 441: $p = \infty P$, $o = + \frac{P}{2}$. Doch findet sich auch oft $- \frac{P}{2}$, so dass die Krystalle anscheinend holoëdrisch sind. Spaltbarkeit $\infty \breve{P} \infty$ vollkommen. Optische Axenebene $o P$, b Mittellinie, Doppelbrechung —.

Fig. 441.

	α	β	γ
Linie C	1,4305	1,4530	1,4583
D	1,4325	1,4554	1,4608
F	1,4374	1,4607	1,4657

(Topsöe, Ann. d. chim. phys. [5], Vol. I). Dispersion der Axen sehr schwach; direct beobachtet (Des Cloizeaux, Ann. d. mines [5] XIV):

$2E = 77^0\ 59'$ roth, $77^0\ 43'$ violett.

Schwefelsaures Zink (Zinkvitriol) $= ZnSO^4 + 7 H^2O$. $a : b : c = 0,9804 : 1 : 0,5631$. Combination gleich der vorigen; nur tritt P weit häufiger mit allen acht Flächen, $+ \frac{P}{2}$ und $- \frac{P}{2}$ auf. Spaltbarkeit $\infty \breve{P} \infty$. Optische Axenebene $o P$, b Mittellinie, Doppelbrechung —.

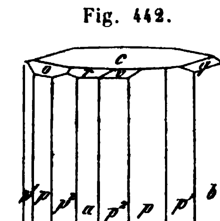
	α	β	γ
Linie C	1,4544	1,4776	1,4812
D	1,4568	1,4801	1,4836
F	1,4620	1,4860	1,4897

(Topsöe, a. a. O.). Direct beobachtet (Des Cloizeaux, a. a. O.):

$2E = 70^0\ 23'$ roth, $70^0\ 6'$ violett.

Rechtsweinsaures Natronkali (Seignettesalz) $= KNaH^4C^4O^6 + 4H^2O$. $a : b : c = 0,8317 : 1 : 0,4296$. Combination Fig. 442: $c = o P$, $p = \infty P$, $p' = \infty \breve{P} 2$, $p^2 = \infty \bar{P} 2$, $a = \infty \bar{P} \infty$, $b = \infty \breve{P} \infty$, dazu weniger häufig $o = - \frac{P}{2}$ (links), $v = + \frac{2\bar{P}2}{2}$ (rechts), $q = \breve{P} \infty$, $r = \bar{P} \infty$. Optische Axenebene $\infty \breve{P} \infty$, a Mittellinie, Doppelbrechung +.

Fig. 442.



	α	β	γ	$2V$	$2E$
Roth:	1,490	1,491	1,493	$71^0\ 6'$	$120^0\ 11'$
Gelb:	1,492	1,493	1,496	69 40	117 2

(Des Cloizeaux, Ann. d. mines [5], XIV, 366). Aenderung der optischen Constanten durch die Temperatur sehr beträchtlich; Müttrich (Poggend. Ann. d. Phys. 121. Bd. 193) fand:

	α	β	γ	$2V$	$2E$
Für Roth bei 16^0 C.	1,4912	1,4930	1,4964	$72^0\ 29'$	$123^0\ 38'$
,, ,, ,, 45^0 ,,	1,4869	1,4889	1,4920	76 46	135 11 *).

*) Dieses und das folgende Salz haben so starke Dispersion, dass die hyperbolischen Büschel des Axenbildes nirgends dunkel, sondern lebhaft gefärbt und von grosser Breite sind.



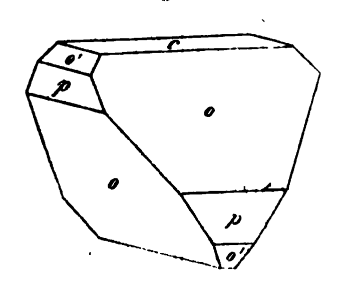
24*

Rechtsweinsaures Natronammon (Ammoniumseignettesalz) $= (NH^4)\ NaH^4C^4O^6 + 4H^2O$. $a : b : c = 0,8347 : 1 : 0,4296$. Dieselbe Combination, wie die des vorigen Salzes. Optische Axenebene $\infty \bar{P} \infty$, c Mittellinie. Doppelbrechung —; $\beta = 1,495$.

$2V = 62^0$, $2E = 100^0$ (Roth),
46^0, 70^0 (Violett).

Rechtsweinsaures Antimonoxydkalium (Brechweinstein $= K(SbO)C^4H^4O^6$. $a:b:c = 0,9556 : 1 : 1,4054$.

Fig. 443.



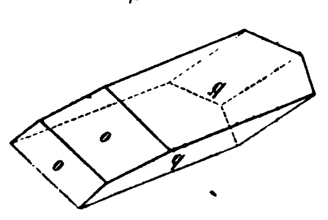
Combination Fig. 443: $o = + \frac{P}{2}$ (rechts), $o' = - \frac{P}{2}$ (links), $p = \infty P$, $c = o P$. Spaltbarkeit $o P$, $\infty \breve{P} \infty$ und $\infty \bar{P} \infty$. Optische Axenebene $o P$, b Mittellinie, Doppelbr. —;

$2E = 85^0\ 20'$ roth, $83^0\ 10'$ blau

(Des Cloizeaux, Nouv. Rech. 56).

Linksweinsaures Antimonoxydkalium hat dieselbe Zusammensetzung und dieselbe Form, wie das vorige, aber $- \frac{P}{2}$ (links) erscheint vorherrschend, $+ \frac{P}{2}$ (rechts klein.

Fig. 444.



Glycerin $= C^3H^8O^3$. $a:b:c = 0,70 : 1 : 0,66$ (nur approximativ zu bestimmen). Combination Fig. 444: $q = \breve{P} \infty$, $o = + \frac{P}{2}$ (rechts). Spaltbarkeit $\infty \bar{P} \infty$ unvollkommen. Axenebene $o P$, erste Mittellinie wahrscheinlich a, zugleich grösste Elasticitätsaxe; Dispersion $\varrho < v$ (v. Lang. Poggendorff's Ann. 152. Bd. 637).

Asparagin $= C^4H^8N^2O^3 + H^2O$. $a : b : c = 0,4737 : 1 : 0,8327$. Combination Fig. 445: $p = \infty P$, $q' = 2\breve{P}\infty$, $c = o P$, $o = - \frac{P}{2}$ (links). Optische Axenebene $\infty \breve{P} \infty$, c Mittellinie, Doppelbrechung +;

Fig. 445.

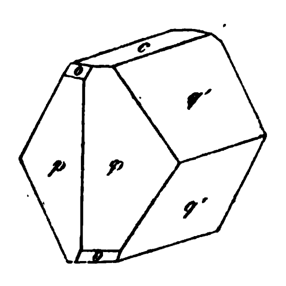
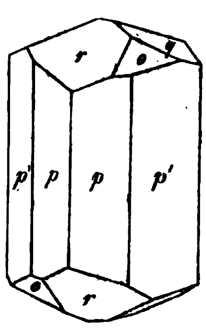


Fig. 446.



	α	β	γ	$2V$
Roth:	1,5458	1,5778	1,6185	85° 5′
Gelb:	1,5489	1,5829	1,6246	86 15
Blau:	1,5542	1,5943	1,6378	89 51.

Demnach ist für eine bestimmte Wellenlänge des äussersten Blau der wahre Axenwinkel genau = 90°. (Groth, Poggendorff's Ann. 135, 651.)

Mycose (=Trehalose) $= C^{12}H^{22}O^{11} + 2H^2O$. $a:b:c = 0,6814:1:0,4171$. Combination Fig. 446: $p = \infty P$, $p' = \infty \breve{P}2$, $r = \bar{P}\infty$, $q = \breve{P}\infty$, $o = +\frac{P}{2}$ (rechts). Spaltbarkeit ∞P deutlich. Optische Axenebene $\infty \breve{P} \infty$, c Mittellinie, Doppelbrechung +. Durch Messung des spitzen und stumpfen Axenwinkels in Oel wurde gefunden:

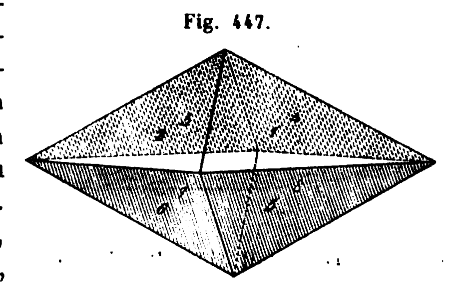
	$2V$	$2E$	β
Für die *Li*-Linie:	48° 2′		
„ „ *Na* „	50 16	78° 56′	1,478
„ „ *Tl* „	51 26	83 24	1,533

(Bodewig und Lehmann, unveröffentlichte Beob.) Des Cloizeaux (Nouv. Rech. 103) fand:

$2E = 73°\ 8'$ roth,
82 39 blau.

§. 91. **Die monosymmetrische Hemiëdrie.** 1) Die rhombischen Pyramiden können noch auf eine zweite Art Hälftformen liefern, welche den Bedingungen der Hemiëdrie genügen. Denke man sich z. B. in Fig. 447 die beiden Paare paralleler Flächen 3, 5 und 4, 6 ausfallen, so resultirt eine Form, aus den Flächen 1, 2, 7, 8 gebildet, von deren Ebenen jedesmal zwei jede Hälfte der drei Symmetrieaxen in demselben Abstande durchschneiden, wie es mit vier der holoëdrischen Gestalt der Fall ist; zugleich werden die beiden entgegengesetzten Seiten einer jeden Symmetrieaxe genau gleichartig von denselben geschnitten. Diese hemiëdrische Form bildet nun, wie aus der Figur leicht zu ersehen, ein schief nach vorn abwärts laufendes Prisma, welches allein den Raum nicht umschliessen, folglich nur in Combination mit anderen Formen auftreten kann. Denken wir uns etwa die Basis hinzutretend, von welcher weiterhin gezeigt werden wird, dass sie durch diese Hemiëdrie nicht verändert erscheint, so ist klar, dass diese Combination nur eine Symmetrieebene besitzt, nämlich das Brachypinakoid. Hätten wir statt jener Flächen, 1, 4, 6 und 7 (also Flächenpaare, welche sich in den schärferen Polkanten schneiden) gewählt, so würde die einzig übrig bleibende Symmetrieebene dieser hemiëdrischen Form das Makropinakoid sein. Endlich könnte die Hemiëdrie auch so wirksam werden, dass

Fig. 447.

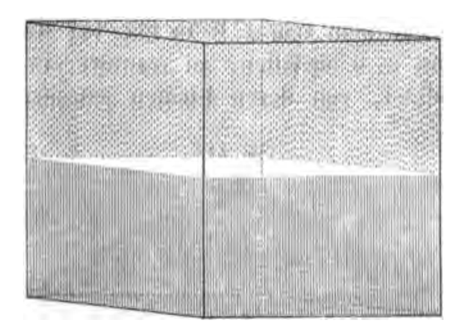


die Flächen 1, 5, 3, 7 in Gegensatz zu 2, 6, 4, 8 träten, alsdann wären die hemiëdrischen Combinationen nur noch symmetrisch nach der Basis. Diese drei Fälle sind aber principiell nicht von einander verschieden, da die Aufstellung einer rhombischen Pyramide eine dreifach mögliche ist und es von der Wahl der Aufstellungsart abhängt, welcher jener drei Fälle eintritt. Bei dieser Hemiëdrie sind die Krystalle somit stets nur nach einer der drei rhombischen Hauptschnitte symmetrisch, worauf sich der Name dieser Abtheilung bezieht. Wir nennen die so entstehenden hemiëdrischen Gestalten, wie in dem folgenden Systeme, in welchem ganz analoge Formen als holoëdrische auftreten, »Hemipyramiden«, unterscheiden sie aber von letzteren als **rhombische Hemipyramiden**. Da es parallelflächige Gestalten sind, werden sie bezeichnet mit

$$\pm\left[\frac{mP}{2}\right], \text{ resp. } \pm\left[\frac{m\bar{P}n}{2}\right] \text{ oder } \pm\left[\frac{m\breve{P}n}{2}\right]$$
$$= \tfrac{1}{2}(a : nb : mc) = \pi(hkl).$$

2) Die holoëdrischen prismatischen Formen, die Prismen, Makro- und Brachydomen, werden durch diese Hemiëdrie nur theilweise geändert. Aus Fig. 448 geht dies für die verticalen Prismen unmittelbar hervor, denn diese zeigt, dass die vier Flächen der einen hemiëdrischen Gestalt mit denen der entgegengesetzten absolut zusammenfallen, sobald $m = \infty$ wird; in diesem Grenzfall ist die aus der rhombischen Pyramide abgeleitete prismatische Hälftform eben ein verticales Prisma geworden. Ist der Coëfficient der Brachydiagonale ∞, so fallen von der holoëdrischen Pyramide (Fig. 447) die Flächen 1 und 4, 2 und 3 u. s. f. in eine Ebene, diese gehören aber stets entgegengesetzten Hälften an, also erscheinen auch die Brachydomen in dieser Abtheilung scheinbar holoëdrisch. Anders ist es dagegen mit den Makrodomen.

Fig. 448.



In dem Grenzfall des Parallelismus der Flächen mit der Axe b liefern 1 und 2 (Fig. 447) eine Fläche der hemiëdrischen Form, 7 und 8 die zweite, während 5 und 6, sowie 3 und 4 je eine der entgegengesetzten Form geben. Hier entstehen durch die Hemiëdrie also zwei Hälftgestalten, deren jede nur von einem Paar paralleler Flächen gebildet wird und welche **rhombische Hemidomen** genannt werden. Es ist leicht einzusehen, dass das Auftreten aller Flächen der Prismen und Brachydomen, sowie das Zerfallen der Makrodomen in je zwei Hemidomen nur gilt, wenn die Hemiëdrie in der Weise stattfindet, wie Fig. 447 sie darstellt. Bilden dagegen die Flächen 1, 4, 6, 7 der rhombischen Pyramide die eine, die übrigen Flächen die andere hemiëdrische Form, so bleiben Prismen und Makrodomen

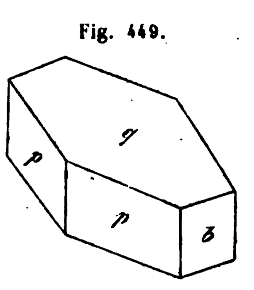
unverändert, und die Brachydomen zerfallen in je zwei Hemidomen. Ist endlich die eine hemiëdrische Gestalt der Pyramide bestehend aus 2 mal 2 Flächen, welche in den Basiskanten zusammenstossen, so bleiben Brachy- und Makrodomen scheinbar holoëdrisch, während die Prismen in je zwei **Hemiprismen** zerfallen. Kurz: diejenigen der drei Arten von prismatischen Formen, deren Flächen normal sind zu der einzigen Symmetrieebene, welche bei den hemiëdrischen Formen als solche noch übrig bleibt, zerfallen in je zwei Paare paralleler Flächen (je nach der Stellung Hemiprismen oder Hemidomen), diejenigen der beiden anderen Arten bleiben scheinbar holoëdrisch.

3) Die drei Pinakoide sind diejenigen rhombischen Pyramiden, bei denen je vier Flächen sich in ihrer Lage nicht von einander unterscheiden, da dieselben zweien Axen parallel laufen. Da nun von jenen vier Flächen stets zwei in dieser Hemiëdrie übrig bleiben, so kann dieselbe stattfinden, nach welcher der drei Symmetrieebenen es auch sei, diese drei müssen als Krystallflächen (Basis, Makropinakoid und Brachypinakoid) ganz ebenso erscheinen können, wie bei den holoëdrischen Krystallen.

Von dieser Hemiëdrie kennt man bisher nur ein Beispiel; doch ist anzunehmen, dass unter den krystallographisch untersuchten Substanzen noch mehrere hierher gehören, bei welchen man die betreffende Erscheinung als unregelmässiges zufälliges Fehlen einzelner Flächen gedeutet hat. Unzweifelhaft hemiëdrisch nach diesem Gesetz ist folgende organische Verbindung:

Bibrombrenztraubensäure $= C^3 H^2 Br^2 O^3$.
$a : b : c = 0,4466 : 1 : 0,6196$. Combination = Fig. 449: $p = \infty P$, $b = \infty \breve{P} \infty$, $q = \left[\frac{\bar{P}\infty}{2}\right]$ als rechtes Hemidoma; nur sehr selten treten ganz klein die Flächen von $-\left[\frac{\breve{P}\infty}{2}\right]$ (links) hinzu. Spaltbarkeit $\infty \breve{P} \infty$ vollkommen. Optische Axenebene $\infty \breve{P} \infty$, c erste Mittellinie. Doppelbrechung +.
$2E = 23^0\ 49'$ roth, $24^0\ 37'$ blau.
(Groth, Liebig's Annalen der Chem. u. Pharm., 92. Bd. 267).

Fig. 449.



Anmerkung. Andere Hemiëdrien, als die soeben beschriebenen, sind im rhombischen System nicht möglich; auch wäre eine Tetartoëdrie, entstanden aus dem Zusammenwirken beider Hemiëdrien, krystallonomisch unmöglich, da sie zu Formen führen würde, welche den allgemeinen Bedingungen der Hemiëdrie nicht genügen.

V. Das monosymmetrische Krystallsystem.

§. 92. **Die Symmetrie der monosymmetrischen Krystalle.** Aus der Definition dieses Krystallsystems, als der Gesammtheit aller Formen mit einer einzigen Symmetrieebene, geht sofort hervor, was für Gestalten überhaupt demselben angehören können.

Dazu ist zunächst zu rechnen die Symmetrieebene selbst, welche hier, wie die Symmetrieebenen aller anderen Systeme, ebenfalls eine krystallonomisch mögliche Fläche ist; das derselben parallele Flächenpaar stellt somit die wichtigste Krystallform des monosymmetrischen Systems dar.

Betrachten wir nun eine andere, unter irgend einem Winkel gegen jene Ebene geneigte Fläche eines monosymmetrischen Krystalls, so erfordert die Symmetrie desselben das Vorhandensein einer zweiten, in Bezug auf die Symmetrieebene zu ihr symmetrisch liegenden; die beiden Flächen schneiden sich somit in einer Kante, welche in der Symmetrieebene liegt, d. h. derselben parallel ist. Die vollständige Form, welche hierbei resultirt, wird demnach von diesen beiden und ihren parallelen Gegenflächen gebildet, es ist also eine prismatische Form, deren vier (je zwei gegenüberliegende gleichwinkelig) Kanten der Symmetrieebene parallel sind, und welche von dieser symmetrisch der Länge nach halbirt wird. Solcher prismatischen Formen von verschiedenstem Winkelmaass können nun beliebig viele an einem monosymmetrischen Krystall auftreten, und ihre Längsaxen können sich in der Symmetrieebene (welcher sie sämmtlich parallel sind) unter den mannigfachsten Winkeln durchschneiden, wenn sie nur alle durch rationale Indices auf einander zurückzuführen sind.

Eine andere Art von Gestalten resultirt aus dem besonderen Falle, dass der Winkel, unter welchem eine Krystallfläche die Symmetrieebene schneidet, $= 90^0$ ist; alsdann fällt die zweite, zu ihr symmetrische, mit der ersten zusammen, und diese bildet mit ihrer parallelen Gegenfläche allein schon die vollständige einfache Krystallform. Solcher normal zur Symmetrieebene stehender Flächenpaare sind nun wieder beliebig viele krystallonomisch möglich, deren Durchschnittsrichtungen mit der Symmetrieebene in dieser die mannigfaltigsten Richtungen haben können, nur beschränkt durch das Gesetz der Rationalität der Indices.

Da andere Fälle nicht möglich sind, als dass eine Krystallfläche der Symmetrieebene parallel, oder zu ihr normal, oder sie unter schiefem Winkel schneidet, so sind mit diesen dreien alle möglichen erschöpft, und es giebt somit im monosymmetrischen System nur drei Arten von einfachen Krystallformen:

1) die Symmetrieebene selbst;
2) Flächenpaare, welche normal zu ihr stehen;
3) prismatische Formen, welche sie unter schiefen Winkeln durchschneiden.

Aus dem Grundgesetz der physikalischen Krystallographie folgen nun auch die allgemeinen physikalischen Eigenschaften der monosymmetrischen Krystalle:

Ueber die Elasticität liegen bisher keine directen Messungen vor, doch ist aus der Uebereinstimmung, in welcher die Bestimmungen der Cohäsion und der Härte mit dem oben erwähnten Gesetze stehen, auch auf eine solche für die Elasticität zu schliessen. Darnach könnte dieselbe entweder ein Minimum oder ein Maximum haben in der Normale zur Symmetrieebene, der einzig vorhandenen Symmetrieaxe. Andere Minima und Maxima müssten stets solche von genau gleichem Werthe in den Richtungen bedingen, welche zu jenen symmetrisch liegen in Bezug auf die geometrische Symmetrieebene. Die Cohäsion kann in der Richtung der Symmetrieaxe entweder ein Minimum haben, oder ein Maximum; im ersteren Falle ist der Krystall spaltbar nach der Symmetrieebene, im letzteren nach anderen Richtungen; da diese die verschiedensten sein können (Formen der zweiten und dritten Art, s. o.), so muss eine Spaltbarkeit nach der Symmetrieebene am häufigsten vorkommen, und dies ist in der That der Fall. Die Härte ist ebenfalls symmetrisch zur Symmetrieebene; bestimmt man dieselbe auf einer Fläche, welche zu jener normal ist, nach verschiedenen Richtungen, so erhält man eine in Bezug auf jene Ebene symmetrische Härtecurve, eine gänzlich unsymmetrische auf anderen Flächen.

Da die optischen Eigenschaften dieselbe Symmetrie befolgen müssen, so ergiebt sich, dass die geometrische Symmetrieebene die optischen Elasticitätsflächen für sämmtliche Farben symmetrisch halbiren, d. h. einer der drei Hauptschnitte dieser Elasticitätsflächen zusammenfallen muss mit der Symmetrieebene der Krystalle. Daraus folgt, dass der Symmetrieaxe eine der drei optischen Elasticitätsaxen für jede Farbe des Lichtes parallel ist, und dass die beiden anderen in der Symmetrieebene liegen. Sind diese letzteren die der grössten und kleinsten Elasticität, so fällt die Ebene der optischen Axen mit der Symmetrieebene zusammen; ist dagegen die Symmetrieaxe die Axe der grössten oder der kleinsten Elasticität, so steht die optische Axenebene normal zur Symmetrieebene; ein dritter Fall ist nicht möglich, oder die geometrische Symmetrieebene würde aufhören, eine solche auch in physikalischer Hinsicht zu sein. Durch die Symmetrie ist somit nur eine Elasticitätsaxe in ihrer Lage (|| der Symmetrieaxe) fixirt, für die beiden anderen folgt daraus nur, dass sie in der Symmetrieebene liegen, nicht, dass sie in derselben eine bestimmte, krystallographisch gegebene Richtung haben müssten. Es ist somit weder dafür, dass dieselben in irgend einer Beziehung zu den Richtungen der jener Ebene parallelen Kanten stehen, noch dafür, dass sie selbst für die verschiedenen Farben die gleiche Richtung besitzen, irgend eine theoretische Ursache vorhanden. In der That ist auch keines von beiden der Fall; die beiden in der Symmetrieebene liegenden Hauptschwingungsrichtungen haben bei jeder Substanz natürlich eine ganz bestimmte Richtung, welche aber in keiner Beziehung zu der der

Krystallkanten steht; sie sind ferner verschieden für die verschiedenen Farben, sie sind innerhalb der Symmetrieebene **dispergirt**. Ihre Lage ist ferner abhängig von der Temperatur des Krystalles, sie ändert sich, wenn derselbe erwärmt wird, aber natürlich nur innerhalb der Symmetrieebene.

Was die Ausdehnung der monosymmetrischen Krystalle durch die Wärme betrifft, so muss, wenn dieselbe symmetrisch zu jener Ebene stattfinden soll, die Normale derselben, die Symmetrieaxe, entweder die Richtung der grössten, der mittleren oder der kleinsten Ausdehnung sein; es müssen also die beiden anderen in der Symmetrieebene liegen. Nun ist aber theoretisch gar kein Grund vorhanden, dass sie etwa mit den optischen Hauptschwingungsrichtungen zusammenfallen müssten, ja dass ihre Lage selbst eine constante, von der Temperatur unabhängige sei. Dies ist denn auch in Wirklichkeit keineswegs der Fall, jene beiden der Symmetrieebene parallelen Richtungen stehen zwar auf einander stets normal, wie die beiden Hauptschwingungsrichtungen für dieselbe Farbe, aber ihre Lage gegen die Krystallkanten ist bei jedem Körper eine andere, ohne dass hierbei eine allgemeine Gesetzmässigkeit hervorträte.

Wie die bisher erwähnten, welche allein eine praktische Wichtigkeit beanspruchen können, bewahren auch alle übrigen physikalischen Eigenschaften nur in Bezug auf eine Ebene, die geometrische Symmetrieebene, ihre Symmetrie; eine weitere ist bei keiner derselben zu erkennen.

§. 93. **Wahl der Axen und der Grundform.** Bisher wurde es immer als das Geeignetste befunden, zu Axenebenen drei Symmetrieebenen zu wählen. Dies ist aber im monosymmetrischen System nicht möglich, weil nur eine einzige solche Ebene vorhanden ist, es wird also hier nöthig sein, wenigstens noch zwei andere Krystallflächen (man könnte bekanntlich alle drei beliebig nehmen) zu wählen, und diese Wahl so zu treffen, dass die Ableitung der übrigen Formen die möglichst einfache und namentlich die Berechnungen in thunlichster Weise erleichtert werden. Das letztere geschieht bekanntlich, wenn von den drei Axenwinkeln so viele als möglich $= 90^0$ sind. Nun giebt es in der That eine Art, die Axenebenen auszuwählen, bei welcher zwei jener Winkel rechte sind (alle drei $= 90^0$ ist nicht möglich, wie weiterhin gezeigt werden soll); wenn nämlich als solche genommen werden die Symmetrieebene und zwei jener im vor. § erwähnten zweiten Art von Formen, Flächen, welche normal zu der ersteren stehen. Diese schneiden sich offenbar in der Normale zur Symmetrieebene, d. i. in der Symmetrieaxe, welche also die eine Axe darstellt; die beiden anderen müssen mit dieser rechte Winkel bilden, da sie als Durchschnittslinien jener beiden Flächen mit der Symmetrieebene in letzterer liegen. Diese Art der Wahl der Axen ist nun die allgemein adoptirte, und werden die monosymmetrischen Krystalle ferner stets so gestellt, dass die Symmetrieebene vertical ist und auf den Beobachter zuläuft, und dass eine der beiden anderen Axenebenen ebenfalls vertical steht; alsdann ist die dritte Axenebene,

da sie nicht normal zu der zweiten ist, nicht horizontal, sondern mehr oder weniger geneigt; es ist nun allgemein üblich, die Krystalle so zu stellen, dass diese letzte Fläche nach vorn (auf den Beobachter zu) geneigt ist. Bei dieser Stellung läuft offenbar die Symmetrieaxe quer und horizontal, es ist die bisher stets mit b bezeichnete Axe, und wird hier die Orthodiagonale oder schlechtweg die Symmetrieaxe genannt; die Durchschnittsrichtung der beiden verticalen Axenebenen, deren eine die der Symmetrie ist, steht senkrecht, es ist die Verticalaxe c; endlich die Durchschnittsrichtung der dritten Ebene mit derjenigen der Symmetrie ist nach vorn geneigt, auf den Beobachter zulaufend; sie wird deshalb die Klinodiagonale genannt und mit a bezeichnet. Man sieht nun leicht, dass bei einer solchen Wahl und Stellung der Axen dieselben sich in ihrer Richtung nur dadurch von dem Axensystem eines rhombischen Krystalls unterscheiden, dass eine derselben aus der horizontalen Lage nach vorn geneigt erscheint; hierauf bezieht sich der bisher gebrauchte Name »monoklines System«, welcher deshalb unpassend ist, weil man mit demselben Rechte alle drei Axen schief geneigt auswählen könnte. Es bedarf kaum der Bemerkung, wie verfehlt der noch vielfach gebrauchte Name »Hauptaxe« für die Verticalaxe ist, wenn man sich erinnert, dass diese eine ganz beliebige Krystallkante ist.

Betrachten wir nun ein ganz bestimmtes Beispiel, etwa den in Fig. 450 dargestellten monosymmetrischen Krystall*), so ist leicht zu sehen, dass derselbe nach keiner anderen Ebene in zwei gleiche und entgegengesetzte Hälften zerlegt werden kann, als parallel der Fläche b; diese Krystallfläche ist also die Symmetrieebene. Zu dieser sind normal die Flächen c, a, r' und r mit ihren parallelen Gegenflächen; wählen wir nun von diesen zwei zu Axenebenen, z. B. a, welches wir vertical stellen, und c, welches schräg nach vorn läuft, so hat der Krystall in der Figur diejenige Stellung, von welcher oben ausgesagt wurde, dass sie die allgemein adoptirte eines monosymmetrischen Krystalls sei. Die Klinodiagonale a ist nun die Durchschnittsrichtung von b und c, oder, da diese Kante durch q abgestumpft ist, die Kante $c : q$; die Orthodiagonale b ist die Normale zur Fläche b oder, was dasselbe ist, die Kante $a : c$; die Verticalaxe c endlich ist die Durchschnittsrichtung der Flächen a und b, oder, da diese Kante durch p abgestumpft ist, die Kantenrichtung $a : p$ oder $b : p$.

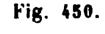
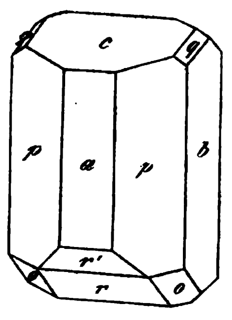


Fig. 450.



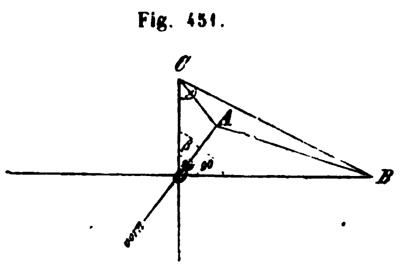
Nachdem nunmehr drei bestimmte Kantenrichtungen des Krystalls als »Axen« fixirt sind, können wir alle Flächen desselben durch ihre Parameter,

*) Für den Anfänger ist es hier wohl unumgänglich nöthig, sich die Anschauung durch ein Modell, wie solche käuflich sind, zu erleichtern; die Figur stellt einen Feldspathkrystall dar.

wie bisher, bestimmen, und haben daher zunächst zur Wahl einer **Grundform** zu schreiten. Diese muss irgend eine Form sein, deren Flächen die drei Axen in endlichen Abständen schneidet; solcher ist aber an dem als Beispiel gewählten Krystall Fig. 450 nur eine einzige vorhanden, nämlich die prismatische Gestalt *oo* nebst ihren beiden oben hinten gelegenen Gegenflächen. Jede Fläche dieser Form liegt in einem Octanten des Raumes, gebildet von den drei Axenebenen *a*, *b*, *c*, in welchem der Winkel der ersteren mit der letzten spitz ist; ihre Lage ist bekannt, d. h. wir können das Verhältniss, in welchem die drei Axen von der Fläche geschnitten werden, berechnen, wenn wir den Winkel der Axen *a* und *c* (gleich demjenigen der Flächen *a* und *c*), d. h. den sogenannten **Axenwinkel**, welcher mit β bezeichnet wird, kennen, und ferner die Neigung der Fläche gegen zwei jener Axenebenen.

Sei OA Fig. 451 die Klinodiagonale, OB die Symmetrieaxe, OC die Verticale des in Fig. 450 dargestellten Krystalls, ABC die Durchschnittsfigur der im hinteren rechten oberen Octanten liegenden Fläche *o*, welche zur Grundform gewählt werden soll, sei durch Messung bestimmt der Winkel β, d. i. der Winkel zwischen den Ebenen BOC und BOA, seien ferner gemessen die Winkel $ABC : AOC$ und $ABC : BOC$, so sind in dem aus ABC, AOC und BOC gebildeten sphärischen Dreieck alle Winkel bekannt, da der dritte, zwischen AOC und BOC, ein rechter ist; berechnet man die den beiden anderen Winkeln gegenüberliegenden Seiten, so sind dies die Winkel, welche die Kanten AC und BC mit der Verticalaxe OC einschliessen; somit sind sowohl im ebenen Dreieck OAC (da β gemessen ist), als auch im $\triangle\ OBC$ (da $BOC = 90^0$) alle Winkel bekannt, folglich die Verhältnisse $\frac{CO}{BO}$ und $\frac{AO}{CO}$ einfach abzuleiten.

Fig. 451.



Durch die vorstehende Berechnung erhält man das Verhältniss der drei Parameter $OA : OB : OC = a : b : c$ der Grundform, und da ausserdem die drei Axenwinkel, $\alpha = 90^0$, $\beta =$ dem gemessenen Winkel der Flächen *a* und *c*, $\gamma = 90^0$, bekannt sind, so sind nunmehr die **Elemente** des Krystalls, und vermöge des Gesetzes der Rationalität der Indices, die Gesammtheit aller seiner möglichen Formen, seine **Krystallreihe**, gegeben.

Aus den Entwickelungen des vorhergehenden § über die Ausdehnung der Krystalle geht unmittelbar hervor, dass zwar die Axenwinkel α und γ unverändert rechte bleiben, wenn der Krystall erwärmt wird, dass aber β sich dabei ändern muss, da innerhalb der Symmetrieebene nach verschiedenen Richtungen die Ausdehnungscoëfficienten verschieden sind, also die darin gelegenen Krystallkanten bei anderer Temperatur sich auch unter (wenn auch nur sehr wenig) verschiedenen Winkeln schneiden müssen. Ferner geht daraus hervor, dass parallel den drei Axen *a*, *b* und *c* die Ausdehnung keine gleiche ist, also auch das Verhältniss $a : b : c$ sich stetig

mit der Temperatur des Krystalls ändert, d. h. ein irrationales ist. Genau genommen gelten demnach von den Elementen eines monosymmetrischen Krystalls β und das Parameterverhältniss der Grundform nur für eine bestimmte Temperatur.

Im folgenden § sollen nunmehr alle übrigen möglichen Formen auf die so gewählten Axen und Grundform bezogen und entsprechend bezeichnet werden.

§. 94. **Ableitung und Bezeichnung der monosymmetrischen Formen.** Zu der von uns zur Grundform gewählten Fläche o (Fig. 450) und ihrer parallelen Gegenfläche erfordert die Symmetrie noch ein zweites Flächenpaar auf der entgegengesetzten Seite der Symmetrieebene, also ist die vollständige Grundform eine prismatische Gestalt. Wir können sie deshalb nicht wie bisher »Pyramide« benennen, sondern geben ihr, da sie, an und für sich betrachtet*), die Gestalt der Hälftflächner der rhombischen Pyramiden nach dem Gesetz der monosymmetrischen Hemiëdrie besitzt, den Namen Hemipyramide. Ausser dieser Form können an demselben Krystall noch auftreten die Flächen einer prismatischen Form, welche dieselben Parameter haben, aber über dem stumpfen Axenwinkel, d. h. vorn oben rechts und links, sowie hinten unten rechts und links, gelegen sind. Diese Form nennt man ebenfalls »Hemipyramide« und unterscheidet sie von der ersteren, der primären positiven (hinteren), mit $+P$ bezeichnet, als primäre negative (vordere) Hemipyramide: $-P$. Die Weiss'schen Zeichen derselben sind:

$$(a : b : c) \text{ und } (a' : b : c),$$

die Miller'schen:

$$(\bar{1}11)\ (\bar{1}\bar{1}1)\ (11\bar{1})\ (1\bar{1}\bar{1}) = +P$$
$$(111)\ (1\bar{1}1)\ (\bar{1}1\bar{1})\ (\bar{1}\bar{1}\bar{1}) = -P$$

Es ist hierbei aber wohl zu beachten, dass jede dieser beiden Hemipyramiden für sich die Gesammtheit aller, durch die Symmetrie einander bedingender Flächen, d. h. eine vollständige einfache Krystallform ist, dass die eine also zur andern in keiner andern Beziehung steht, als dass bei dieser Wahl der Axe zufällig diese mit jener gleiche Parameter erhält (bei einer andern Wahl derselben würde es eine andere sein). Es führt daher leicht zu einer falschen Vorstellung, wenn man, wie es häufig geschieht, die Combination dieser beiden einfachen Formen als die »vollständige monosymmetrische Pyramide« bezeichnet.

Ausser der primären positiven und der primären negativen Hemipyramide können nun aber an einem Krystall noch die mannigfaltigsten abgeleiteten

---

*) Es ist einleuchtend, dass ein monosymmetrisch-hemiëdrischer Krystall des rhombischen und ein Krystall des monosymmetrischen Systems ganz verschiedener Natur sind; die Combination der positiven und zugehörigen negativen Hemipyramide hat im ersteren Falle geometrisch und physikalisch vollständige rhombische Symmetrie, im zweiten Falle nicht.

Hemipyramiden, positive wie negative, vorkommen, deren Parameterverhältnisse rationale Vielfache desjenigen der primären sind. Man kann dieselben genau ebenso wie im rhombischen System in drei Ableitungsreihen ordnen:

1) Hemipyramiden der verticalen Reihe, welche dasselbe Verhältniss der Klino- und Orthodiagonale wie die primäre, aber andere Verticalaxe besitzen; sie sind theils flacher als jene:

$$\pm \frac{1}{m} P = (a : b : \frac{1}{m} c) = (h h l) \; {}_{(h < l)}$$

oder spitzer:

$$\pm m P = (a : b : m c) = (h h l) \; {}_{(h > l)}$$

2) Hemipyramiden der klinodiagonalen Reihen: Eine solche Reihe bilden diejenigen Hemipyramiden, welche gleiches Verhältniss der Orthodiagonale zur Verticale, wie $\pm P$, aber $n$fache Klinodiagonale haben:

$$\pm \mathfrak{P} n = (n a : b : c) = (h k k) \; {}_{(h < k)}$$

Eine gleiche Reihe leitet sich aber von jeder Pyramide der verticalen Reihe ab, also allgemein:

$$\pm m \mathfrak{P} n = (n a : b : m c) = (h k l).$$

3) Hemipyramiden der orthodiagonalen Reihen: Durch rationale Vervielfältigung der Symmetrieaxe bei primär bleibendem Verhältniss $a : c$ folgt die Reihe:

$$\pm \bar{P} n = (a : n b : c) = (h k h) \; {}_{(h > k)}$$

Ausgehend von einer beliebigen Hemipyramide $\pm m P$, die allgemeine Reihe:

$$\pm m \bar{P} n = (a : n b : m c) = (h k l).$$

Alle diese Reihen führen nun auf gewisse Grenzformen, welche entstehen, wenn m oder n oder beide die äussersten Werthe ∞ (oder 0) annehmen.

Wenn in der verticalen Reihe der Hemipyramiden der Coëfficient m einen sehr grossen Zahlenwerth besitzt, so hat die betreffende prismatische Form eine nahe verticale Stellung; ist $m = \infty$, so bildet sie ein wirkliches verticales Prisma, und zwar das primäre (in Fig. 450 die mit p bezeichnete Form). Dieses wird, da es zugleich die Grenzform der verticalen Reihe der positiven Hemipyramiden wie derjenigen der negativen ist, einfach mit $\infty P = (a : b : \infty c) = (1\,1\,0)$ bezeichnet. Denken wir uns die oben erwähnte Combination von $+ P$ und $- P$, so besitzt diese vier Combinationskanten, welche in der die Axen a und b enthaltenden Ebene liegen; diese vier Kanten werden durch das primäre Prisma vertical, d. h. nicht gerade, abgestumpft, da $+ P$ und $- P$ ja verschiedene Neigung gegen die Verticalaxe haben.

Da sich von jeder Hemipyramide der verticalen Reihe durch Vervielfältigung der Klinodiagonale um die Zahl n eine neue herleiten lässt, so bilden alle klinodiagonalen Hemipyramiden, sowohl die positiven als die negativen, deren n das gleiche ist, wiederum je eine verticale Ableitungsreihe; das gemeinschaftliche Grenzglied dieser beiden Reihen für den Fall

$m = \infty$ ist wieder ein verticales Prisma, welches aber vom einen schärferen Winkel hat als das primäre, und zwar um so mehr, je grösser n ist. Dieses Prisma wird bezeichnet

$$\infty P n = (na : b : \infty c) = (hk0) \quad {}_{(h<k)}$$

Solcher giebt es natürlich eine ganze Reihe mit verschiedenen n (n zwischen 1 und ∞), welche sämmtlich die seitlich gelegenen Kanten des primären Prismas zuschärfen.

In genau derselben Weise bilden alle abgeleiteten orthodiagonalen Hemipyramiden mit demselben n eine positive und eine negative verticale Ableitungsreihe, deren gemeinschaftliches Grenzglied, wenn $m = \infty$, ein abgeleitetes orthodiagonales Prisma von verticaler Stellung ist; von dieser Art giebt es verschiedene mit verschiedenen Werthen von n, deren vordere und hintere Kante um so stumpfer sind, je grösser n. Sie schärfen sämmtlich die vordere und die hintere Kante des primären Prismas ab und haben das Zeichen:

$$\infty P n = (a : nb : \infty c) = (hk0) \quad {}_{(h>k)}$$

Wie die verticalen Reihen stets zu den Prismen als Grenzformen führen, wenn $m = \infty$ wird, so müssen auch Endglieder der orthodiagonalen und klinodiagonalen Ableitungsreihen existiren, deren $n = \infty$ ist.

Betrachten wir zuerst eine klinodiagonale Reihe von Hemipyramiden, z. B. die primäre, so bilden die Flächen derselben offenbar um so spitzere Winkel mit der Klinodiagonale, je grösser der Coëfficient n ist. Erreicht dieser den Werth ∞, so sind die vier Flächen dieser Hemipyramide der Klinodiagonale parallel, und zwar entsteht genau dieselbe Grenzform, sei es, dass man von der positiven oder von der negativen Reihe ausgeht. Die entstehende prismatische Form entspricht den Domen des rhombischen Systems und wird daher K l i n o d o m a genannt. Das Endglied der von der primären (positiven oder negativen) Hemipyramide abgeleiteten klinodiagonalen Reihe ist d a s p r i m ä r e K l i n o d o m a (in Fig. 450 die mit q bezeichnete Form):

$$P \infty = (\infty a : b : c) = (011);$$

dasjenige einer Reihe von Hemipyramiden, deren m kleiner als 1 ist, ein flacheres Klinodoma, allgemein:

$$\frac{1}{m} P \infty = (\infty a : b : \frac{1}{m} c) = (0kl) \quad {}_{(k<l)},$$

welches die obere und die untere Kante des primären zuschärft. Endlich hat jede klinodiagonale Reihe, welche sich von einer spitzeren Hemipyramide ableitet, als letztes Glied ein schärferes Klinodoma:

$$m P \infty = (\infty a : b : mc) = (0kl) \quad {}_{(k>l)},$$

welches die seitlichen Kanten des primären zuschärft.

Gehen wir über zur Betrachtung der Grenzformen der makrodiagonalen Ableitungsreihen, so ist klar, dass wir uns derselben um so mehr nähern, je grösser der Coëfficient n, d. h. je grösser der Winkel ist, welchen die

Flächen der Hemipyramide mit der Symmetrieebene einschliessen. Ist $n = \infty$, so wird dieser Winkel $= 90^0$ (da die Flächen alsdann der Symmetrieaxe parallel, müssen sie zur Symmetrieebene normal sein); je zwei zu einander symmetrisch liegende Flächen fallen alsdann in eine Ebene, ebenso das Paar der beiden Gegenflächen, und aus der Hemipyramide wird ein Paar paralleler Flächen, welche zugleich der Symmetrieaxe parallel sind. Da das Verhältniss der Axen a und c in einer solchen Ableitungsreihe constant bleibt, so muss jene Grenzgestalt, deren $b = \infty$ ist, die vordere und hintere Kante der derselben Reihe angehörigen Hemipyramiden gerade abstumpfen. Eine derartige Ableitungsreihe positiver Hemipyramiden besitzt als Endglied, für den Fall $n = \infty$, ein Flächenpaar, dessen Lage am Krystall oben hinten und unten vorn ist; eine Reihe negativer Hemipyramiden ein solches, dessen Lage vorn oben und hinten unten ist. In Fig. 450 sind zwei solcher Flächenpaare, welche Hemidomen genannt werden, r und r', dargestellt, und zwar ist r dasjenige, welches die Kante der primären positiven Hemipyramide gerade abstumpft, also das primäre positive (oder hintere) Hemidoma:

$$+ P \infty = (a : \infty b : c) = (\bar{1} 0 1).$$

Das andere, r', ist ebenfalls positiv, da es oben hinten erscheint, aber sein Verhältniss $a : c$ ist offenbar ein anderes, seine Verticalaxe grösser ($= 2c$); ein derartiges spitzeres Hemidoma ist allgemein zu bezeichnen mit

$$+ mP \infty = (a : \infty b : mc) = (\bar{h} 0 l)_{(h > l)}.$$

Andererseits sind auch Hemidomen möglich, welche die Grenzglieder je einer Reihe von Hemipyramiden sind, deren Anfangsglied eine flachere Hemipyramide der Verticalreihe; deren Zeichen ist, wenn sie zu den hinteren gehören:

$$+ \frac{1}{m} P \infty = (a : \infty b : \frac{1}{m} c) = (\bar{h} 0 l)_{(h < l)}.$$

Hiernach verstehen sich die Zeichen der vorderen oder negativen Hemidomen, der Grenzformen der Reihen negativer Hemipyramiden, ganz von selbst; sie sind:

$$- \frac{1}{m} P \infty = (a' : \infty b : \frac{1}{m} c) = (h 0 l)_{(h < l)},$$
$$- P \infty = (a' : \infty b : c) = (1 0 1),$$
$$- m P \infty = (a' : \infty b : mc) = (h 0 l)_{(h > l)}.$$

Schliesslich bleibt es noch übrig, die drei möglichen Formen zu besprechen, welche je zweien Axen parallel sind, d. h. die drei Axenebenen selbst. Die wichtigste derselben, die Symmetrieebene, ist den Axen a und c parallel; wir können sie demnach auffassen als das Endglied der Reihe der abgeleiteten klinodiagonalen Prismen $\infty P n$, dessen $n = \infty$ geworden, welches sich daher in ein Flächenpaar verwandelt hat, und können es bezeichnen:

$$\infty P \infty = (\infty a : b : \infty c) = (0 1 0).$$

Zu derselben Bezeichnung gelangen wir auch, wenn wir es auffassen als Endglied der Reihe der Klinodomen $m P \infty$, welche sich demselben um so

mehr nähern, je grösser m wird. Dieses Flächenpaar wird nach Analogie des rhombischen Systems, wo die beiden verticalen Axenebenen nach der zweiten ihnen parallelen Axe benannt werden, auch als Klinopinakoid bezeichnet.

Dem entsprechend nennt man das der Orthodiagonale parallele Flächenpaar,

$$\infty P \infty = (a : \infty b : \infty c) = (1\,0\,0),$$

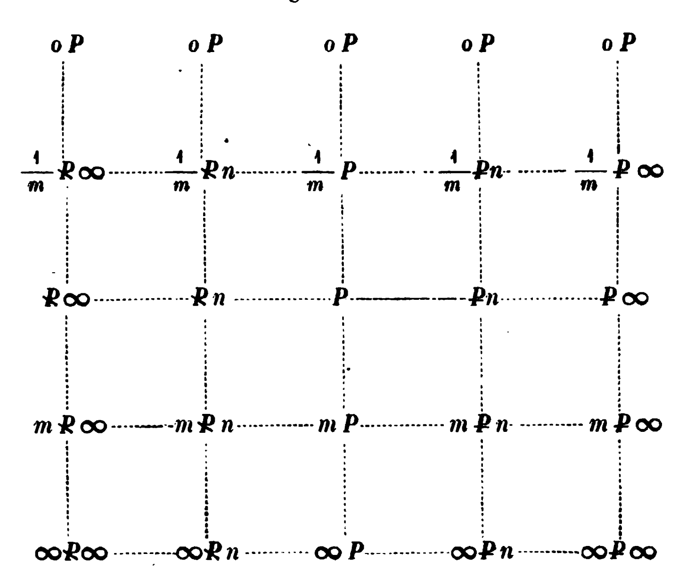
das Orthopinakoid. Es ist dies die Grenzform der orthodiagonalen Ableitungsreihe der verticalen Prismen $\infty P n$, deren Flächen normal zur Symmetrieebene, also zu je zwei zusammenfallen, wenn $n = \infty$ wird. Ebenso ist es das letzte Glied sowohl der positiven, als der negativen Reihe von Hemidomen, welche demselben sich um so mehr nähern, je grösser m wird.

Das dritte den Axen a und b parallele Flächenpaar nennt man, wie im rhombischen System, die Basis und bezeichnet sie

$$o P = (\infty a : \infty b : c) = (0\,0\,1).$$

Sie ist die untere Grenzform der verticalen Reihe der Hemipyramiden $\pm m P$, wenn $m = 0$ wird, ebenso diejenige der Klinodomen und der Hemidomen für denselben Werth von m.

Den Zusammenhang aller dieser Ableitungsreihen übersieht man am leichtesten durch ein Schema, welches genau dem des rhombischen Systems entspricht, indem alle durch punktirte Linien verbundene Reihen bei gleichem Vorzeichen zugleich krystallographische Zonen darstellen, und welches nunmehr keiner weiteren Erläuterung bedarf:



Alle diese Formen reduciren sich jedoch auf die in §. 92 als allein möglich erkannten drei Arten: 1) die Symmetrieebene $\infty P \infty$; 2) die

dazu normalen Flächenpaare, d. i. die Basis, das Orthopinakoid und die vorderen wie die hinteren Hemidomen; diese Formen, welche wir unter dem Namen Querflächen zusammenfassen wollen, unterscheiden sich in keiner Weise von einander, denn es steht ganz im Belieben des Beobachters, irgend welche dieser Flächenpaare zur Basis und zum Orthopinakoid zu wählen; 3) die prismatischen Formen, d. h. die Hemipyramiden, die verticalen Prismen und die Klinodomen, für welche das Gleiche gilt. Hätten wir z. B. den in Fig. 450 dargestellten Krystall so orientirt, dass c das Orthopinakoid, a die Basis geworden wäre, so würde das Prisma p zum Klinodoma, das Klinodoma q zum verticalen Prisma werden. Hätten wir dagegen etwa r zum Orthopinakoid, a zur Basis gewählt, so würde die bisherige Hemipyramide o zum verticalen Prisma, p zum Klinodoma, r' zum vorderen, c zum hinteren Hemidoma, q zur Hemipyramide werden. Von diesen verschiedenen Arten, den Krystall zu stellen, welche sich natürlich noch sehr vermehren liessen, hat keine in theoretischer Beziehung irgend einen Vorzug, und es sind lediglich praktische Fragen, welche für die eine oder andere den Ausschlag geben, so namentlich die möglichste Einfachheit der resultirenden Indices. Ferner empfiehlt es sich, nicht zwei Flächen zu oP und $\infty P\infty$ zu wählen, welche sich unter einem sehr stumpfen Winkel schneiden; bei dem hierdurch resultirenden sehr spitzen Axenwinkel β kommen nämlich ebene Dreiecke zur Berechnung, deren einer Winkel so spitz sein kann, dass das Verhältniss zweier Seiten mit geringerer Genauigkeit berechnet werden kann, da einer kleinen Winkeldifferenz alsdann eine grosse Längendifferenz in der gegenüberliegenden Seite entspricht.

Das Nähere über die möglichst bequeme Wahl der Axen eines monosymmetrischen Krystalls und die Berechnung der Elemente aus anderen Formen, als der primären Hemipyramide, z. B. aus Prismen und Klinodomen, wird in der III. Abth. durch einige Beispiele erläutert werden. Hier sei nur noch bemerkt, dass eine vollständige Bestimmung der Elemente nur möglich ist, wenn ausser zwei Flächenpaaren senkrecht zur Symmetrieebene (welche dann als oP und $\infty P\infty$ zu wählen sind) noch mindestens eine Hemipyramide vorhanden ist, oder statt dieser Formen zwei nicht in dieselbe Zone gehörige prismatische Gestalten, welche man dann am geeignetsten als ∞P und $P\infty$ auffasst. Zeigen die Krystalle einer zu untersuchenden Substanz dagegen z. B. nur eine prismatische Form und eine schiefe Endfläche (senkrecht zur Symmetrieebene), so können die Elemente nicht vollständig bestimmt werden; man nehme alsdann die erstere Form als ∞P, die letztere als oP, so ist zwar eine Berechnung des Axenwinkels β (der Neigung der Basis gegen die Prismenaxe) und des Verhältnisses der Axen a und b (der Diagonalen der Basisfläche) möglich, aber nicht eine solche der Länge c. Nur der Axenwinkel ist bestimmbar, wenn keine anderen Flächen vorkommen, als zwei sich schiefwinkelig durchschneidende Querflächen und die Symmetrieebene.

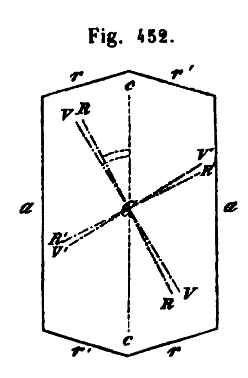
§. 95. Die physikalischen Eigenschaften der monosymmetrischen

Krystalle. Es wurde bereits in §. 92 bemerkt, dass noch keine directen Messungen des Elasticitätscoëfficienten nach verschiedenen Richtungen an Krystallen dieses Systems angestellt worden seien; indess ist auf die Art der Symmetrie, welche hierbei zur Geltung kommen muss, zu schliessen aus dem Verhalten der Krystalle in Bezug auf die mit der Elasticität in so innigem Zusammenhange stehende Cohäsion und Härte. Was die erstere betrifft, so hat dieselbe am häufigsten, wie schon §. 92 bemerkt, ein Minimum in der Richtung der Symmetrieaxe, es sind also zahlreiche monosymmetrische Krystalle spaltbar nach der Symmetrieebene, und zwar gehören hierher viele Fälle der vollkommensten Spaltbarkeit (Gyps). Weniger häufig ist eine solche nach einer Querfläche; alsdann liegt das Minimum der Cohäsion in der Symmetrieebene; giebt es in dieser noch eine zweite Minimalrichtung, so findet nach einer zweiten, krystallonomisch möglichen Querfläche Spaltbarkeit statt; da aber in der Symmetrieebene keine gleichwerthigen Richtungen existiren, so sind jene beiden Minimalrichtungen auch keine solchen, d. h. die Spaltbarkeit nach den beiden dazu normalen Ebenen ist nicht gleich vollkommen. Existirt endlich ein Minimum der Cohäsion nach einer Richtung, welche einen schiefen Winkel mit der Symmetrieebene bildet, so fordert das Grundgesetz der physikalischen Krystallographie ein genau gleichwerthiges Minimum in der zu jener symmetrischen Richtung; in diesem Falle ist der Krystall spaltbar nach einer prismatischen Form, und zwar nach beiden Flächenpaaren derselben in gleicher Vollkommenheit. Dieser Symmetrie entsprechen nun vollkommen die Verschiedenheiten der Härte nach verschiedenen Richtungen, für welche genauere Bestimmungen namentlich in dem bereits mehrfach citirten Werke von Exner enthalten sind; sie betreffen folgende Körper: Gyps, rothes Blutlaugensalz, das analog zusammengesetzte Cobaltidcyankalium und Rohrzucker. Bei allen diesen hat sich ergeben, dass in der Symmetrieebene gleichwerthige Richtungen nicht existiren, so dass die auf $\infty R \infty$ erhaltene Härtecurve nach keiner Richtung in symmetrische Hälften zerfällt. Untersucht man dagegen die Härte auf einer Querfläche, so zeigt sich dieselbe gleich jedesmal in zwei Richtungen, welche gleichen Winkel mit der Symmetrieebene einschliessen, d. h. die Härtecurve ist symmetrisch zu zwei auf einander normalen Richtungen, die eine parallel der Symmetrieaxe, die andere der Symmetrieebene, in diesen beiden aber ungleich. Hieraus ersieht man also, dass die Cohäsion sich nur nach der geometrischen Symmetrieebene symmetrisch ändert mit der Richtung im Krystall.

Gehen wir nunmehr über zu den optischen Eigenschaften der monosymmetrischen Krystalle, so folgen dieselben unmittelbar aus dem §. 92 bewiesenen Umstand, dass eine Hauptschwingungsrichtung für alle Farben zusammenfällt mit der Symmetrieaxe, die beiden anderen, dispergirt für die verschiedenen Farben, in der Symmetrieebene liegen. Da die Lage der letzteren jedoch im Uebrigen eine bestimmte Beziehung zu der Krystallform nicht besitzt, so ist zur Bestimmung der optischen Constanten für eine ge-

wisse Farbe die Messung des Winkels nöthig, welchen eine optische Elasticitätsaxe oder Schwingungsrichtung für dieselbe Farbe bildet mit irgend einer ebenfalls in der Symmetrieebene liegenden Kante. Hierzu nimmt man gewöhnlich die zur Verticalaxe *c* gewählte Kante. Kennt man den Winkel einer Hauptschwingungsrichtung mit dieser, so ist auch die Richtung der zweiten in der Symmetrieebene liegenden Elasticitätsaxe gegeben, denn sie ist normal zur ersten; die dritte aber ist zu beiden senkrecht und parallel der Symmetrieaxe; durch die Bestimmung jenes Winkels ist somit die Richtung aller drei optischen Elasticitätsaxen für die betreffende Farbe krystallographisch bestimmt. Betrachten wir einen nach der Symmetrieebene tafelförmigen Krystall im parallelen polarisirten Lichte, so durchsetzen ihn die Strahlen in der Symmetrieaxe, also sind ihre Schwingungsrichtungen beim Austritt genau die beiden der Ebene $\infty \mathfrak{P} \infty$ parallelen Hauptschwingungsrichtungen; beim Drehen wird die Platte also jedesmal dunkel werden (vier mal bei einer ganzen Drehung), wenn diese beiden Richtungen den Polarisationsebenen der gekreuzten Nicols parallel sind. Denken wir uns z. B. einen solchen Krystall (in Fig. 452 auf die Symmetrieebene projicirt dargestellt), welcher ausser von $\infty \mathfrak{P} \infty$ noch von drei Querflächen *a*, *r*, *r'* begrenzt ist, wobei, wie es zuweilen vorkommt, *r* und *r'* nahe symmetrisch zu *a* liegen (Winkel *a* : *r* nahe gleich *a* : *r'*), so steht dieser Krystall einem rhombischen in geometrischer Beziehung sehr nahe, ja er kann sogar durch eine Temperaturänderung vorübergehend genau die Gestalt eines solchen annehmen, da die Winkel *a* : *r* und *a* : *r'* eine ungleiche Aenderung durch die Wärme erfahren. Von einem wirklichen rhombischen Krystall können wir einen solchen nun sofort dadurch unterscheiden*), dass bei jenem die beiden der Tafelebene parallelen Hauptschwingungsrichtungen genau parallel und normal zur Fläche *a*, und zwar identisch für alle Farben, bei einem in Wahrheit monosymmetrischen Krystall dagegen schief gegen die Fläche *a* liegen und für die verschiedenen Farben nicht zusammenfallen (*RR* in Fig. 452 sei z. B. die eine Hauptschwingungsrichtung für Roth, *R'R'* die andere; *VV* und *V'V'* die entsprechenden für Violett). Meist ist der Winkel der Dispersion (zwischen *RR* und *VV*) nur klein, selten über 2°.

Fig. 452.



Stellt man einen rhombischen Krystall so auf dem Polarisationsinstrument (für paralleles Licht) ein, dass die Verticalaxe *cc* Fig. 452 genau einem der gekreuzten Nicols parallel ist, so erscheint er sowohl im weissen, wie im monochromatischen Licht vollkommen dunkel. Nicht so der monosymmetrische Krystall, welchen

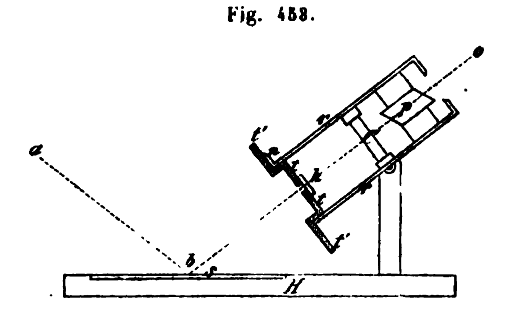
*) Falls dies nicht etwa schon durch eine Spaltbarkeit, entweder nach *r* oder nach *r'* allein, möglich ist, welche natürlich eine Ungleichwerthigkeit dieser beiden Querflächen beweisen würde.

die genannte Figur eigentlich darstellt; bei diesem bedarf es einer Drehung um den Winkel RCc bei Beleuchtung mit rothem Licht, einer solchen um den Winkel VCc bei Beleuchtung mit violettem einfarbigen Lichte, um ihn dunkel erscheinen zu lassen. Ist der drehbare Krystallträger des Instrumentes mit einer Kreistheilung versehen, so kann man jene Drehung messen und kennt dadurch den Winkel, welcher nach Obigem genügt, um die Lage aller drei Elasticitätsaxen, einmal für Roth, das andere Mal für Violett, zu bestimmen. Da jedoch das Eintreten der Dunkelheit bei einem doppeltbrechenden Krystall während des Drehens allmählig geschieht, so ist die Einstellung auf das Maximum derselben nur angenähert, im günstigsten Falle auf 2—3° genau, möglich; man wird auf diese Weise allerdings in allen Fällen, wo nicht etwa zufällig der Winkel RCc kleiner als 2—3° ist, den monosymmetrischen Krystall durch das Vorhandensein der Schiefe der Auslöschungsrichtung gegen die Verticalaxe von einem rhombischen unterscheiden können, aber doch nur eine sehr ungenaue Bestimmung der Richtung der Elasticitätsaxen erhalten, meistens auch nicht bestimmen können, in welcher Weise dieselben für die verschiedenen Farben dispergirt sind, da deren Differenzen gewöhnlich weniger betragen, als der mögliche Fehler der Messung.

Um nun den Winkel, welchen eine Auslöschungsrichtung mit einer Krystallkante bildet, genauer zu bestimmen, bedient man sich eines besonderen, von v. Kobell erfundenen Instrumentes, des Stauroskops. Dasselbe ist ein Polarisationsapparat für paralleles Licht, wie er Fig. 51 S. 57 abgebildet ist, dessen Krystallträger durch eine undurchsichtige drehbare Metallplatte ersetzt ist, welche in der Mitte eine kleine kreisrunde Oeffnung hat. Auf dieser Platte sind eine Anzahl paralleler Geraden so eingeritzt, dass ihre Richtung genau parallel ist der Polarisationsrichtung des unteren Nicols, wenn die Kreistheilung am Rande dieser Metallscheibe auf 0° steht. An dem ursprünglichen Kobell'schen Instrument, Fig. 453 im Durchschnitt dargestellt, ist der Polarisator durch einen horizontalen Spiegel s von schwarzem Glase ersetzt, welcher das vom Himmel in der Richtung ab auffallende Licht, ziemlich vollkommen polarisirt, nach o hin reflectirt. Auf der Holzplatte H, in welche dieser Spiegel eingelassen ist, steht auf einem Fusse drehbar das Rohr r, welches vorn einen kleinen Nonius n trägt; in das vordere Ende dieses Rohres kann der Krystallträger t, welcher am Rande t' an der dem Auge (o) zugekehrten Seite eine Kreistheilung besitzt, eingesteckt und darin gedreht werden. Der mit t bezeichnete vorspringende Theil desselben ist die oben bezeichnete, in der Mitte durchbohrte Metallplatte mit den eingerissenen Linien. Vor dem Einstecken wird nun der zu untersuchende Krystall k auf derselben so aufgeklebt, dass er mit seiner Symmetrieebene die Oeffnung ganz bedeckt, und dass seine Verticalaxe (in Fig. 452 also die Kante der Querfläche a mit $\infty R\infty$, d. h. cc) den eingeritzten Linien so genau als möglich parallel ist. Im Innern des Rohres ist ferner eine senkrecht zur Axe geschnittene Kalkspathplatte C befestigt, und

am Ende der analysirende Nicol *p*. Stellt man nun den drehbaren Krystallträger *t* so, dass der Nonius *n* auf demselben 0⁰ anzeigt, so ist die Verticalaxe *cc* des Krystalls parallel der Schwingungsrichtung des oberen Nicols, also normal zu der des eintretenden Lichtes. Wäre nun *cc* zugleich eine Hauptschwingungsrichtung des Krystalls, also auch deren Normale eine solche, d. h. wäre der Krystall **rhombisch**, so könnten die eintretenden Strahlen eine weitere Zerlegung nicht erleiden, sondern würden nach dem Durchgang durch den Krystall noch dieselbe Polarisation besitzen, wie beim Eintritt; sie gehen dann durch den Kalkspath und endlich durch den Analysator; da nicht nur parallele, sondern auch etwas geneigte Strahlen durch das Instrument gelangen, so würde man von der Interferenzfigur des Kalkspathes den mittleren Theil, das schwarze Kreuz und die innersten Farbenringe, erblicken, ebenso, als wenn gar kein Krystall auf dem Träger *t* befestigt wäre. Nun ist aber der Krystall monosymmetrisch, d. h. die Schwingungsrichtungen desselben bilden einen mehr oder weniger grossen Winkel mit der Richtung *cc*; folglich erleidet das eintretende Licht eine Zerlegung im Krystall, von den beiden entstehenden senkrecht zu einander polarisirten Strahlen geht jedesmal nur ein Antheil durch den oberen Nicol; dieser Antheil würde, wenn er allein im eintretenden Licht vorhanden wäre, im Kalkspath das supplementäre Interferenzbild mit hellem Kreuz erzeugen; der im oberen Nicol vernichtete Antheil für sich allein dasjenige mit schwarzem Kreuz; es kann also ebenso wenig, als wenn der Kalkspath durch gewöhnliches Licht erleuchtet worden wäre (vergl. S. 57), ein Interferenzbild entstehen. Drehen wir aber nun den Krystallträger mit dem Krystall, so wird es eine Stellung geben, bei der das schwarze Kreuz mit den Farbenringen wieder sichtbar wird (daher der Name »Stauroskop«), dies ist offenbar diejenige, in welcher eine Schwingungsrichtung des Krystalls parallel der Schwingungsrichtung des eintretenden Lichtes; der Winkel, um welchen man gedreht hat, ist demnach die gesuchte Schiefe der Auslöschungsrichtung gegen die Verticalaxe *cc*, falls man nach rechts gedreht hatte, im entgegengesetzten Falle das Complement des zu bestimmenden Winkels. Die Einstellung auf den Punkt, an welchem das Interferenzbild der Kalkspathplatte am deutlichsten erscheint, ist genauer auszuführen, als diejenige auf die grösste Dunkelheit des Krystalls, namentlich, wenn man das Instrument mit monochromatischem Licht beleuchtet, und man wird, wenn die Dispersion eine ziemlich grosse ist, hierdurch auch constatiren können, dass die Hauptschwingungsrichtungen für die ver-

Fig. 458.



schiedenen Farben divergiren. Eine grössere Genauigkeit, als etwa bis auf 1°, ist indess auch hierbei nicht zu erzielen, und es ist daher von Březina (s. Schrauf, physikal. Mineralogie, II, S. 220) statt der einfachen Kalkspathplatte eine Doppelplatte angewendet worden, welche aus zwei ein wenig schief gegen die Basis geschliffenen Kalkspathlamellén besteht, welche so aufeinander gelegt werden, dass die optischen Axen beider in einer Ebene, aber nach entgegengesetzter Seite geneigt sind. Diese Combination zeigt zwischen gekreuzten Nicols das Interferenzbild Fig. 454, sobald die Ebene, in welcher die optischen Axen der beiden Kalkspathe liegen, der Schwingungsebene eines Nicols parallel ist; wird nun die Polarisation des eintretenden Lichtes nur wenig geändert, wird z. B. ein eingefügter stauroskopisch zu untersuchender Krystall, welcher diejenige Stellung hat, dass eine Schwingungsrichtung desselben parallel der eines Nicols, um einen sehr kleinen Winkel gedreht, so bewegt sich der Mittelbalken aus seiner verticalen Stellung, und das Bild erscheint wie Fig. 455.

Fig. 454.

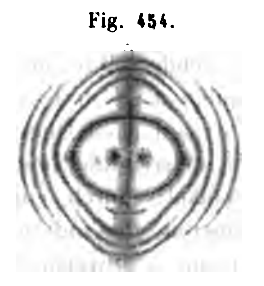
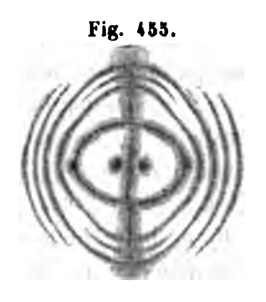


Fig. 455.



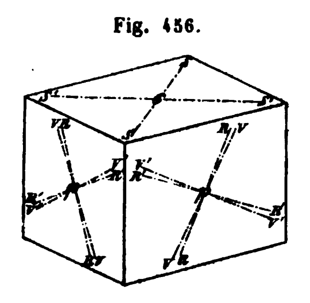
Die Stellung des drehbaren Krystalls, in welcher seine Schwingungsrichtung die erforderliche Richtung hat, in welcher also der Mittelbalken genau so erscheint, wie in Fig. 454, lässt sich namentlich dann mit grosser Schärfe ermitteln, wenn man zweimal die Kreistheilung des Krystallträgers abliest, einmal, wenn der dunkle Mittelbalken ein wenig links, einmal wenn er ebenso viel nach rechts gedreht erscheint, und das Mittel beider Ablesungen als Normalstellung annimmt. Mit Hülfe dieser Doppelplatte kann man mit dem Stauroskop die Lage der Hauptschwingungsrichtung bis auf wenige Minuten genau bestimmen, wobei man sich selbstverständlich des einfarbigen Lichtes bedienen muss. Dabei hat man jedoch noch einen Fehler in Rücksicht zu ziehen, welcher dadurch hervorgebracht wird, dass man die als Ausgangsrichtung dienende Kante des Krystalls nach dem Augenmaass nicht genau parallel den auf dem Krystallträger eingeritzten Linien machen kann, wenn man den Krystall auf diesen aufklebt. Aber nur, wenn dieser Parallelismus vollkommen erreicht ist, wird die Drehung von der Nullstellung bis zu der, bei welcher das Interferenzbild in der richtigen Weise auftritt, genau gleich dem Winkel zwischen der Schwingungsrichtung und der Verticalaxe des Krystalls sein. Wir werden in der III. Abth. eine Methode kennen lernen, durch welche auch dieser Fehler vermieden wird, und es demnach möglich ist, die Lage der optischen Elasticitätsaxen in einem Krystall mit grosser Genauigkeit zu bestimmen.

Während nach dem Bisherigen die monosymmetrischen Krystalle, im parallelen Licht durch die Symmetrieebene betrachtet, Auslöschungsrichtungen

zeigten, welche in keiner gesetzmässigen Beziehung zu den Krystallkanten stehen, verhalten sie sich anders, wenn wir sie durch eine Querfläche betrachten. Alsdann pflanzen sich die parallelen Strahlen in denselben in einer Richtung fort, welche der krystallographischen Symmetrieebene, also einem optischen Hauptschnitte, parallel ist; von den beiden durch die Doppelbrechung entstehenden Strahlen muss somit der eine in dem Hauptschnitt, der andere senkrecht dazu schwingen, und dies gilt für alle Farben; der Krystall wird folglich jedesmal dunkel erscheinen, wenn seine Symmetrieaxe parallel der Schwingungsrichtung des einen der beiden gekreuzten Nicols ist.

Werde z. B. der in Fig. 450 abgebildete Krystall so auf den Träger des Polarisationsinstrumentes mit parallelem Licht gebracht, dass die Strahlen durch die Flächen *a* hindurchgehen, so sind die Schwingungsrichtungen (welche nicht dispergirt sind, sondern für alle Farben zusammenfallen) für diese Flächen parallel den Kanten *a* : *p* und *a* : *c*, die des Flächenpaares *c* parallel *c* : *q* und *c* : *a* u. s. w. auf allen Querflächen. Durch die Fläche *b* betrachtet, bildet jede Schwingungsrichtung mit der Kante *b* : *p* (der Verticalaxe) einen bestimmten Winkel; durch ein prismatisches Flächenpaar, z. B. *p*, betrachtet, einen kleineren, der um so mehr sich der Null nähert, je weniger *p* in seiner Lage von *a* abweicht. Die Schwingungsrichtungen für eine Platte, welche von einem Paar paralleler prismatischer Flächen gebildet wird, sind für die verschiedenen Farben ebenfalls dispergirt, aber um so weniger, je spitzer der Winkel ist, den die Flächen mit $\infty R \infty$ bilden. Wegen der Symmetrie nach letzterer Fläche muss das zugehörige andere Flächenpaar absolut gleiche Lage und gleiche Dispersion der Schwingungsrichtungen zeigen. Liege z. B. die Combination Fig. 456 vor, welche fast genau einem Rhomboëder gleicht (unter Umständen kann die Differenz der Winkel *c* : *p* und *p* : *p* einmal so gering sein, dass sie durch Messung nicht zu constatiren), und wollen wir die Querfläche *c* zur Basis, *p* zum verticalen Prisma nehmen, so ist die Deutung des Krystalls nur dann richtig, wenn auf jener Querfläche die Schwingungsrichtungen, *SS* und *S'S'*, keine Dispersion zeigen und genau den Diagonalen parallel sind, wenn sie dagegen auf beiden Prismenflächen unsymmetrisch liegen und verschieden für Roth (*RR* und *R'R'*) und Violett (*VV* und *V'V'*), wobei aber ihre Lage und Dispersion auf beiden genau gleich und entgegengesetzt ist, wie es aus Fig. 456 ersichtlich. Zeigt ein derartiger Krystall dieses Verhalten, wenn man ihn nach allen drei Paaren paralleler Flächen im Stauroscop untersucht, so ist damit sein monosymmetrischer Charakter, sowie die Lage seiner geometrischen Symmetrieebene ohne Krystallmessung ganz unzweifelhaft dargethan.

Fig. 456.

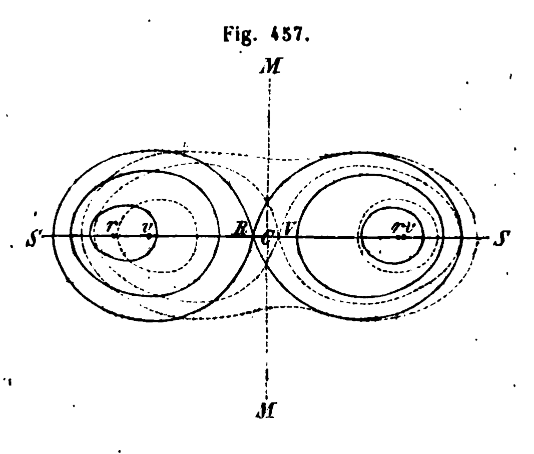


Nachdem so das Verhalten der monosymmetrischen Krystalle im parallelen

polarisirten Licht für alle Fälle allgemein erkannt ist, können wir zu demjenigen in convergentem Licht übergehen, wobei es sich wesentlich nur um die Erscheinungen handelt, welche eine senkrecht zur ersten Mittellinie geschnittene Platte zeigt. Diese sind nun verschieden, je nach der Lage der optischen Axenebene, welche nach §. 92 entweder parallel der geometrischen Symmetrieebene, oder senkrecht dazu sein kann.

Sind die beiden in der Symmetrieebene liegenden Hauptschwingungsrichtungen die Axen der grössten und kleinsten Elasticität, d. h. ist $\infty R \infty$ die optische Axenebene, so hat man nach Ermittelung jener Richtungen durch das Stauroskop senkrecht zu beiden (zugleich normal zur Symmetrieebene) Querflächen anzuschleifen; diejenige der beiden Platten, welche senkrecht zur Halbirenden des spitzen Axenwinkels geschliffen ist, wird alsdann im Polarisationsapparat beide Axen in der Symmetrieebene liegend zeigen. Da aber die Mittellinien für die verschiedenen Farben dispergirt sind, fällt die Normale der Platte mit der Mittellinie nur für eine bestimmte Wellenlänge des Lichtes zusammen. Sei der Punkt im Gesichtsfeld des Polarisationsinstrumentes, wo die normal die Platte durchsetzenden Strahlen sich vereinigen, also der Mittelpunkt desselben, *C* Fig. 457, und mag deren Richtung der ersten Mittellinie für eine mittlere Farbe entsprechen, so ist die der Mittellinie für Roth nach der einen Seite, der für Violett nach der anderen geneigt, alle aber liegen in der Symmetrieebene, welche durch die Gerade *SS* angedeutet ist. Sei nun *R* der Punkt im Gesichtsfeld, wo sich alle Strahlen vereinigen, welche parallel der ersten Mittellinie für Roth durch die Krystallplatte gingen, und *rr* die beiden Axenpunkte für dieselbe Farbe, so stellen die ausgezogenen Lemniscaten diejenigen vor, welche auftreten, wenn das Instrument mit Licht von dieser Farbe erleuchtet wird. Ist *V* der Vereinigungspunkt der Strahlen, welche parallel der ersten Mittellinie für Violett durch den Krystall gingen, sind *vv* die Axenpunkte derselben Farbe, deren Axenwinkel natürlich ein anderer (in der Figur ist $\varrho > v$ angenommen), so sind die punktirten Lemniscaten diejenigen, welche im homogenen violetten Lichte erscheinen. Beobachtet man nun das Interferenzbild im weissen Licht, so geht aus Fig. 457 unmittelbar hervor, dass dasselbe zwar symmetrisch nach der Geraden *SS*, also oben und unten gleich sein muss, in keinem Falle aber nach der Geraden *MM*. Während das Axenbild einer rhombischen Krystallplatte (vergl. Fig. 78, S. 95) auch rechts und links symmetrisch ist, hört

Fig. 457.



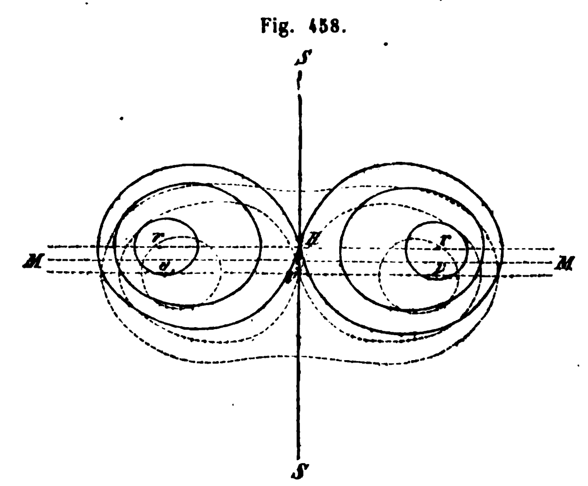
durch die Dispersion der Mittellinien hier die letztere Gleichheit auf, die Curven sind rechts und links in verschiedener Weise übereinander geschoben, es kann also die Farbenvertheilung in den Ringen rechts und links nicht gleich sein; in Folge dessen werden die Ringe beider Systeme verschieden gross und verschieden lebhaft gefärbt erscheinen, und die Reihenfolge der Farben in beiden eine andere sein; alles dies um so mehr abweichend, je grösser die Dispersion der Mittellinien ist. Wird der Krystall so gedreht, dass seine Symmetrieebene der Schwingungsrichtung eines der beiden Nicol'schen Prismen parallel ist, so erscheint der schwarze, der optischen Axenebene parallele Balken ($\parallel SS$), wie bei einem rhombischen Krystall, ohne Farbensäume, da die optischen Axen**ebenen** für alle Farben untereinander und mit der Symmetrieebene zusammenfallen. Die Interferenzerscheinung, welche eine Platte von Gyps bei dieser Stellung darbietet, ist auf Taf. I, Fig. 6 abgebildet, und ist auf dieser Figur der, namentlich für die innersten Farbenringe hervortretende Unterschied der beiden Systeme deutlich zu erkennen. Dreht man die Platte um 45°, so dass die dunkeln Hyperbeln erscheinen, so tritt die Verschiedenheit noch mehr hervor; denn da wegen der Dispersion der Mittellinien die Punkte r und v (Fig. 457) rechts und links verschiedenen Abstand besitzen, so müssen die Farbensäume, welche die dunklen Hyperbeln zu beiden Seiten zeigen und die bekanntlich innerhalb des ersten Ringes am deutlichsten sind, bei beiden Hyperbeln von verschiedener Breite und verschiedener Lebhaftigkeit sein. Ist die Dispersion der Mittellinien gross und ebenso auch diejenige der Axen, d. h. ist der Axenwinkel sehr verschieden für Roth und Violett, welcher Fall in Fig. 457 realisirt ist, so liegt auf der einen Seite der Axenpunkt r für Roth innen, der für Violett v aussen, auf der andern Seite r aussen, v innen; da ferner die Abstände beider rechts und links sehr verschieden sind, so würde die linke Hyperbel innen roth, aussen blau, und zwar sehr breit, gesäumt erscheinen, während die rechte nur schmale Farbensäume, und zwar innen blau und aussen roth, zeigen würde. Wäre die Dispersion der Mittellinien etwas geringer, so würden die Axenpunkte für die verschiedenen Farben auf einer Seite fast ganz zusammenfallen; alsdann würde man in dem Interferenzbild statt zweier entgegengesetzt gefärbter Hyperbeln eine mit deutlichem Farbensaume und die andere ohne solchen erblicken. Bei einer kleineren Dispersion jedoch, wie sie häufiger vorkommt, ist zwar der Abstand von r und v rechts und links verschieden, diese liegen aber nicht umgekehrt, sondern entweder beide v aussen, oder beide nach innen. Alsdann erscheinen beide Hyperbeln nach aussen roth, nach innen blau gesäumt, oder umgekehrt, — aber mit verschiedener Farbennuance und verschiedener Lebhaftigkeit der Färbung. Diesen letzteren Fall stellt Fig. 7, Taf. I dar, welche sich auf dieselbe Gypsplatte wie Fig. 6 bezieht, nach einer Drehung von 45°. Man achte hierbei ausser auf die Verschiedenheit der beiden Hyperbelsäume, namentlich auf diejenige der inneren Seite des ersten Ringes rechts und links. Diese Art der Dispersion

der Farben des Axenbildes wird, weil sie durch eine ungleiche **Neigung** der Hauptschwingungsrichtungen innerhalb der Symmetrieebene erzeugt wird, die **geneigte Dispersion** (»dispersion inclinée« Des Cloizeaux's) genannt.

Ist dagegen die optische Axenebene senkrecht zur geometrischen Symmetrieebene, so sind die Interferenzerscheinungen einer senkrecht zur Mittellinie geschliffenen Platte verschieden, je nachdem diese Mittellinie in der Symmetrieebene liegt oder zu derselben normal ist.

Im ersteren Falle, wo eine der beiden in der Symmetrieebene liegenden Hauptschwingungsrichtungen den spitzen Winkel der Axen halbirt, ist die zu jener normale Fläche, nach welcher die Krystallplatte geschliffen werden muss, demnach wiederum eine Querfläche, senkrecht zur Symmetrieebene, also parallel der Symmetrieaxe, d. i. der zweiten Mittellinie. Da die Hauptschwingungsrichtungen in $\infty R \infty$ dispergirt sind, so ist die Platte senkrecht zu einer solchen für mittlere Farben zu schleifen. Sei nun Fig. 458 *C* wieder Mittelpunkt des Gesichtsfeldes im Apparat, d. h. der Vereinigungspunkt aller Strahlen, welche senkrecht durch die Krystallplatte hindurchgehen, so ist deren Richtung gleich der Mittellinie nur für eine mittlere Wellenlänge; diejenigen für andere Farben liegen anders geneigt in der Symmetrieebene, welche durch die Gerade *SS* gehen soll. Sei nun *R* der Punkt, in welchem sich alle Strahlen vereinigen, die im Krystall parallel der Mittellinie für Roth laufen, und *rr* die Axenpunkte für dieselbe Farbe, so muss die Verbindungslinie *rr* normal zu *SS* und von dieser halbirt sein, da *MM* als Symmetrieaxe die Richtung der zweiten Mittellinie vorstellt. Für Violett muss der Punkt, in welchem sich die der Mittellinie parallelen Strahlen kreuzen, jenseits *C*, also etwa in *V* liegen, und die Axenpunkte *vv* ebenfalls rechts und links symmetrisch zu *SS*, aber in anderem Abstande, da der Axenwinkel für diese Farbe ein anderer als für Roth. Die optischen Axen

Fig. 458.



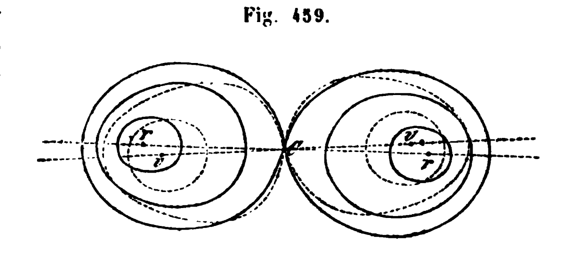
für Roth und Violett liegen also in zwei verschiedenen Ebenen, die der übrigen Farben in zwischenliegenden; alle diese Ebenen schneiden sich jedoch in der Symmetrieaxe, der allen gemeinschaftlichen zweiten Mittellinie. Es ist nun leicht aus Fig. 458 zu ersehen, wie die Interferenzfigur im weissen Licht aussehen muss; dieselbe wird vollkommen symmetrisch sein in Bezug auf die Gerade *SS*, indem die rechte und linke Seite ganz

gleiche und entgegengesetzte Farbenvertheilung besitzen wird. Nicht so die obere und untere Hälfte, da die Ringe für die verschiedenen Farben nicht gleichmässig zu beiden Seiten von *MM* liegen; die Farbenringe werden somit an ihrer oberen und unteren Seite verschiedene Farben zeigen. Sind die optischen Axenebenen des Krystalls parallel einem der beiden gekreuzten Nicols des Apparates, so wird sich die Verschiedenheit derselben für die verschiedenen Farben am deutlichsten documentiren an dem dunklen Mittelbalken, welcher die Lage der Axenebene angiebt, und nun, da diese nicht dieselbe ist für alle Farben, oben und unten einen farbigen Saum zeigt, entweder, wie in dem in Fig. 458 dargestellten Falle, oben blau (weil daselbst der schwarze Balken für rothes Licht gelegen ist) und unten roth, oder umgekehrt. Dieser farbige Saum bei der erwähnten Stellung des Krystalls ist das empfindlichste Mittel, um diese Dispersion zu erkennen, welche man, weil bei derselben die Farbenvertheilung auf den verschiedenen Horizontallinien eine abweichende ist, die horizontale (»dispersion horizontale« Des Cloizeaux's) genannt hat. Fig. 8, Taf. I stellt das Interferenzbild eines Feldspathkrystalls in der Stellung dar, in welcher seine Axenebenen einem Nicol parallel sind, in welcher also die farbigen Säume zu sehen sind, Fig. 9 denselben, wenn seine Axenebene 45° mit den Nicols bildet.

Der zweite Fall, der möglich ist, wenn die optische Axenebene senkrecht zur Symmetrieebene steht, ist der, dass die eine in letzterer Ebene liegende Hauptschwingungsrichtung die zweite Mittellinie und die Normale derselben, die Orthodiagonale, die erste ist. Da letztere als Symmetrieaxe allen Farben als Mittellinie gemeinsam ist, die erstere aber dispergirt, so sind die Axenebenen für verschiedene Wellenlängen zwar verschieden, schneiden sich jedoch alle in der Halbirenden des spitzen Axenwinkels; die zu dieser normale Fläche, das Klinopinakoid, ist also senkrecht auf der ersten Mittellinie für alle Farben. Wenn an einem derartigen Krystall die Symmetrieebene vorherrschend ausgebildet ist, so bietet er unmittelbar die gewünschte Platte dar, andernfalls ist jene Ebene anzuschleifen. Werde dieselbe nun auf den Objectträger des Polarisationsinstrumentes mit jener Fläche aufgelegt, so sei in Fig 459 wieder *C* der Mittelpunkt des Gesichtsfeldes; dieser entspricht der ersten Mittellinie für alle Farben. Seien *rr* ferner die Axenpunkte für Roth, die ausgezogenen Curven die Lemniscaten für diese Farbe, so bezeichnet die Gerade *rr* die Lage der Axenebene für Roth. Für eine andere Farbe, z. B. Violett, ist zwar die erste Mittellinie dieselbe, aber die zweite nimmt in der Symmetrieebene eine andere Lage ein, also ist die optische Axenebene für diese eine andere, um einen gewissen Winkel um *C* gedrehte; ihre Lage sei durch die Gerade *vv* repräsentirt, die beiden Punkte *vv* seien die Axenpunkte und die punktirten Curven die Lemniscaten für Violett. Die Axenebenen für die mittleren Farben liegen natürlich zwischen *rr* und *vv*. Hieraus geht hervor, dass das Axenbild nur in monochromatischem Licht eine Symmetrie zeigen kann, in weissem Licht dagegen nach

keiner Richtung; vielmehr ist rechts und links die Farbenvertheilung verschieden, ebenso oben und unten; sie muss aber gleich sein rechts unten mit links oben, sowie rechts oben mit links unten. Da die Axenebenen alle um C gedreht sind, so muss der schwarze Mittelbalken bei paralleler Stellung mit einem Nicol auch hier farbig gesäumt erscheinen, aber rechts und links verschieden, also entweder rechts oben und links unten roth und links oben und rechts unten blau, oder umgekehrt. Diese kreuzweise übereinstimmende Färbung des Mittelbalkens lässt diese Dispersion, welche man die gekreuzte (»dispersion croisée ou tournante« Des Cloizeaux's) nennt, am leichtesten erkennen. Die in dieser Stellung von einer Boraxplatte hervorgebrachte Interferenzerscheinung zeigt Fig. 10, Taf. I, während Fig. 11 diejenige nach einer Drehung der Platte um 45° ist.

Fig. 459.



Wenn der optische Axenwinkel eines Krystalls so wenig von 90° verschieden und seine Brechungsindices so klein wären, dass man die Axen sowohl durch eine Platte senkrecht zur ersten, als durch eine senkrecht zur zweiten Mittellinie, noch sehen könnte, so ist es klar, dass die eine dieser Platten die Erscheinung der horizontalen, die andere die der gekreuzten Dispersion zeigen würde, wenn die Axenebenen derselben senkrecht zur Symmetrieebene stehen. Eigentlich sind also die beiden letzterwähnten Arten der Dispersion an solchen Krystallen stets vereinigt, nur dass man meist wegen des zu grossen stumpfen Axenwinkels nur die eine derselben beobachten kann.

Diese Dispersionserscheinungen sind nun deshalb von besonderer praktischer Bedeutung, weil sie ein sehr empfindliches Mittel zur Erkennung der Dispersion der Mittellinien darbieten. Da eine solche im rhombischen System nicht existirt, so leuchtet ein, dass die so einfache Beobachtung einer solchen dazu dienen kann, einen Krystall als einen zur monosymmetrischen Abtheilung gehörigen zu erkennen, wenn etwa seine Krystallform derjenigen eines rhombischen geometrisch sehr nahe steht, wie dies zuweilen vorkommt. In der That hat man für eine Reihe von Substanzen, deren Krystalle derart beschaffen und nicht sehr genau messbar waren, die vorhandenen Winkeldifferenzen für Ungenauigkeit der Messung gehalten und dieselben als rhombisch krystallisirend angenommen, bis man das Vorhandensein einer monosymmetrischen Dispersion und durch Revision der Messungen alsdann auch die Form als eine monosymmetrische erkannte. Um die Verbesserung derartiger Irrthümer bei verschiedenen Mineralien hat sich namentlich A. Des Cloizeaux in höchstem Grade verdient gemacht.

Unter den thermischen Eigenschaften sind es zunächst diejenigen der

Wärmeleitung, welche unter Umständen eine praktische Bedeutung erlangen können, namentlich zur Unterscheidung monosymmetrischer Krystalle von rhombischen, wenn dieselben undurchsichtig sind, daher die optischen Methoden keine Anwendung finden können. Es handelt sich hierbei hauptsächlich um die Ermittelung der Richtungen der grössten, mittleren und kleinsten Leitungsfähigkeit des Krystalls für die Wärme; aus dem Grundgesetz S. 177 folgt, dass eine dieser drei Richtungen stets mit der Symmetrieaxe zusammenfällt, die beiden andern demnach irgend eine Lage in der Symmetrieebene einnehmen, welche keine gesetzmässige Beziehung weder zu den Krystallkanten, noch etwa zu den optischen Hauptschwingungsrichtungen darbieten; auf einander stehen die beiden letztern senkrecht. Ihre Lage wird ermittelt durch das Sénarmont'sche Experiment (S. 131), indem man dieses auf dem Klinopinakoid in Anwendung bringt; es zeigt sich als Schmelzfigur eine schief gegen die Kante der Platte stehende Ellipse, deren grosse und kleine Axe die gesuchten Richtungen sind. Auch auf den prismatischen Flächen stehen die Axen der isothermen Curven schief gegen die Kanten, dagegen auf den Querflächen ist die eine horizontal, die andere vertical, d. h. die erstere parallel der Symmetrieaxe, die letztere parallel der Symmetrieebene. Die Lage der grossen und kleinen Axe der bei diesem Versuch entstehenden Ellipse auf den verschiedenen Flächen ist folglich das vollkommene Analogon der Schwingungsrichtungen des Lichtes.

Von noch grösserer Wichtigkeit ist das Verhalten der monosymmetrischen Krystalle in Bezug auf die Ausdehnung durch die Wärme. Es wurde bereits in §. 92 dargethan, dass von den auf einander senkrechten Richtungen der grössten, mittleren und kleinsten Ausdehnung stets eine mit der Symmetrieaxe zusammenfallen, folglich die beiden andern der Symmetrieebene parallel sein müssten. Die Art und Weise, wie sich die verschiedenen Kantenwinkel eines monosymmetrischen Krystalls mit seiner Temperatur ändern, ergiebt sich nun unmittelbar aus den Sätzen über die Winkeländerung zweiaxiger Krystalle S. 141. Das Klinopinakoid ist ein thermischer Hauptschnitt; alle Querflächen stehen dazu normal, sie sind einer thermischen Axe parallel; folglich bleiben sie nach S. 141 bei allen Temperaturen normal zur Symmetrieebene; es ändert sich jedoch ihre gegenseitige Neigung, da keine derselben einem thermischen Hauptschnitt parallel ist. Eine beliebige der Querflächen wählt man bekanntlich zum Orthopinakoid, eine andere zur Basis, und da der Winkel, unter welchem diese sich schneiden, mit der Temperatur variabel ist, so folgt hieraus, dass von den drei Axenwinkeln α, β, γ eines Krystalls zwar α und γ (= 90°) Constante, β aber eine Function der Temperatur ist.

Die prismatischen Formen sind keiner thermischen Axe parallel, ihre Neigungen müssen sich somit nach S. 141 ändern, sowohl gegen die Symmetrieebene, als auch gegen sämmtliche Querflächen. Da aber zwei zu einander symmetrisch liegende Flächen, z. B. die rechte und die linke Fläche eines vertical gestellten Prismas, gleichgeneigt sind gegen die drei ther-

mischen Axen, so müssen die entsprechenden Winkel beider mit jenen Axen gleichartig variiren. Man denke sich zu der Fläche MNO Fig. 407, S. 141, diejenige hinzu, welche in Bezug auf einen thermischen Hauptschnitt zu ihr symmetrisch liegt, so hat man den in Rede stehenden Fall; denn zwei Flächen einer prismatischen Form sind zu einander symmetrisch in Bezug auf ∞ ℛ ∞, d. i. auf einen thermischen Hauptschnitt. Die Parameter der Fläche MNO, aufgetragen auf die thermischen Axen, waren m, n, o, diejenigen der symmetrischen Fläche müssen die gleichen sein, und da ihre Richtungen dieselben sind, sich mit der Temperatur um gleich viel ändern. Es sind somit $m\,(1+\beta)$, $n\,(1+\gamma)$, $o\,(1+\alpha)$ die Parameter sowohl der ersten, als der zweiten Fläche nach einer Temperaturerhöhung um 100^0, d. h. die beiden Flächen sind auch dann noch symmetrisch zu einander in Bezug auf den thermischen Hauptschnitt, in Bezug auf welchen sie es vorher waren. Da dies für eine beliebige prismatische Form gilt, so folgt allgemein: alle prismatischen Formen ändern ihre Neigung gegen die Symmetrieebene und gegen die Querflächen, bleiben aber stets symmetrisch gegen das Klinopinakoid, welche Temperatur auch der Krystall habe. Der Winkel derselben wird demnach stets von ∞ℛ∞ halbirt, und da alle Querflächen normal zu dieser bleiben, wenn der Krystall gleichmässig erwärmt oder abgekühlt wird, so ist hierdurch bewiesen, dass die Symmetrie eines monosymmetrischen Krystalles in Bezug auf jene ausgezeichnete Ebene, welche wir Klinopinakoid nannten, von seiner Temperatur völlig unabhängig ist.

Wir haben S. 388, Fig. 452, einen Krystall betrachtet, dessen Querflächen r und r' sehr nahe symmetrisch zu a lagen und daher fast ein rhombisches Prisma bildeten. Nach dem Vorhergehenden müssen die beiden sehr ähnlichen Winkel $a:r$ und $a:r'$ sich in verschiedener Weise beim Erwärmen ändern, ihre Differenz wird also entweder grösser oder kleiner werden. In letzterem Falle wird es also eine Temperatur geben, bei der sie genau gleich sind; dadurch ist nun zwar a in geometrischer Beziehung eine Symmetrieebene geworden, aber nicht in physikalischer, denn die Hauptschwingungsrichtungen des Lichtes sind derselben keineswegs nunmehr parallel, auch verliert sich der Charakter der geometrischen Symmetrieebene, sobald die Temperatur variirt. Demnach ist der Krystall durch jene Winkeländerung kein rhombischer geworden, denn zu dessen Wesen gehört, wie wir sahen, die physikalische Symmetrie nach drei auf einander senkrechten Ebenen und die Bewahrung dieser Symmetrie für alle Wärmegrade des Krystalls.

Da eine gleichmässige Temperaturerhöhung des Krystalls niemals seine Symmetrie aufhebt, so müssen auch alle durch dieselbe hervorgebrachten Aenderungen der optischen Eigenschaften innerhalb der Grenzen bleiben, welche durch jene Symmetrie gezogen sind. Die eine der drei Hauptschwingungsrichtungen muss stets der Axe b parallel sein, die beiden andern

dem Klinopinakoid; aber der Winkel, welchen diese beiden mit irgend einer prismatischen Kante bilden, wird variiren mit der Temperatur. Diese Variation ist indess stets so klein, dass sie erst bei erheblichen Temperaturunterschieden messbar wird. Weit grösser ist gewöhnlich diejenige des Winkels der optischen Axen, hervorgebracht durch eine ungleiche Aenderung der drei Hauptbrechungsindices. Hierbei sind drei Fälle zu unterscheiden: Ist die Symmetrieaxe die erste Mittellinie, so bleibt sie es nach Obigem auch beim Erwärmen; die optischen Axen mögen sich also dabei von ihr entfernen oder sich ihr nähern, jedenfalls müssen dies beide um gleich viel thun, ihre Bewegung eine genau gleiche und entgegengesetzte sein. Da aber zugleich die zweite Mittellinie ihre Richtung ändert, so wird dies eine Drehung der Axenebene um die erste Mittellinie zur Folge haben. Ist dagegen eine der beiden der Symmetrieebene parallelen Hauptschwingungsrichtungen die Halbirende des spitzen Axenwinkels, und ist die Ebene der optischen Axen normal zum Klinopinakoid, so müssen zwar auch, wenn der Axenwinkel beim Erwärmen kleiner wird, beide Axen sich um gleich viel der Symmetrieebene nähern, es wird sich jedoch die Ebene derselben um die Orthodiagonale drehen, indem die erste Mittellinie innerhalb der Symmetrieebene ihre Richtung ändert; dies giebt im Gesichtsfeld des Polarisationsapparates eine Parallelverschiebung der Axenebene. Ist endlich die Ebene der optischen Axen die Symmetrieebene selbst, so variirt die Lage der Mittellinie mit der Temperatur innerhalb der Axenebene. Wird z. B. der Axenwinkel beim Erwärmen kleiner und bewegt sich dabei die Mittellinie nach rechts, so muss offenbar die links gelegene Axe sich schneller nach der Normalen zur Platte hin bewegen, als die rechte, um stets gleich weit von der Mittellinie entfernt zu bleiben. Am besten kann man diese Erscheinung beobachten am Gyps, dessen Axenwinkel derart mit der Temperatur variirt, dass er für blaues Licht schon etwa bei 100° Null ist und bei weiterer Temperaturerhöhung die Axen in der zur Symmetrieebene normalen Ebene auseinandergehen. Erwärmt man eine senkrecht zur ersten Mittellinie für mittlere Farben geschnittene Gypsplatte in einem mit dem Polarisationsinstrument verbundenen Apparate, welcher in der III. Abtheilung beschrieben werden soll, bis auf 100°, so beobachtet man deutlich, dass die eine Axe sich der Mitte des Gesichtsfeldes weit schneller nähert, als die andere, so dass sie schliesslich an einem Punkte zusammenkommen, der von der Mitte nicht unbeträchtlich abweicht (s. u. Gyps im folgenden §).

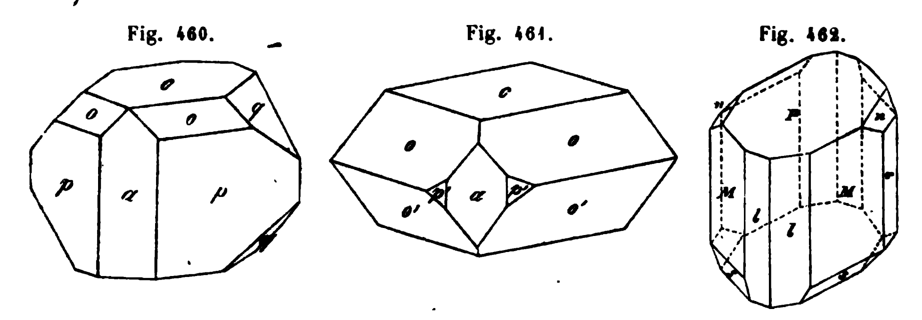
§. 96. **Beispiele:***) β-Schwefel $= S$, aus dem geschmolzenen Zustande erstarrt. $a : b : c = 0,9958 : 1 : 0,9998$, $\beta = 84^0\, 14'$. Combination Fig. 460: $p = \infty P$, $a = \infty \not{P} \infty$, $c = o P$, $o = - P$ (Abstumpfung

*) Bei den folgenden Beispielen sind die Resultate der optischen Untersuchung, soweit solche bis jetzt vorliegen, aufgenommen; sehr oft ist nun von dem Beobachter die Dispersion der Hauptschwingungsrichtungen nicht bestimmt, sondern nur ihre Lage für mittlere Farben gemessen worden; alsdann ist im Folgenden nur eine Zahl hierfür angegeben.

der stumpfen Kanten p': c), $q = \mathit{P}\infty$ (das Zeichen ergiebt sich aus den Zonen qcq und aoq).

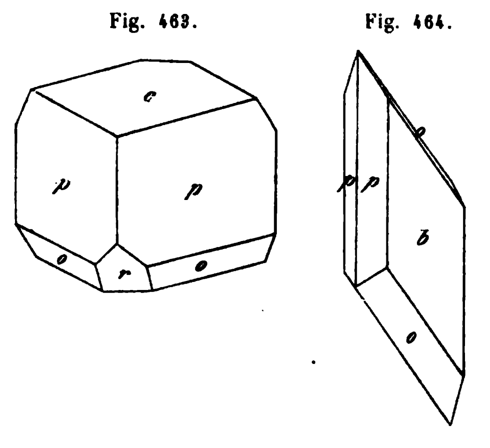
Selen = *Se*. a : : c = 1,6208 : 1 : 1,6003, $\beta = 75^0\, 54'$. Combination Fig. 461: $c = oP$, $a = \infty \mathit{P} \infty$, $o = -P$, $o' = +P$ (dass die vordere und hintere Hemipyramide die gleichen Indices haben, geht aus der Zone oao' hervor), $p' = \infty \mathit{P} 2$.

Arsensulfür (nat. Realgar) = *AsS*. $a : b : c$ = 1,4403 : 1 : 0,9729, $\beta = 66^0\, 5'$. Combination Fig. 462: $M = \infty P$, $l = \infty \mathit{P} 2$, $P = oP$,



$n = \mathit{P}\infty$, $r = \infty \mathit{P} \infty$, $s = +P$. Spaltbar nach $\infty \mathit{P} \infty$. Optische Axenebene = Symmetrieebene, die erste Mittellinie liegt im stumpfen Winkel der Krystallaxen a und c und bildet mit ersterer 103^0, mit letzterer 11^0; Doppelbrechung —, stark; $2H = 96^0\, 20'$ roth, $= 92^0\, 58'$ gelb, also starke Dispersion; die der Mittellinien (geneigte) ebenfalls stark (Des Cloizeaux, Nouv. Rech. 166).

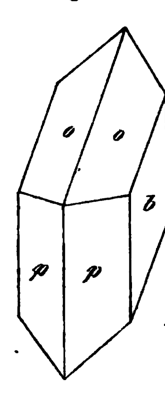
Chlorsaures Kalium = $KClO^3$. $a : b : c$ = 0,8256 : 1 : 1,2236, $\beta = 70^0\, 4'$. Combination Fig. 463: $c = oP$, $p = \infty P$, $o = +P$, $r = +\mathit{P}\infty$ (gerade Abstumpfung der Kante der Hemipyramide). Spaltbarkeit nach ∞P. Optische Axenebene $\perp \infty \mathit{P} \infty$; $2E = 28^0$ ungefähr.



Kohlensaures Natrium (Soda) = $Na^2CO^3 + 10H^2O$. $a : b : c$ = 1,4186 : 1 : 1,4828, $\beta = 57^0\, 40'$. Combin. Fig. 464: $p = \infty P$, $b = \infty \mathit{P} \infty$, $o = +P$, tafelartig nach der Symmetrieebene. Spaltbarkeit nach $\infty \mathit{P} \infty$. Optische Axenebene senkrecht zur Symmetrieebene, liegt im stumpfen Winkel der Axen und bildet mit a 22^0, mit c 100^0; Axe b ist erste Mittellinie, Doppelbrechung —; $2E = 69^0$ ungefähr; schwache gekreuzte Dispersion.

Schwefelsaures Calcium (Gyps) $= CaSO^4 + 2H^2O$. $a:b:c = 0,6891 : 1 : 0,4156$, $\beta = 81^0\ 5'$. Combination Fig. 465: $p = \infty P$, $b = \infty \mathcal{P} \infty$, $o = -P$. Spaltbarkeit $\infty \mathcal{P} \infty$ sehr vollkommen, $+P$ deutlich, $\infty P \infty$ unvollkommen. Optische Axenebene bei gewöhnlicher Temperatur parallel der Symmetrieebene, mit starker geneigter Dispersion; bei 9^0 C. liegt die erste Mittellinie im stumpfen Winkel der Axen und macht mit a $23^0\ 43'$, dabei ist $2V = 61^0\ 24'$. Beim Erwärmen nähert sich diejenige Axe, welche weitere Ringe und an der Hyperbel aussen Violett, innen Blau hat, weit schneller der Mitte des Gesichtsfeldes, als die andere, deren Hyperbelsäume aussen roth, innen blaugrün sind. Des Cloizeaux fand für rothes Licht

Fig. 465.

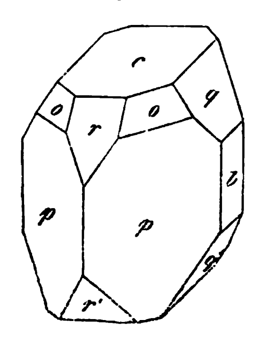


$2E = 75^0\ 58'$ bei 47^0 Cels.
59 19 - 71,5 -
39 1 - 95,5 -
0 116 -

Bei letzterer Temperatur waren die Axen für Blau schon merklich getrennt in der zu $\infty \mathcal{P} \infty$ normalen Ebene: bei etwas höherer Wärme liegen alle Axen in Ebenen, senkrecht zur Symmetrieebene, ihre horizontale Dispersion ist jedoch gering. Zwischen 20^0 und 95^0 dreht sich eine Axe (für Roth), nach der Mitte zu um $33^0\ 55'$, die andere um $22^0\ 38'$, folglich ändert die Mittellinie ihre Lage um $5^0 38'$. Doppelbrechung —. Die thermische Ausdehnung des Gypses ist mit der Richtung beträchtlich verschieden, daher die Winkeländerungen beim Erwärmen nicht unbedeutend; nach Mitscherlich's Messungen (bei 100^0 C.) werden die Axen a und c im Verhältniss zu b kleiner, und ebenso nimmt die Axenschiefe β ab (vergl. Grailich und von Lang, Sitz.-Ber. d. Wien. Akad. 33. Bd. 382).

Schwefelsaures Eisen (Eisenvitriol) $= FeSO^4 + 7H^2O$. $a:b:c = 1,1704 : 1 : 1,5312$, $\beta = 76^0\ 33'$. Combination Fig. 466: $p = \infty P$, $c = oP$ (manchmal nur diese beiden, eine rhomboëderähnliche Form bildend), $r = -\mathcal{P}\infty$, $r' = +\mathcal{P}\infty$, $o = -P$ (Zonen oro und cop), $q = \mathcal{R}\infty$, $b = \infty\mathcal{R}\infty$. Spaltbarkeit oP vollkommen, ∞P unvollkommen. Optische Axenebene $\infty \mathcal{P} \infty$, Doppelbrechung +; erste Mittellinie im spitzen Axenwinkel macht mit c $62^0\ 28'$ und divergirt für verschiedene Farben nur einige Minuten. Hauptbrechungsquotienten:

Fig. 466.



	α	β	γ
für *Li*-Linie:	1,4681	1,4748	1,4824
- *Na* - :	1,4713	1,4782	1,4856
Blaues Glas:	1,4794	1,4861	1,4928

Direct bestimmt durch Messung des spitzen und stumpfen Winkels in Oel:

Roth: $2V = 85^0\ 31'$
Gelb: 85 27
Grün: 85 23

(Erofejeff, Sitz.-Ber. d. Wiener Akad. 56. Bd. II, 63). Sehr ähnliche Werthe fand Des Cloizeaux (Nouv. Rech. 173).

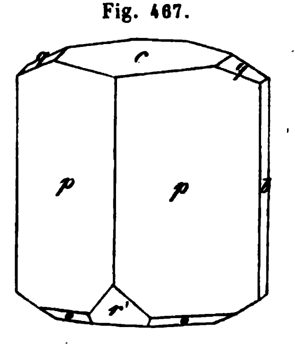
Schwefelsaures Kalium-Magnesium $= K^2SO^4 + MgSO^4 + 6H^2O$. $a : b : c = 0{,}7420 : 1 : 0{,}5003$, $\beta = 75^0\ 5'$. Combination Fig. 467: $p = \infty P$, $c = oP$, $q = \mathcal{P}\infty$, $o = +P$, $r' = +2\mathcal{P}\infty$, $b = \infty\mathcal{P}\infty$. Optische Axenebene $\infty\mathcal{P}\infty$, Doppelbrechung $+$, schwach; die erste Mittellinie im stumpfen Axenwinkel, von a nur circa 1^0 abweichend (für Roth weniger als für Blau). Mittlerer Brechungsexponent:

$\beta = 1{,}468$ roth
1,470 gelb
1,476 blau.

$2V = 48^0\ 21'$, Dispersion $\varrho > v$. (Murmann und Rotter, Sitzungsber. d. Wiener Akad. 34. Bd. 144).

Schwefelsaures Ammonium-Magnesium $= (NH^4)^2SO^4 + MgSO^4 + 6H^2O$. $a : b : c = 0{,}7376 : 1 : 0{,}4891$, $\beta = 72^0\ 54'$. Combination gleich der vorigen. Optische Axenebene $\infty\mathcal{P}\infty$, Doppelbrechung $+$, schwach; erste Mittellinie im stumpfen Axenwinkel, bildet mit a 5^0

Fig. 467.



β		$2V$	
$\beta = 1{,}4677$	$2V = 50^0\ 27'$	roth
1,4737	50 14	gelb
1,4787	49 47	grün
1,4846	48 54	violett

(Heusser, Poggend. Ann. d. Physik, 91. Bd. Murmann und Rotter, l. c.). Ueber die analog zusammengesetzten Salze:

$$(NH^4)^2SO^4 + MnSO^4 + 6H^2O$$
$$K^2SO^4 + FeSO^4 + 6H^2O$$
$$(NH^4)^2SO^4 + FeSO^4 + 6H^2O$$
$$K^2SO^4 + NiSO^4 + 6H^2O$$
$$(NH^4)^2SO^4 + NiSO^4 + 6H^2O$$
$$K^2SO^4 + CoSO^4 + 6H^2O$$
$$(NH^4)^2SO^4 + CoSO^4 + 6H^2O$$
$$K^2SO^4 + ZnSO^4 + 6H^2O$$
$$(NH^4)^2SO^4 + ZnSO^4 + 6H^2O$$
$$K^2SO^4 + CuSO^4 + 6H^2O$$
$$(NH^4)^2SO^4 + CuSO^4 + 6H^2O,$$

welche sämmtlich gleiche Krystallform und sehr ähnliche optische Eigenschaften haben, s. Murmann und Rotter, Sitz.-Ber. der Wiener Akad. 34. Bd. S. 148—172.

Phosphorsaures Ammonium-Natrium (Phosphorsalz) $= (NH^4)NaHPO^4 + 4H^2O$. $a : b : c = 2,8828 : 1 : 1,8616$, $\beta = 80^0 42'$. Combination Fig. 468: $p = \infty P$, $a = \infty \bar{P} \infty$, $c = oP$, $-r = -\bar{P}\infty$, $-r' = -2\bar{P}\infty$, $r = +\bar{P}\infty$, $r' = +2\bar{P}\infty$.

Borax $= Na^2B^4O^7 + 10H^2O$. $a : b : c = 1,0997 : 1 : 0,5394$, $\beta = 73^0 25'$. Combination Fig. 469: $p = \infty P$, $a = \infty\bar{P}\infty$, $b = \infty \bar{P}\infty$, $c = oP$, $o = +P$, $o' = +2P$. Optische Axenebene normal zu $\infty \bar{P} \infty$, Doppelbrechung —; Symmetrieaxe ist erste Mittellinie, die zweite liegt im spitzen Winkel der Axen und bildet mit c 55⁰ 33′ für Roth, 54⁰ 45′ für Grün, daher die sehr deutliche gekreuzte Dispersion, welche auf Taf. 1, Fig. 10 und 11 dargestellt ist; die zweite Mittellinie und somit die Axenebene für jede Farbe dreht sich beim Erwärmen von 21⁰ auf 86⁰ Celsius um 3½⁰. Optische Constanten:

	α	β	γ	$2V$	$2E$*)
Für *Li*-Linie:	1,4442	1,4657	1,4686	39⁰ 52′	59⁰ 53′
- *Na*- - :	1,4468	1,4686	1,4715	— 36	— 23
- blaues Glas:	1,4535	1,4756	1,4785	— 22	

(Tschermak, Sitz.-Ber. d. Wiener Akad. 57. Bd. II, 641)

Fig. 468.

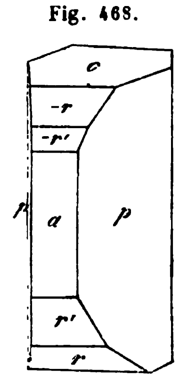


Fig. 469.

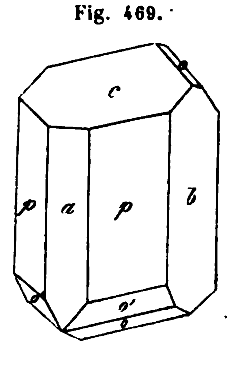
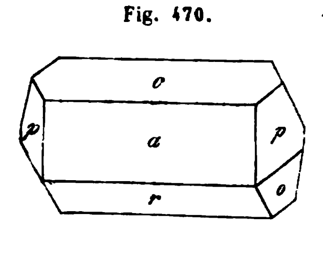


Fig. 470.



Natürl. Epidot $= H^2Ca^4Al^6Si^6O^{26}$. $a : b : c = 1,5807 : 1 : 1,8057$, $\beta = 64^0 36'$. Combination Fig. 470: $a = \infty \bar{P} \infty$, $c = oP$, $r = +\bar{P}\infty$, $p = \infty P$, $o = +P$; stets nach der Symmetrieaxe prismatisch verlängert und gewöhnlich nur an einem Ende ausgebildet. Spaltbarkeit oP vollkommen, $\infty \bar{P} \infty$ deutlich. Optische Axenebene $\infty \bar{P} \infty$, Doppelbrechung —; erste Mittellinie, bei der gewählten Stellung fast vertical, liegt im spitzen Winkel und bildet mit c 2⁰ 56′ für Roth, 2⁰ 26′ für Grün, daher deutliche geneigte Dispersion;

$2V = 73^0 36'$ $\beta = 1,7541$ Roth
— 26 1,7570 Gelb
— 13 1,7621 Grün
$\alpha = 1,7305$, $\gamma = 1,7677$ roth.

*) Direct bestimmt.

(Klein, n. Jahrb. f. Mineralogie, 1874). Der optische Axenwinkel ändert sich wenig mit der Temperatur.

Nat. Augit = Mischung von $(MgFe)CaSi^2O^6$ und $MgAl^2SiO^6$. $a : b : c = 1,058 : 1 : 0,594$, $\beta = 89^0\ 38'$. Combination Fig. 471: $a = \infty \bar{P} \infty$, $p = \infty P$, $b = \infty \not{P} \infty$, $o = -\frac{1}{2} P$. Optische Axen in der Symmetrie-ebene, Doppelbrechung +, stark. Bei den verschiedenen Mischungen, welche die Varietäten dieses Minerals bilden, macht die erste Mittellinie (im stumpfen Axenwinkel) mit c Winkel von 39^0 bis $54'$, der wahre Axenwinkel $2V = 61^0$—68^0; $\beta = 1,70$ ungefähr. Meist dunkelbraun durchsichtig mit mässigem Pleochroismus.

Fig. 471.

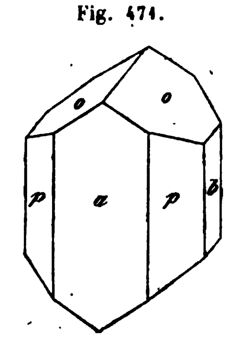
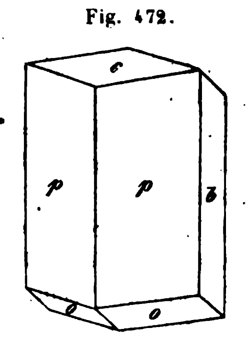


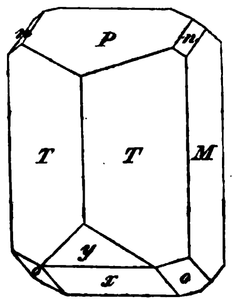
Fig. 472.



Nat. Hornblende, chemische Zusammensetzung gleich Augit. $a : b : c = 0,5318 : 1 : 0,2936$, $\beta = 75^0\ 2'$. Combination Fig. 472: $p = \infty P$, $b = \infty \not{P} \infty$, $c = o P$, $o = + P$. Spaltbarkeit nach ∞P. Optische Axenebene $\infty \not{P} \infty$, Doppelbrechung —; erste Mittellinie im spitzen Axenwinkel macht mit c 1^0—18^0; $2V = 80^0$—85^0; $\beta = 1,64$ ungefähr. Starker Pleochroismus, meist ist die Körperfarbe für die Schwingungsrichtung parallel der Axe der grössten Elasticität grün, die parallel der kleinsten braun; doch giebt es Varietäten, deren drei Axenfarben den grössten überhaupt vorkommenden Unterschied zeigen, sie sind nämlich: dunkelblau, violett und gelbgrün.

Nat. Kalifeldspath = $K^2Al^2Si^6O^{16}$. $a : b : c = 0,6585 : 1 : 0,5554$, $\beta = 63^0\ 57'$. Combination Fig. 473: $T = \infty P$, $M = \infty \not{P} \infty$, $P = o P$, $n = \not{P} \infty$, $o = + P$, $x = + \bar{P} \infty$, $y = + 2 \bar{P} \infty$. Spaltbarkeit nach $o P$ vollkommen, $\infty \not{P} \infty$ ziemlich vollkommen. Die optischen Eigenschaften dieses Minerals variiren sehr, zum Theil in Folge chemischer Differenzen (Vertretung von K durch Na), besonders aber durch innere Spannungen, da sich meist verschiedene Stellen eines und desselben Krystalls abweichend verhalten. Doppelbrechung —; erste Mittellinie im stumpfen Axenwinkel, schliesst mit c 111^0—112^0 ein; optische Axenebene meist normal zu $\infty \not{P} \infty$, alsdann stets deutliche horizontale Dispersion (in Fig. 8 und 9, Taf. I dargestellt); Axenwinkel sehr verschieden, zuweilen so klein, dass für eine Farbe die Axen zusammenfallen und für einen Theil

Fig. 473.



der Farben in $\infty \not{P} \infty$ aus einander gehen; für einzelne Varietäten liegen die Axen aller Farben in der Symmetrieebene. Beispiele:

Feldspath vom St. Gotthard, dessen optische Axenebene senkrecht zu $\infty \not{P} \infty$, mit grossem Axenwinkel, für Gelb:

$\alpha = 1{,}5190$, $\beta = 1{,}5237$, $\gamma = 1{,}5260$. $2V = 69^0\,43'$, $2E = 121^0\,6'$.

Feldspath (natronreich) von Wehr, dessen Axenebene für Roth normal zu $\infty \not{P} \infty$, für Blau diesem parallel; für Roth:

$\alpha = 1{,}5170$, $\beta = 1{,}5239$, $\gamma = 1{,}5240$. $2V = 13^0\,34'$, $2E = 20^0\,45'$,
für Blau:

$\alpha = 1{,}5265$, $\gamma = 1{,}5356$, $\beta = 1{,}5355$. $2V = 11^0\,51'$, $2E = 18^0\,14'$.
Durch Erhöhung der Temperatur findet eine Abnahme des Winkels der Axen, wenn ihre Ebene normal zu $\infty \not{P} \infty$, und eine Zunahme statt, wenn sie in $\infty \not{P} \infty$ liegen; wird die Platte über 500^0 erhitzt, so kehren die Axen nach dem Erkalten nicht ganz in ihre frühere Lage zurück (Des Cloizeaux, Man. d. Min. I, 330—335).

Essigsaures Natrium $= Na\,C^2H^3O^2 + 3\,H^2O$. $a:b:c = 1{,}1852:1:0{,}9964$, $\beta = 68^0\,16'$. Combination Fig. 474: $p = \infty P$, $a = \infty \bar{P} \infty$, $b = \infty \not{P} \infty$, $c = o\,P$, $o = +P$, $r' = +2\bar{P}\infty$. Spaltbarkeit nach ∞P und $o\,P$. Optische Axenebene senkrecht zu $\infty \not{P} \infty$,

Fig. 474.

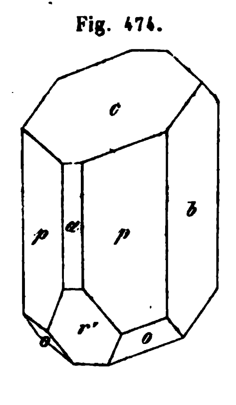


Fig. 475.

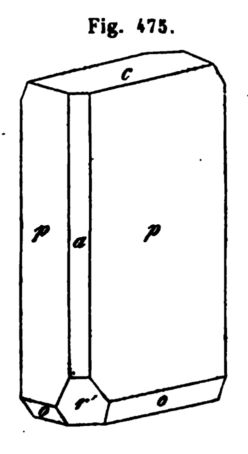
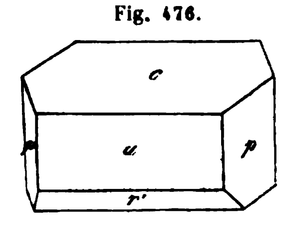


Fig. 476.



erste Mittellinie im spitzen Axenwinkel, mit c 55^0; $2E = 99^0\,11'$ roth, $101^0\,50'$ violett; horizontale Dispersion kaum bemerkbar.

Essigsaures Kupfer (Grünspan) $= Cu(C^2H^3O^2)^2 + H^2O$. $a:b:c = 1{,}5320:1:0{,}8108$, $\beta = 63^0\,34'$. Combination Fig. 475: $p = \infty P$, $c = o\,P$, $a = \infty \bar{P} \infty$, $o = +P$, $r' = +2\bar{P}\infty$. Spaltbarkeit nach $o\,P$ und ∞P. Starker Pleochroismus (spangrün bis dunkelblau).

Essigsaures Blei (Bleizucker) $= Pb\,(C^2H^3O^2)^2 + 3\,H^2O$. $a:b:c = 2{,}1791:1:2{,}4790$, $\beta = 70^0 42'$. Combination Fig. 476: $a = \infty \bar{P} \infty$, $c = o\,P$, $r' = +\bar{P}\infty$, $p = \infty P$. Spaltbarkeit nach $\infty \bar{P} \infty$ und $o\,P$. Optische Axenebene $\infty \not{P} \infty$; Doppelbrechung $+$; erste Mittellinie (für die

verschiedenen Farben nur wenige Min. abweichend), im stumpfen Winkel, bildet mit c 55° 18′.

$$2V = 83° 27' \qquad \beta = 1,570 \text{ roth}$$
$$83\ 55 \qquad 1,576 \text{ gelb}$$
$$87\ 24 \qquad 1,584 \text{ blau}$$

(Des Cloizeaux, Nouv. Rech. 111).

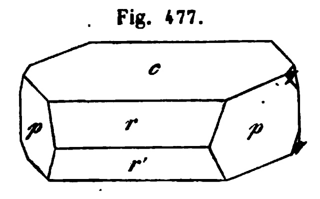


Fig. 477.

Oxalsäure $= H^2C^2O^4 + 2H^2O$. $a : b : c = 1,6949 : 1 : 3,3360$, $\beta = 73° 48'$. Combination Fig. 477: $c = oP$, $p = \infty P$, $r = -\mathrm{P}\infty$, $r' = +\mathrm{P}\infty$, $q = \mathrm{R}\infty$. Spaltbarkeit nach ∞P. Optische Axenebene normal zu $\infty\mathrm{R}\infty$ und fast genau senkrecht zu oP; erste Mittellinie $\parallel b$, zweite Mittellinie im spitzen Winkel gegen c 14° 43′ (roth), 14° 56′ (blau) geneigt;

$$2E = 117° 16' \text{ roth}, \quad 118° 33' \text{ blau}.$$

Saures oxalsaures Kalium (Kleesalz) $= KHC^2O^4 + H^2O$. $a : b : c = 0,3360 : 1 : 0,8011$, $\beta = 46° 31'$. Combination Fig. 478: $p = \infty P$, $a = \infty\mathrm{P}\infty$, $b = \infty\mathrm{R}\infty$, $c = oP$, $q = \mathrm{R}\infty$, $q' = 2\mathrm{R}\infty$, $r' = +\frac{1}{2}\mathrm{P}\infty$, $o = +P$, $o' = +2\mathrm{R}2$ (Zone $o'ooo'$). Spaltbarkeit nach $\infty\mathrm{P}\infty$ vollkommen, $\infty\mathrm{R}\infty$ deutlich.

Salicylsäure: $C^7H^6O^3$. $a : b : c = 1,3631 : 1 : 0,4344$, $\beta = 49° 3'$. Combination Fig. 479: $p = \infty P$, $a = \infty\mathrm{P}\infty$, $c = oP$, $q = \mathrm{R}\infty$, $o = +P$.

Chinon $= C^6H^4O^2$. $a : b : c = 1,0325 : 1 : 1,7100$, $\beta = 79° 0'$.

Fig. 478.

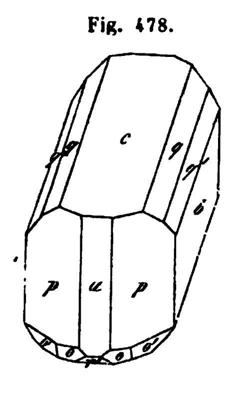
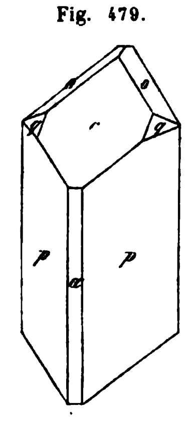


Fig. 479.



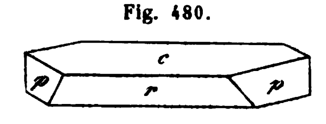


Fig. 480.

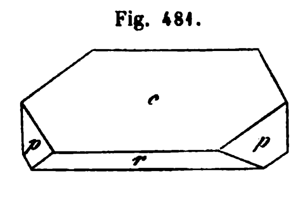


Fig. 481.

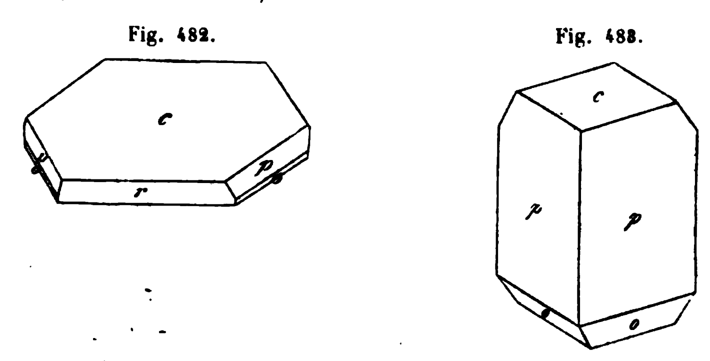
Combination Fig. 480: $c = oP$, $p = \infty P$, $r = +\mathrm{P}\infty$ (Hintze, unveröffentlichte Beobachtung).

Naphthalin $= C^{10}H^8$. $a : b : c = 1,3951 : 1 : 1,4278$, $\beta = 56° 31'$. Combination Fig. 481: $c = oP$, $p = \infty P$, $r = +2\mathrm{P}\infty$. Spaltbar-

keit nach oP vollkommen. Optische Axenebene $\| \infty \mathcal{P} \infty$, durch die Spaltungsblättchen eine Axe sichtbar (Groth, unveröff. Beob.).

Anthracen $= C^{14}H^{10}$. $a : b : c = 1,422 : 1 : 1,878$, $\beta = 55^0\,36'$. Combination Fig. 482: $c = oP$, $p = \infty P$, $o = + P$, $r = + 2\mathcal{P}\infty$. Spaltbarkeit oP. Optische Axenebene $\| \infty \mathcal{P} \infty$, durch oP eine Axe sichtbar (Groth, unveröff. Beob.).

Fig. 482. Fig. 483.



Dulcit $= C^{12}H^{14}O^{12}$. $a : b : c = 0,7369 : 1 : 0,7737$, $\beta = 66^0\,15'$. Combination Fig. 483: $p = \infty P$, $c = oP$, $o = + P$. Optische Axenebene normal zur Symmetrieebene, b erste Mittellinie; zweite Mittellinie. im stumpfen Winkel, bildet mit c $10^0\,53'$ roth, $10^0\,35'$ blau;

$$2E = 151^0\,10' \text{ roth}, \quad 150^0\,0' \text{ blau}.$$

(Des Cloizeaux, Nouv. Rech. 131).

Anmerkung. Nach der in §. 38 gegebenen Definition der Hemiëdrie wäre eine solche, und zwar nur eine Art, auch möglich im monosymmetrischen System; durch dieselbe würden die Querflächen und die Symmetrieebene unverändert bleiben, die prismatischen Formen dagegen in Paare von parallelen Flächen zerlegt werden. Ein Repräsentant dieser Hemiëdrie ist indess bisher nicht aufgefunden worden.

VI. Das asymmetrische Krystallsystem.

§. 97. **Einleitung. Wahl der Axen und der Grundform.** Das letzte Krystallsystem umfasst nach Früherem alle Krystalle, welche keine Symmetrieebene besitzen. Betrachten wir also irgend eine Fläche mit ihrer parallelen Gegenfläche, so wird zu derselben durch die Symmetrie keine

weitere gefordert, um sie zu einer vollständigen einfachen Form zu ergänzen, jedes Paar paralleler Flächen ist also für sich eine einfache Krystallform. Es gehören aber wenigstens drei solcher Flächenpaare dazu, einen Raum abzuschliessen, ein asymmetrischer Krystall muss also mindestens eine dreizählige Combination sein, während im vorigen Systeme zwei Formen zur vollständigen Begrenzung eines Krystalls genügten. Im asymmetrischen System giebt es demnach nur eine einzige Art von Formen, nämlich parallele Flächenpaare.

Da keine dieser Ebenen des Krystalls durch die Symmetrie irgendwie ausgezeichnet ist, so liegt keine Ursache dazu vor, dass irgend eine Richtung vorhanden sei, welche dadurch an Bedeutung hervorrage, dass sie für verschiedene physikalische Erscheinungen gleichzeitig von Wichtigkeit sei. Da nach dem Grundgesetz der physikalischen Krystallographie die physikalischen Hauptrichtungen nur von der Symmetrie des Krystalls abhängen, eine solche aber hier nicht vorhanden ist, so sind jene Richtungen für die verschiedenen physikalischen Erscheinungen nicht nothwendig die gleichen. In der That ist dies auch nicht der Fall. Die drei auf einander normalen Richtungen der grössten, kleinsten und mittleren Lichtgeschwindigkeit für eine bestimmte Farbe stehen in keiner gesetzmässigen Beziehung zu denen des Minimum oder Maximum der Cohäsion, oder den Richtungen der grössten, kleinsten und mittleren Ausdehnung durch die Wärme u. s. w. Keine jener drei Richtungen fällt ferner zusammen für die verschiedenen Farben, alle drei Hauptschwingungsrichtungen sind dispergirt, und zwar ohne alle Regelmässigkeit.

Bei dem Mangel jeder geometrischen Symmetrie liegt bei den in Rede stehenden Krystallen gar kein Grund dafür vor, irgend eine bestimmte Wahl der Axenebenen für besonders empfehlenswerth zu halten, es ist dieselbe also hier, ohne alle Einschränkung durch praktische Erwägungen, völlig frei gegeben, d. h. wir stehen hier vor dem allgemeinen Fall der Bestimmung eines Krystalls, welchen wir bereits S. 159 behandelt haben. Betrachten wir nunmehr ein bestimmtes Beispiel, den in Fig. 484 dargestellten asymmetrischen Krystall, so ist demnach das Verfahren das folgende: Wir wählen drei beliebige Flächen des Krystalls, z. B. a, b und c Fig. 484, zu Axenebenen, eine beliebige vierte, z. B. o, welche nicht in der Zone zweier von jenen liegt, zur Grundform, und berechnen auf die in S. 162 angegebene Art die Elemente des Krystalls, so erhalten wir drei schiefe Axenwinkel (daher der gewöhnlich gebrauchte Name »triklinisches System«) und ein selbstverständlich irrationales Parameterverhältniss. Von den Kanten der drei zu Axenebenen gewählten Flächen, d. h. den drei Axen, stellen wir eine ($a : b$ Fig. 484), mit c bezeichnet, vertical und nennen sie Verticalaxe, von den beiden anderen lassen wir diejenige, welcher der kürzere Parameter der Grundform entspricht ($b : c$), nach vorn abwärts geneigt, auf den Beobachter zulaufen und nennen sie Brachydiagonale (a); endlich wird die dritte querlaufende Axe b (= der Kante $a : c$) die

Makrodiagonale genannt. Bei der Aufzählung der Elemente eines Krystalls sollen in Zukunft die Axenwinkel α, β, γ stets im rechten oberen vorderen Octanten angeführt werden.

Nach der so getroffenen Wahl der Axen und einer Grundform sind wir im Stande, alle übrigen Flächen des Krystalls einfach durch ihre Indices, oder durch Zeichen, deren Ableitung eine ganz analoge ist, wie in den beiden vorhergehenden Systemen, zu bezeichnen, wie es im folgenden § geschehen soll.

§. 98. **Ableitung und Bezeichnung der asymmetrischen Formen.** Die zur Grundform gewählte, alle drei Axen in endlichem Abstand schneidende Fläche o ist offenbar das Analogon einer Pyramidenfläche des rhombischen Systems mit ihrer parallelen Gegenfläche, also eines Viertels einer rhombischen Pyramide; man nennt daher diese, sowie jede die drei Axen in endlichem Abstand schneidende Form eine Tetartopyramide. Die in Rede stehende primäre Tetartopyramide wird bezeichnet, wenn sie vorn oben rechts liegt, mit $P' = (a : b : c) = (1\,1\,1)$, wenn sie vorn oben links $'P = (a : b' : c) = (1\,\bar{1}\,1)$, vorn unten rechts (dies ist in Fig. 484 der Fall): $P_, = (a : b : c') = (1\,1\,\bar{1})$, vorn unten links (also hinten oben rechts ihre Gegenfläche): $_,P = (a : b' : c') = (1\,\bar{1}\,\bar{1})$. Man kann nun an einem flächenreichen asymmetrischen Krystall leicht die Wahl der Axen so treffen, dass alle vier Tetartopyramiden mit denselben Parametern daran auftreten; es würde aber hier, wie im vorigen System betreffs der zusammengehörigen Hemipyramiden, eine völlig falsche Vorstellung erwecken, wollte man von dieser Combination als von der »vollständigen asymmetrischen Pyramide« sprechen; eine solche existirt nicht, sondern jene vier Formen stehen unter einander in keiner anderen Beziehung, als zu den übrigen Krystallflächen; gleiche Indices erhielten sie nur durch eine ganz willkürliche Stellung des Krystalls, bei jeder anderen, die ebenso berechtigt ist, erweisen sie sich als verschieden, so dass man z. B. ebenso gut drei davon zu Axenebenen und eine zur Grundform nehmen kann.

Alle anderen, etwa noch vorkommenden Tetartopyramiden lassen sich nun ganz ebenso, wie im rhombischen System, von einer primären ableiten und dem entsprechend bezeichnen. Es wird also solche geben, welche eine verticale Ableitungsreihe bilden und, wenn sie vorn oben rechts liegen, folgendes allgemeine Zeichen haben:

$$mP' = (a : b : mc) = (h\,h\,l) \quad (h > l)$$

oder:

$$\frac{1}{m}P' = (a : b : \frac{1}{m}c) = (h\,h\,l), \quad (h < l),$$

wenn sie dagegen vorn oben links gelegen sind:

$$m'P = (a : b' : mc) = (h\,h\,l) \quad (h > l)$$

oder:

$$\frac{1}{m}{'P} = (a : b' : \frac{1}{m}c) = (hhl) \quad {\scriptstyle (h<l)}$$

u. s. f.

Von jedem Gliede einer solchen Reihe wird eine makrodiagonale Reihe von Tetartopyramiden abzuleiten sein, deren allgemeines Zeichen:

$$m\bar{P}'n = (a : nb : mc) = (hkl)$$

u. s. f.

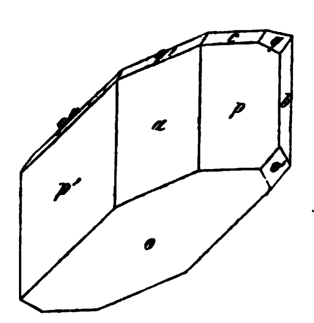
Ebenso eine brachydiagonale Ableitungsreihe*) mit der Bezeichnung

$$m\breve{P}'n = (na : b : mc) = (hkl)$$

u. s. f.

Die Endglieder dieser drei Arten von Reihen sind, wie im rhombischen System, Formen, welche einer Axe parallel laufen, da sie aber nur aus einseitig vorhandenen Flächen, je mit ihrer Gegenfläche, bestehen, können sie nicht »Prismen« und »Domen« benannt werden, sondern müssen die Namen »Hemiprismen« und »Hemidomen« erhalten.

Fig. 484.



Die primären Verticalreihen der Tetartopyramiden führen zum primären rechten Hemiprisma (p Fig. 484):

$$\infty P'_{,} = (a : b : \infty c) = (1\,1\,0)$$

als gemeinschaftliches Grenzglied der rechten oberen und unteren Tetartopyramiden, deren gegenseitige Combinationskante von jenem abgestumpft wird, sowie zum linken primären Hemiprisma (p' Fig. 484):

$$\infty{'_{,}}P = (a : b' : \infty c) = (1\,\bar{1}\,0)$$

als gemeinsames Grenzglied der beiden Reihen der linken oberen und unteren Tetartopyramiden.

Abgeleitete verticale Hemiprismen entstehen durch rationale Vervielfältigung der Makrodiagonale:

$$\infty\bar{P}'_{,}n,\ \infty{'_{,}}\bar{P}n = (a : nb : \infty c),\ (a : nb' : \infty c) = (hk0)\ (h\bar{k}0) \quad {\scriptstyle (h>k)}$$

oder durch eine solche der Brachydiagonale:

$$\infty\breve{P}'_{,}n,\ \infty{'_{,}}\breve{P}n = (na : b : \infty c),\ (na : b' : \infty c) = (hk0),\ (hk0) \quad {\scriptstyle (h<k)}.$$

Die ersteren sind die Endglieder der Verticalreihen abgeleiteter Tetartopyramiden, welche $n$fache Makrodiagonale von derjenigen der Grundform besitzen, sich jedoch durch den Coëfficienten der Verticalaxe unterscheiden; die letzteren die Endglieder ähnlicher Reihen, deren einzelne Formen eine $n$fache Brachydiagonale im Vergleich mit den primären haben und sich durch die Verticalaxe unterscheiden. Es versteht sich von selbst, dass alle Prismen in der Zone der beiden verticalen Axenebenen a, b Fig. 484 liegen.

*) Einer solchen gehört z. B. die Fläche $o' = 3\breve{P}_{,}3$ Fig. 484 an.

Eine makrodiagonale Ableitungsreihe von Tetartopyramiden führt bei wachsendem n endlich, wenn $n = \infty$ wird, auf ein vorderes makrodiagonales Hemidoma, allgemein:

$$m'\bar{P}'\infty = (a : \infty b : c) = (h0l)$$

als gemeinschaftliche Grenzform der oberen rechten und oberen linken Flächen, oder zu einem hinteren makrodiagonalen Hemidoma

$$m,\bar{P},\infty = (a' : \infty b : c) = (\bar{h}0l),$$

welche zugleich die letzte Form der Reihe der unteren rechten und unteren linken (vorn) Tetartopyramide bildet. Das erstere liegt am Krystall vorn oben und hinten unten, es würde die stumpfe Kante der beiden Axenebenen a, c Fig. 484 abstumpfen; das letztere vorn unten und hinten oben, als Abstumpfung der scharfen Kante $a : c$. Die Endglieder derjenigen Reihen, welche sich von den primären Tetartopyramiden herleiten, sind das vordere primäre makrodiagonale Hemidoma

$$'\bar{P}'\infty = (a : \infty b : c) = (101)$$

und das entsprechende hintere:

$$,\bar{P},\infty = (a' : \infty b : c) = (\bar{1}01).$$

In ganz derselben Weise liefern die brachydiagonalen Ableitungsreihen brachydiagonale Hemidomen; diese sind entweder rechte (rechts oben und links unten die Kante der Axenebenen b und c abstumpfend, deren Zeichen

$$m,\breve{P}'\infty = (\infty a : b : mc) = 0kl),$$

die gemeinschaftlichen Grenzformen der Reihen der rechten oberen und linken unteren Tetartopyramiden; oder es sind linke (links oben und rechts unten in der Zone $b\ c$ liegend),

$$m'\breve{P},\infty = (\infty a : b' : mc) = (0\bar{k}l),$$

die Grenzformen, sowohl der Reihen der linken oberen, als auch derjenigen der rechten unteren Tetartopyramiden.

Schliesslich können die drei Axenebenen selbst, als Grenzglieder von Ableitungsreihen aufgefasst, bezeichnet werden, und zwar die der Brachydiagonale und Verticale parallele b Fig. 484, das Brachypinakoid, als ein solches der brachydiagonalen Hemidomen, für den Fall $m = \infty$, also

$$\infty\breve{P}\infty = (\infty a : b : \infty c) = (010);$$

ferner die der Makrodiagonale und Verticalen parallele Axenebene a Fig. 484, das Makropinakoid, als das entsprechende Grenzglied der Reihe der makrodiagonalen Hemipyramiden:

$$\infty\bar{P}\infty = (a : \infty b : \infty c) = (100)$$

und endlich die dritte, nach vorn und seitlich geneigte Ebene, welche den Axen a und b parallel ist, die Basis c Fig. 484, als untere Grenze der verticalen Reihe aller Tetartopyramiden ($m = 0$):

$$oP = (\infty a : \infty b : c) = (001).$$

Das Schema, welches alle diese Ableitungsreihen versinnlichen würde, ist vollkommen identisch mit dem S. 350 gegebenen des rhombischen

Systems, wenn die Accente hinzugefügt werden, welche angeben, in welchem Octanten die Tetartopyramiden etc. liegen. Es gelten für die darin zusammengestellten Formen auch die gleichen Zonenverhältnisse, wie leicht zu übersehen; es liegen also z. B. alle verticalen Hemiprismen in der Zone des Makro- und des Brachypinakoids, alle makrodiagonalen Hemidomen in derjenigen des Makropinakoids und der Basis, endlich liegen alle brachydiagonalen Hemidomen mit parallelen Kanten zwischen oP und $\infty\breve{P}\infty$. Diese drei Zonen entsprechen also ganz den drei prismatischen Zonen des rhombischen Systems, nur mit dem Unterschiede, dass die Zonenaxen sich schiefwinkelig, bei letzterem rechtwinkelig durchschneiden.

Dagegen hat hier der Zusammenhang der Ableitungsreihen und die darauf gegründete Bezeichnung der Formen eine weit geringere Bedeutung, als in den vorhergehenden Systemen, weil dieselbe ja nur von der willkürlich gewählten Stellung des Krystalles abhängt und man daher jede Fläche nach Belieben zur Tetartopyramide oder zum Hemiprisma, zum Hemidoma, zur Basis u. s. f. machen kann, indem man eine andere Aufstellung wählt.

§. 99. **Die physikalischen Eigenschaften der asymmetrischen Krystalle.** Für die Elasticität asymmetrischer Krystalle liegen bisher noch keine Bestimmungen vor; nach Analogie der übrigen Eigenschaften muss die Elasticitätsfläche eines hierher gehörigen Krystalls eine höchst complicirte und gänzlich unsymmetrische Gestalt haben. Von der Cohäsion erfahren wir durch die Spaltbarkeit, in welchen Richtungen dieselbe ein Minimum hat; es ist nun wegen des Mangels einer Symmetrieebene a priori anzunehmen, dass niemals nach zwei Richtungen eine gleichartige Spaltbarkeit existirt, weil zu keinem Minimum der Cohäsion ein zweites gleichwerthiges durch die Symmetrie gefordert wird. Dies ist nun auch nicht der Fall; die asymmetrischen Krystalle sind nach einer oder mehreren Richtungen spaltbar, welche natürlich stets krystallonomisch möglichen Flächen entsprechen, aber in letzterem Falle ist die Vollkommenheit derselben eine verschiedene. Welche Art von Flächen die Spaltungsebenen sind, ob Axenebenen, Hemiprismen o. a., ist natürlich hier ohne alle theoretische Bedeutung, da dies von der willkürlichen Wahl der Axen abhängt. Genaue Härtebestimmungen, durch welche man das Gesetz der Aenderung der Cohäsion mit der Richtung innerhalb einer Krystallfläche erkennen würde, sind bisher nicht angestellt worden, während gerade in dieses System ein Mineral, der Cyanit oder Disthen (Al^2SiO^5), gehört, dessen Härte auf einer und derselben Fläche, derjenigen der deutlichsten Spaltbarkeit, den grössten Unterschied zeigt, welchen man kennt.

Gehen wir über zu den optischen Eigenschaften, so ist bereits bemerkt worden, dass die Richtung der Hauptschwingungsaxen weder für die verschiedenen Wellenlängen des Lichtes zusammenfallen, noch in irgend einer Beziehung zu derjenigen der Krystallkanten stehen. Im Allgemeinen ist also keine Krystallfläche einem optischen Hauptschnitt für eine bestimmte

Farbe parallel, und in Folge dessen sind die Schwingungsrichtungen auf einer Platte, sie möge, von welchem parallelen Flächenpaar es auch sei, gebildet werden, schief gegen die Kanten gelegen und bilden mit diesen verschiedene Winkel, wenn die Farbe des einfallenden Lichtes eine andere ist. Es ist klar, dass man die Lage der Hauptschwingungsrichtungen für eine bestimmte Wellenlänge finden kann, wenn man für eine Anzahl paralleler Flächenpaare jene Winkel mittelst des Stauroskopes bestimmt, denn die so gefundenen Schwingungsrichtungen für eine Krystallfläche sind parallel der grossen und kleinen Axe derjenigen Ellipse, welche der Durchschnitt der optischen Elasticitätsfläche mit jener Krystallfläche bildet. Grailich hat in seinem Werke: »Krystallographisch-optische Untersuchungen, Wien und Olmütz, 1858« S. 26 f. die Formeln hergeleitet, durch welche man aus den Schwingungsrichtungen der einzelnen Krystallflächenpaare die Lage der Axen der optischen Elasticitätsfläche in Bezug auf die krystallographischen Axen berechnen kann; es stellt sich hierbei heraus, dass es nöthig ist, die Schwingungsrichtungen für wenigstens vier Paare paralleler Krystallflächen festzustellen. Da dieser Weg ein sehr umständlicher ist und eine grössere Zahl sehr vollkommener Krystallplatten erfordert, ist er bisher bei den wenigen optisch untersuchten asymmetrischen Krystallen nicht eingeschlagen worden; man hat sich mit der Bestimmung der Schwingungsrichtungen für ein oder zwei vorherrschend ausgebildete Flächenpaare begnügt und hat die Lage der Elasticitätsaxen indirect, durch Aufsuchung der Lage der optischen Axen, bestimmt, bei manchen nur das letztere. Dies kann in der Weise geschehen, dass man den Krystall durch verschiedene Flächenpaare hindurch im convergenten Lichte betrachtet; ist er einigermassen flächenreich, so wird man leicht zwei Flächenpaare finden, durch welche hindurch das Bild je einer Axe (bei sehr kleinem Axenwinkel auch beide durch ein einziges) noch innerhalb des Gesichtsfeldes gelangt. Berücksichtigt man nun die dabei stattgefundene Brechung, so kann man aus der bekannten Lage der Flächen (am besten durch eine graphische Projection) ungefähr diejenige der ersten Mittellinie bestimmen; alsdann schleift man senkrecht zu dieser eine Platte, welche natürlich noch nicht genau richtig ist, daher sie das Interferenzbild nicht centrisch im Gesichtsfeld zeigt, bestimmt die Grösse und Richtung der Abweichung und corrigirt danach den Schliff der Platte, bis die Axenbilder genau gleich weit von der Mitte des Gesichtsfeldes abstehen und ihre Verbindungslinie durch diese geht; da nunmehr die Platte senkrecht zur ersten Mittellinie ist, so giebt die Messung der Winkel, welche sie mit den übrig gebliebenen natürlichen Krystallflächen bildet, die Lage jener, und da sie einem optischen Hauptschnitt parallel ist, so sind ihre beiden Schwingungsrichtungen zugleich die zweite und die dritte Hauptschwingungsrichtung; sie liefert also die Richtung der drei optischen Elasticitätsaxen und die Grösse des Axenwinkels. Da die richtige Lage der Schliffläche indess doch nur angenähert erreicht wird, so ist die hierdurch zu erzielende Genauigkeit keine sehr grosse. Ebenso genau, wie durch vollständige stauroskopische

Untersuchung, lässt sich die Lage der drei Hauptschwingungsrichtungen auf folgende Art feststellen, wie sie z. B. beim Kupfervitriol (s. Beispiel im folgenden §) angewendet worden ist: Wenn man durch zwei oder mehr natürliche oder künstliche Flächen, welche ziemlich stumpfe Winkel mit einander bilden, dieselbe optische Axe im Gesichtsfeld des Polarisationsapparates erblickt, so kann man den scheinbaren Winkel, welchen dieselbe mit der Normalen jedes dieser Flächen bildet, nach einer in der III. Abtheilung zu erläuternden Methode messen; da aber die einer optischen Axe parallelen Strahlen den mittleren Brechungsexponent β besitzen (vergl. S. 101), so kann man aus jenen scheinbaren die wahren Winkel berechnen, wenn man β kennt. Ein Prisma, welches zu der Bestimmung dieser Constante genügt, ist nun aber bei nur ungefährer Kenntniss der Lage der optischen Axenebene leicht anzufertigen; seine brechende Kante muss normal zur Ebene der optischen Axen sein, was man mit genügender Genauigkeit dadurch controliren kann, dass dasselbe, wenn es auf den Träger des Polarisationsinstrumentes so (mit Wachs) befestigt wird, dass einmal eine, einmal die andere Fläche oben horizontal und die brechende Kante dem im Gesichtsfeld befindlichen Verticalstrich des Mikrometers parallel ist, jedesmal eine optische Axe nach rechts oder links abgelenkt, aber im Horizontalstrich liegend, zeigt. Hat man nun auf diese Art die wahren Winkel bestimmt, welche die Richtung der einen optischen Axe mit mehreren Krystallflächen einschliesst, so ist dadurch ihre Lage gegen die Krystallaxen gegeben. Bestimmt man nun in genau derselben Weise diejenige der anderen optischen Axe, so folgt daraus durch Rechnung die Lage der Axenebene und der ersten Mittellinie, d. h. der drei Hauptschwingungsrichtungen. Selbstverständlich ist bei dieser, wie bei der stauroskopischen Untersuchung, die Bestimmung derselben für homogene Farben getrennt vorzunehmen, da sie alle drei dispergirt sind.

Aus dieser Dispersion der drei Hauptschwingungsrichtungen folgt nun die Beschaffenheit des Interferenzbildes, welches eine senkrecht zur ersten Mittellinie (für mittlere Farben) geschnittene Platte im weissen Lichte zeigt, und welches auf Taf. I, Fig. 12 und 13 dargestellt ist. Dieses Bild, von einer Platte von doppeltchromsaurem Kalium (s. Beispiele), deren Körperfarbe gelbroth ist, hervorgerufen, zeigt Verschiedenheit der Farbenvertheilung in den Ringen nach allen Richtungen, so dass es nach keiner Seite hin Symmetrie aufweist.

Was die thermischen Verhältnisse betrifft, so ist namentlich die Ausdehnung durch die Wärme von Interesse. Wenn nun auch bisher kein asymmetrischer Krystall eine eingehende Untersuchung in dieser Hinsicht gefunden hat, so ist doch kein Zweifel darüber möglich, dass die Richtungen der grössten, mittleren und kleinsten Ausdehnung in keiner gesetzmässigen Beziehung mit krystallographischen Richtungen stehen, ja dass sie für verschiedene Temperaturintervalle sogar eine Aenderung ihrer Lage erfahren. Da demnach von den natürlichen Flächen eines Krystalls keine einzige genau einer thermischen Axe parallel ist, so muss jede derselben ihre Lage gegen

die drei thermischen Axen ändern; d. h. alle Winkel eines asymmetrischen Krystalls sind veränderlich mit der Temperatur desselben. Dass die Richtungen der grössten, mittleren und kleinsten Wärmeleitungsfähigkeit unsymmetrisch in den Krystallen gelegen sind, beweist der Umstand, dass die grosse und kleine Axe der isothermen Fläche, welche durch das Sénarmont'sche Experiment erhalten wird, stets schief gegen die Kanten der untersuchten Fläche stehen.

So zeigen uns die asymmetrischen Krystalle den höchsten Grad von geometrischer und physikalischer Unregelmässigkeit, welchen ein homogener krystallisirter Körper überhaupt haben kann. Während zwar für eine einzelne physikalische Eigenschaft, z. B. das Verhalten gegen Licht von einer bestimmten Farbe, vollkommene Symmetrie herrscht, indem die Lichtgeschwindigkeit nach drei auf einander senkrechten Richtungen ihren resp. grössten, mittleren und kleinsten Werth erreicht und sich dazwischen symmetrisch ändert, so sind doch diese drei physikalischen Hauptrichtungen verschiedene für jede einzelne physikalische Eigenschaft und die Lage derselben für die eine steht in keiner nachweisbaren Beziehung zu derjenigen jener drei Richtungen für eine andere Eigenschaft.

§. 100. **Beispiele:** Natürl. Kryolith $= 6NaF + Al^2F^6$. $a:b:c = 0,9665 : 1 : 1,3879$; $\alpha = 89^0\ 44'$, $\beta = 90^0\ 18'$, $\gamma = 90^0\ 3'$ (bei dieser Wahl der Axenebenen sind dieselben also fast normal zu einander). Combination Fig. 485: $p = \infty P',$ $p' = \infty ,'P$, $c = oP$, $q = ,\breve{P}'\infty$, $q' = '\breve{P},\infty$ (es sind somit zum Makro- und Brachypinakoid diejenigen Abstumpfungen der Kanten $p:p'$ gewählt, welche den Diagonalen der Basis parallel sind, an den Krystallen aber gewöhnlich nicht auftreten). Spaltbarkeit nach $\infty P',$ $\infty ,'P$ und oP ziemlich deutlich. Optische Axenebene fast parallel der Makrodiagonale; sie schneidet die drei Axen in dem Verhältniss: $3,2a : 27,3b : c$; die erste Mittellinie macht mit der Ebene der Axen a und c einen Winkel von 5^0. Doppelbrechung +. (Websky, N. Jahrb. f. Mineral. 1867.)

Fig. 485.

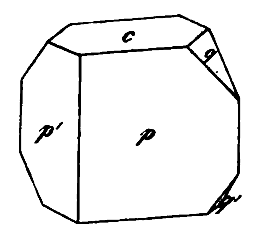
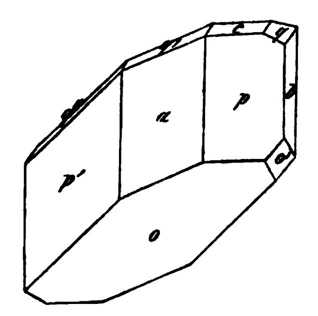


Fig. 486.



Schwefelsaures Kupfer (Kupfervitriol) $= Cu\,SO^4 + 5H^2O$. $a:b:c = 0,5656 : 1 : 0,5499$; $\alpha = 97^0\ 39'$, $\beta = 106^0\ 49'$, $\gamma = 77^0\ 37'$. Combination Fig. 486: $p = \infty P',$ $p' = \infty ,'P$, $a = \infty \bar{P}\infty$, $b = \infty \breve{P}\infty$, $c = oP$, $q = ,\breve{P}'\infty$, $q' = '\breve{P},\infty$, $q'' = 2'\breve{P},\infty$, $o = P,$, $o' = 3\breve{P},3$. Durch Bestimmung des Winkels der optischen Axen mit mehreren Krystallflächen ergiebt sich, dass die

erste Mittellinie im rechten hinteren Octanten oben liegt und die zu derselben (für mittlere Farben) normale Ebene mit P' 72° 53′, mit $\infty \bar{P} \infty$ 81° 31′, mit $\infty \breve{P}', 2$ (Abstumpfung der Kante $p : b$) 43° 41′ einschliesst; $2V = 56° 2'$; Dispersion $\varrho < v$, deutlich; Doppelbrechung —. Hauptbrechungsquotienten für die D-Linie:

$$\alpha = 1{,}5156,\ \beta = 1{,}5394,\ \gamma = 1{,}5464.$$

(Pape, Poggend. Ann. Ergänzungsbd. VI, 35).

Schwefelsaures Mangan (Manganvitriol) $= MnSO^4 + 5H^2O$, hat dieselbe Krystallform wie das vorige Salz.

Dichromsaures Kalium $= K^2Cr^2O^7$. $a : b : c = 0{,}5575 : 1 : 0{,}5511$; $\alpha = 82° 0'$, $\beta = 90° 51'$, $\gamma = 83° 47'$. Combination Fig. 487: $a = \infty \bar{P} \infty$, $b = \infty \breve{P} \infty$, $c = oP$, $q = ,\breve{P}' \infty$, $p = \infty P',$. Spaltbarkeit $\infty \breve{P} \infty$ sehr vollkommen, $\infty \bar{P} \infty$ und oP deutlich. Optische Axenebene ungefähr senkrecht zur Brachydiagonale, durch $\infty \breve{P} \infty$ ist eine Axe fast in der Mitte des Gesichtsfeldes sichtbar. Doppelbrechung +.

Unterschwefligsaures Calcium $= CaS^2O^3 + 6H^2O$. $a : b : c = 0{,}7828 : 1 : 1{,}5170$; $\alpha = 72° 30'$, $\beta = 98° 34'$, $\gamma = 92° 46'$. Combination Fig. 488: $c = oP$, $b = \infty \breve{P} \infty$, $p = \infty P',$, $p' = \infty ,'P$, $q = ,\breve{P}' \infty$. Spaltbarkeit nach oP vollkommen. (Zepharovich, Sitz.-Ber. d. Wiener Akad. 45. Bd. 499.) Nach v. Kobell stehen die Schwingungs-

Fig. 487.

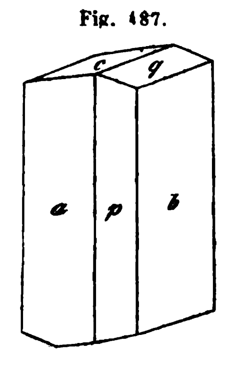


Fig. 488.

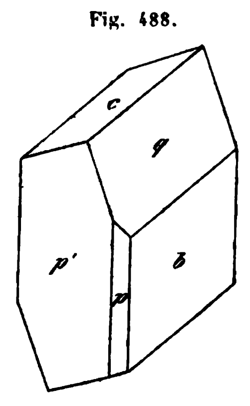
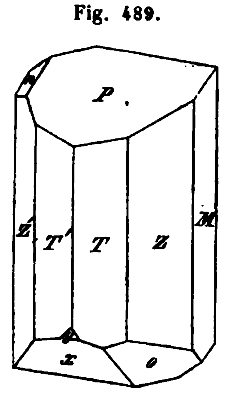


Fig. 489.



richtungen auf allen Flächen schief gegen die Kanten; weitere optische Untersuchung fehlt.

Natürl. Natronfeldspath (Albit) $= Na^2Al^2Si^6O^{16}$. $a : b : c = 0{,}6333 : 1 : 0{,}5575$; $\alpha = 85° 56'$, $\beta = 116° 28'$, $\gamma = 88° 8'$. Combination Fig. 489: $P = oP$, $M = \infty \breve{P} \infty$, $T = \infty P',$, $T' = \infty ,'P$, $z = \infty \breve{P}',3$, $z' = \infty ,'\breve{P} 3$, $x = ,\bar{P},\infty$, $y = 2,\bar{P},\infty$, $n = '\breve{P},\infty$, $o = P,$. Spaltbarkeit nach oP vollkommen, $\infty \breve{P} \infty$ deutlich. Die optische Axenebene schneidet $\infty \breve{P} \infty$ in einer Graden, welche 20° mit der Brachydiagonalen, 96½° mit der Verticalen macht; eine Fläche, normal zur ersten Mittellinie,

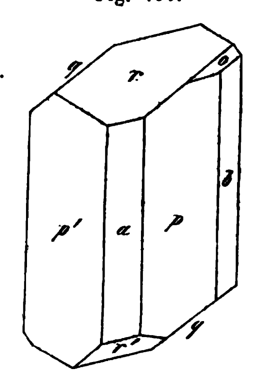
ist auf die schärfere Kante $oP : \infty \breve{P} \infty$ aufgesetzt und bildet mit oP 101½°, mit $\infty \breve{P} \infty$ 165°, mit $\infty P'$, 125°. Axenwinkel in Oel:

$2H = 80° 39'$ roth,
81 35 grün,
81 59 blau.

Starke geneigte Dispersion, eine andere nicht deutlich erkennbar. (Des Cloizeaux, Ann. d. chim. phys. 1875.)

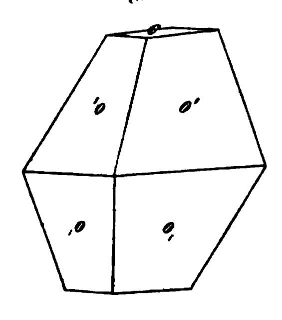
Traubensäure $= C^4H^6O^6 + 2H^2O$. $a : b : c = 0,8017 : 1 : 0,4911$: $\alpha = 75° 16'$, $\beta = 97° 59'$, $\gamma = 120° 22'$. Combination Fig. 490: $a = \infty \bar{P} \infty$, $b = \infty \breve{P} \infty$, $p = \infty P',$, $p' = \infty ,'P$, $r = '\bar{P}' \infty$, $o = P'$, $r' = ,\bar{P}, \infty$, $q = '\breve{P}, \infty$. Optische Axenebene fast genau parallel $\infty P',$; die erste Mittellinie also nahe in dieser Ebene, bildet (für mittlere Farben) mit der Verticalen 47° im unteren linken Octanten vorn. Für mittlere Farben ist: $2V = 67° 10'$, $2E = 115° 10'$, $\beta = 1,526$; geringe Dispersion der Axen $\varrho > v$; von derjenigen der Mittellinien die geneigte zu erkennen (Groth, Poggend. Ann. 135. Bd. 648).

Fig. 490.



Bibromorthonitrophenol $= C^6H^3NO^3Br^2$. $a : b : c = 0,6114 : 1 : 1,8241$; $\alpha = 82° 36'$. $\beta = 90° 45'$, $\gamma = 89° 21'$. Combination Fig. 491: $c = oP$, $'o = 'P$. $o' = P'$, $,o = ,P$, $o, = P,$, d. h. alle vier Tetartopyramiden, deren Parameter die gleichen sind; die Combination ähnelt geometrisch ausserordentlich einer monosymmetrischen $(+P, -P, oP)$, in welcher das Makropinakoid Symmetrieebene wäre, und zufälligerweise ist auch in optischer Beziehung dieselbe Aehnlichkeit vorhanden; die optische Axenebene steht nämlich fast genau senkrecht zu $\infty \bar{P} \infty$ und die erste Mittellinie fällt nahe in dieselbe Ebene; letztere ist fast normal auf dem Hemidoma $2'\breve{P}, \infty$, nach welchem die Krystalle sehr vollkommen spalten.

Fig. 491.



$2E = 46° 40'$ *Li*-Linie
50 57 *Na*- -
55 0 *Tl*- -

Ausser dieser starken Dispersion der Axen ist noch eine gekreuzte Dispersion der Mittellinien deutlich wahrzunehmen (Arzruni, Poggend. Ann. 152. Bd. 286).

Bijodorthonitrophenol $= C^6H^3NO^3J^2$. $a : b : c = 0,6155 : 1 : 1,6825$; $\alpha = 86° 43'$, $\beta = 90° 29'$, $\gamma = 92° 47'$. Combination = dem vorigen, nur statt $,o$ und o' häufiger flachere Tetartopyramiden ($\frac{1}{2}P$, $\frac{1}{3}P$). Spaltbarkeit $\infty \breve{P} \infty$ vollkommen. Die erste Mittellinie, für die verschiedenen

Farben bis $1\frac{1}{2}^0$ verschieden, steht nahe senkrecht zu jener Spaltungsfläche; dagegen divergiren die zweiten Mittellinien für die verschiedenen Wellenlängen ausserordentlich; die Axenebene bildet nämlich mit der Brachydiagonale

$45\frac{1}{2}^0$	für die *Li*-Linie	($2E$ =	$59\frac{1}{2}^0$)
37	- - *Na*- -	(- =	$55\frac{1}{2}$)
23	- - *Tl*- -	(- =	52)

Darnach würden die Axenebenen für das äusserste Roth und das äusserste Violett des Spectrums um etwa 70° gegen einander gedreht sein, die stärkste bisher beobachtete Dispersion der Axenebenen. Dieselbe bewirkt folgende Erscheinung: bringt man eine Spaltungsplatte, welche also nahe senkrecht zur ersten Mittellinie ist, in paralleles polarisirtes Licht, so erscheint sie bei keiner Drehung dunkel; denn wenn ihre Hauptschwingungsrichtungen für Roth den gekreuzten Nicols parallel sind, so bilden diejenigen der andern Farben so grosse Winkel mit jenen, dass sie zum Theil im Maximum ihrer Intensität sind; es erscheint also stets eine Interferenzfarbe, welche gerade so wechselt, wie die Farbe einer Quarzplatte beim Drehen des Analysators (Arzruni, a. a. O.).

Ueber die Ausbildung und die Verwachsungen der Krystalle.

§. 101. **Unvollständige Ausbildung. Hemimorphie.** Es ist bereits in der Einleitung dieser Abtheilung, S. 156, als Ursache für die unvollständige Ausbildung eines Krystalles die mechanische Hinderung seines Weiterwachsens durch einen festen fremden Körper, z. B. einen anderen Krystall derselben Substanz, angeführt worden. Indess können auch ringsum ausgebildete Krystalle eine unvollständige Ausbildung zeigen, indem nämlich von den Flächen einer einfachen Form ein Theil fehlt, und somit solche zu Kanten zusammentreffen, welche andernfalls nicht benachbart wären. Eine derartige Unvollzähligkeit der Flächen ist entweder:

1) eine unregelmässige; diese ist eine einfache Folge des ungleichen Abstandes der Flächen von einander; denn ebenso gut, wie von den acht Flächen eines regulären Octaëders sieben so gross ausgebildet sein können, dass die achte die dreikantige Ecke ihrer drei Nachbarflächen als äusserst kleines Dreieck abstumpft, ebenso gut können sich die letzteren direct schneiden, und die achte Fläche einmal gänzlich fehlen; es kommt daher sehr häufig vor, dass an Krystallen einzelne Flächen ihrer Formen nicht ausgebildet sind, ohne dass hierbei irgend eine Gesetzmässigkeit obwaltet, wie man sogleich erkennt, wenn man mehrere Krystalle mit einander vergleicht;

2) eine regelmässige; von einer Gesetzmässigkeit in der Unvollzähligkeit der Flächen eines Krystalls kann man nur dann sprechen, wenn in Bezug auf die Flächen einer bestimmten einfachen Krystallform an allen Krystallen dieselbe in genau gleicher Weise auftritt. Diejenigen Krystalle, welche eine solche regelmässige Unvollzähligkeit der Flächen zeigen, verhalten sich nun sämmtlich so, dass die regelmässig ausgewählte Hälfte der Flächen gewisser einfacher Formen in principiellen Gegensatz zur anderen Hälfte tritt; in Folge dessen erscheinen beide Hälften als selbständige Formen, welche wohl auch mit einander combinirt auftreten können, alsdann aber sich durch Oberflächenbeschaffenheit, Vorherrschen in der Combination etc. unterscheiden. Die gesetzmässige Unvollzähligkeit der Flächen zerfällt in zwei verschiedene Arten:

a) Hemiëdrie, welche bereits in §. 38 allgemein definirt worden ist

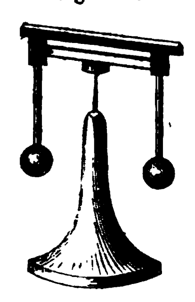
und bei Besprechung der einzelnen Krystallsysteme ihre eingehende Erörterung erhalten hat; sie kann nach zwei verschiedenen Gesetzen der Auswahl der Flächen gleichzeitig auftreten und führt dann den Namen Tetartoëdrie.

b) Hemimorphie nennt man eine davon wesentlich verschiedene Erscheinung, welche eine beschränktere Anzahl von Substanzen zeigt. Sie besteht darin, dass die Hälfte der Flächen einer Form, welche von der anderen Hälfte unabhängig ist, so ausgewählt erscheint, dass von den beiden Seiten einer Symmetrieaxe die eine von denselben Flächen geschnitten wird, wie bei der ganzflächigen (holomorphen) Gestalt, die andere von keiner einzigen. Während also von einer hemiëdrischen Form gleich viele Flächen die beiden Seiten einer Symmetrieaxe gleichartig schneiden (auf jeder Seite die Hälfte der Flächen der holoëdrischen), so schneiden die Flächen einer hemimorphen Form sämmtlich nur eine Seite der betreffenden Symmetrieaxe (welche wir dann die Axe der Hemimorphie nennen), und diese Seite tritt dann in einen Gegensatz zu der anderen, welcher auf einer inneren molecularen Polarität der beiden entgegengesetzten Richtungen beruht, denn dieser tritt durch eine physikalische, nur den hemimorphen Krystallen zukommende Eigenschaft, die Pyroëlectricität, zu Tage. Diese besteht darin, dass ein hemimorpher Krystall, wenn er erwärmt wird, an den beiden Enden, welche in Bezug auf die Axe der Hemimorphie entgegengesetzt sind, entgegengesetzte freie Electricität zeigt, und hierbei die positive Spannung stets einem Ende, welches durch bestimmte hemimorphe Gestalten krystallographisch charakterisirt ist, angehört, die negative dem anderen Pol. Hat man nun für die Krystalle einer bestimmten Substanz diese Beziehung zwischen der Ausbildung eines Poles und dem Zeichen der daselbst auftretenden Electricität einmal bestimmt, so kann man an einem Krystall vorher angeben, welches Ende desselben beim Erwärmen positiv electrisch werden wird, welches negativ. Die Stärke der auftretenden electrischen Spannung ist für die verschiedenen hemimorphen Körper nicht die gleiche, ausserdem hängt sie aber noch davon ab, ob die Krystalle in der Richtung der Axe der Hemimorphie langprismatisch ausgebildet sind oder nicht; in letzterem Falle liegen die entgegengesetzt electrischen Enden, die electrischen Pole, so nahe an einander, dass durch gegenseitige Influenz die Erscheinungen gestört werden, daher nur in dem ersteren Falle eine völlig zweifellose Erkennung der Pyroëlectricität möglich ist. Die Stärke der freien electrischen Spannung hängt ferner noch ab von der Gestalt, d. h. von den vorhandenen Ecken und Kanten, welche, je schärfer sie sind, um so mehr ein Ausströmen der Electricität in die Luft gestatten. Um die Stärke, mit der die Electricität in einem solchen Krystall in verschiedenen Richtungen abgestossen wird, genau kennen zu lernen, müsste man eigentlich aus demselben eine Kugel schleifen, und deren electrische Spannung an allen Stellen untersuchen. Bei verschiedenen der im Folgenden erwähnten Körper ist indess die beim Erwärmen entwickelte Electricität so stark, dass

ein einigermassen prismatisch (nach der Axe der Hemimorphie) verlängerter Krystall den electrischen Gegensatz seiner beiden Enden auf folgende einfache Art zu erkennen gestattet:

Die pyroëlectrischen Krystalle zeigen freie Electricität nur so lange, als ihre Temperatur sich ändert, und zwar, während sie sich abkühlen, die entgegengesetzte von derjenigen, welche an demselben Ende während des Erwärmens auftritt. Man erwärmt nun einen solchen Krystall (z. B. einen Turmalin, der sich hierzu am meisten eignet) mittelst einer Weingeistflamme auf 100—200°, und legt ihn dann, wie es in Fig. 492 angedeutet ist, auf einen kleinen Messingträger, welcher unten ein Achathütchen trägt, mittelst dessen er (da wegen der angehängten Messingkugeln sein Schwerpunkt tiefer liegt) wie eine Magnetnadel frei auf einer Nadelspitze, welche im Stativ eingelassen ist, spielt. Nähert man nun dem einen Ende einen positiv electrischen Körper (geriebenen Glasstab), so wird dieses abgestossen, das andere angezogen; am besten nimmt man hierzu einen zweiten Turmalinkrystall, dessen eines Ende, wenn er vorher ebenfalls erwärmt war und nun im Abkühlen begriffen ist, das eine Ende des ersten anzieht, das andere abstösst, während das entgegengesetzte sich gerade umgekehrt verhält.

Fig. 492.



G. Rose, welcher zuerst den Zusammenhang des Zeichens der entstehenden Electricität mit der krystallographischen Ausbildung der beiden entgegengesetzten Pole der Axe der Hemimorphie genauer kennen lehrte (s. Poggendorff's Ann. Bd. 39, 285 und Abhandl. d. Berl. Akad. 1843), führte folgende Namen zur Unterscheidung der letzteren ein: analoger Pol für dasjenige Ende der betreffenden Symmetrieaxe, welches bei steigender Temperatur (Aenderung positiv) positiv electrisch, beim Abkühlen (Aenderung negativ) negativ wird; antiloger Pol für das Ende, welches beim Erwärmen (Temperaturänderung +) negativ, beim Abkühlen positiv electrisch wird.

Nach der oben gegebenen Definition der Hemimorphie ist eine solche nicht möglich im asymmetrischen Systeme, da in diesem eine Symmetrieaxe nicht existirt; im monosymmetrischen kann es nur eine Art derselben geben, bei welcher die beiden Seiten der Symmetrieaxe in Gegensatz treten; in den anderen Systemen können mehrere Arten der Hemimorphie gedacht werden, da dieselben mehrere Symmetrieaxen besitzen. Im rhombischen System kann eine solche nach jeder einzelnen der drei Symmetrieaxen eintreten; da es jedoch beliebig ist, welche derselben man vertical stellt, so reduciren sich diese drei Fälle genau genommen auch nur auf einen einzigen; Krystalle, welche gleichzeitig nach zwei Axen hemimorph wären, hat man noch nicht gefunden. Im hexagonalen und tetragonalen Krystallsystem wäre theoretisch sowohl Hemimorphie nach der Hauptaxe, als solche nach einer

anderen Symmetrieaxe denkbar; beobachtet hat man jedoch bisher nur den ersteren Fall. Endlich hat man im regulären System noch keine Art der Hemimorphie kennen gelernt (dieselbe würde sich als ein an allen drei gleichwerthigen Hauptaxen auftretender Gegensatz der beiden Seiten documentiren).

Folgende sind die Körper, an deren Krystallen bis jetzt die Hemimorphie nachgewiesen worden ist:

a) Tetragonales System*).

Jodsuccinimid = $C^4H^4O^2NJ$. $a:c = 1:0,8733$. Combination Fig. 193: $p = \infty P$; oberer Pol: $o' = 2P$; unterer Pol: $o = P$, untergeordnet $o' = 2P$. Spaltbarkeit P ziemlich deutlich. Doppelbrechung —. (Groth, Annalen d. Chemie u. Pharm. v. Liebig, 7. Suppl.-Bd. 117).

Fig. 193.

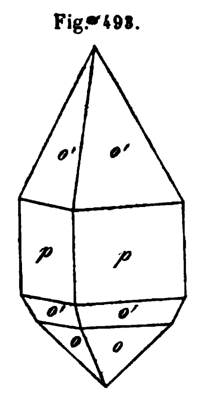
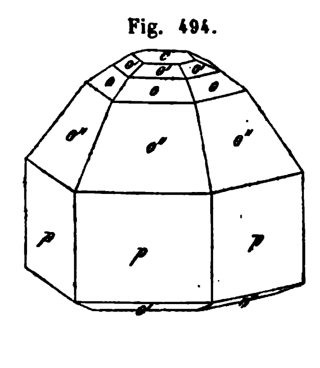


Fig. 194.



b) Hexagonales System.

Schwefelcadmium (nat. Greenookit) = CdS. $a:c = 1:0,8127$. Combination Fig. 194: $p = \infty P$, oberer Pol: $c = oP$ (klein), $o' = \frac{1}{2}P$, $o = P$, $o'' = 2P$, unterer Pol $c = oP$ gross, $o' = \frac{1}{2}P$.

Antimonsilberblende = $Ag^6Sb^2S^6$ und Arsensilberblende = $Ag^6As^2S^6$. Die bereits S. 287 beschriebenen Krystalle dieser Substanzen sind nur äusserst selten an beiden Enden ausgebildet, doch würde ihre Hemimorphie auch, wenn keine derartigen Krystalle bekannt wären, durch das Auftreten des Prismas erster Ordnung als trigonales, erwiesen sein, wie aus den Erörterungen bei dem Turmalin (s. unten) hervorgeht.

Ueberjodsaures Natrium S. 302 zeigt am oberen Ende die in Fig. 334 dargestellten Flächen, am unteren nur die Basis.

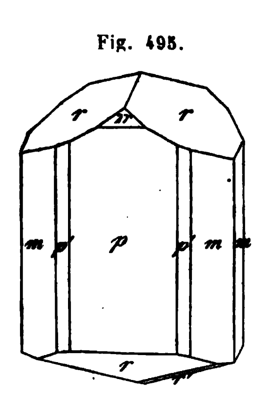
Natürl. Turmalin = $(Mg, Fe, H^2, K^2, Na^2)^3 Al^4B^2Si^4O^{20}$**). $a:c$

*) Um mit einem recht einfachen und leicht verständlichen Beispiel zu beginnen, ist hier das tetragonale System vorangestellt worden.

**) In des Verf. »Tab. Uebers. d. einf. Mineralien« ist in den Turmalinformeln durch Druckfehler nur die Hälfte der Al^2O^3 angegeben.

$\doteq 1 : 0,4474$. Diese Krystalle sind zugleich rhomboëdrisch hemiëdrisch, und in Folge dessen übt die Hemimorphie einen Einfluss auf die prismatischen Formen aus, welcher bei holoëdrischen unmöglich ist, und daher mit Evidenz beweist, dass dieselben, obgleich geometrisch nicht von holoëdrischen verschieden, doch eigentliche hemiëdrische Formen sind, wie wir dies bei der Entwickelung der verschiedenen Arten der Hemiëdrie früher annahmen. Bei den Rhomboëdern tritt durch die Hemimorphie ein Gegensatz der drei oberen Flächen gegen die drei unteren Parallelflächen ein; das hexagonale Prisma erster Ordnung ist nun, wie S. 281 erörtert, ein Rhomboëder, dessen Flächen vertical sind; daher gehören die drei abwechselnden Flächen, wie aus Fig. 293 hervorgeht, dem oberen, die drei anderen dem unteren Pol an; die Hemimorphie muss daher diese Form in zwei trigonale Prismen (vergl. Fig. 330) verwandeln, von denen nur eines auftritt, oder das andere mit anderer Flächenbeschaffenheit. Ferner zeigt Fig. 292, dass das dihexagonale Prisma nichts anderes ist, als ein Skalenoëder mit unendlich grosser Hauptaxe, dass seine Flächenpaare also abwechselnd dem oberen und dem unteren Pol angehören; an einem hemimorphen Krystall muss es daher als ditrigonales Prisma (s. Fig. 327) erscheinen. Was endlich das Prisma zweiter Ordnung betrifft, so ersieht man aus Fig. 296, dass seine Flächen sämmtlich sowohl dem oberen als dem unteren Pol zugehören, diese Form also durch die Hemimorphie keine Aenderung erfahren kann. In der That verhalten sich nun die rhomboëdrischen und zugleich hemimorphen Krystalle genau so, wie es jene Anschauung der hemiëdrischen Formen erfordert. Es wurde bereits bei der Antimonsilberblende und Arsensilberblende angeführt, dass das Prisma erster Ordnung an denselben als trigonales auftritt; das Gleiche ist beim Turmalin der Fall, von dem eine Combination der häufigeren Flächen in Fig. 495 abgebildet ist. Als prismatische Formen treten daran das Prisma erster Ordnung $p = \infty P$ nur mit drei abwechselnden Flächen, $p' = \infty P\frac{5}{4}$ als ditrigonales, dagegen $m = \infty P2$ mit allen Flächen, auf; der obere (der antiloge) Pol zeigt $r = +R$, $2r = -R$, der untere (analoge) $r = +R$ und die Abstumpfung der Polkanten desselben $r' = -\frac{1}{2}R$. Der analoge Pol ist nach G. Rose's Untersuchungen stets derjenige, an welchem die Flächen von R auf die Flächen, nicht auf die Kanten des trigonalen Prismas aufgesetzt erscheinen. Die Brechungsexponenten des farblosen Turmalin sind für die D-Linie:

Fig. 495.



$$\omega = 1,6366, \qquad \varepsilon = 1,6193,$$

die Doppelbrechung also negativ; die meisten Turmaline sind jedoch, je nach ihrem Eisen- oder Mangangehalt, verschieden gefärbt, und besitzen dann höhere Brechbarkeit und sehr starken Pleochroismus; manche derselben absorbiren, wenn man das Licht durch eine parallel

der Axe geschnittene Platte gehen lässt, den ordentlichen Strahl so stark (vergl. S. 53), dass man zwei derselben, in einer sogenannten Turmalinzange drehbar mit einander verbunden, als Polarisator und Analysator eines, freilich sehr unvollkommenen Polarisationsapparates verwenden kann.

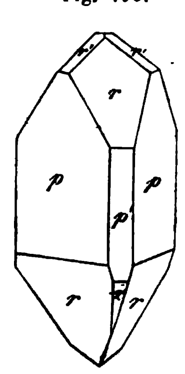


Fig. 496.

Tolylphenylketon $= C^{14}H^{13}O$. $a:c = 1:1,2254$. Hemimorph und zugleich rhomboëdrisch hemiëdrisch, daher von den Krystallen dasselbe gilt, wie vom Turmalin. Combination Fig. 496: $p = \infty P$ als trigonales Prisma vorherrschend, $p' = \infty P$, das entgegengesetzte trigonale Prisma, stets schmal; am oberen (analogen) Pol $r = +R$, $r' = -\frac{1}{2}R$; am unteren (antilogen) Pol $r = +R$, $-r = -R$. Doppelbrechung —; Brechungsexponenten für die *D*-Linie

$$\omega = 1,7170, \qquad \varepsilon = 1,5629$$

(Groth und Bodewig, unveröffentl. Beob.).



c) Rhombisches System*).

Phosphorsaures Ammonium-Magnesium (natürl. Struvit) $= NH^4\,Mg\,PO^4 + 6\,H^2O$, $a:b:c = 0,5626:1:0,9163$. Combination Fig. 497: $b = \infty\breve{P}\infty$; am oberen (antilogen) Pol: $r = \bar{P}\infty$, $q = \breve{P}\infty$, $q' = 4\,\breve{P}\infty$; am unteren (analogen) Pol: $c = oP$, $r' = \frac{1}{3}\bar{P}\infty$. Spaltbarkeit $\infty\breve{P}\infty$ ziemlich vollkommen. Optische Axenebene oP, a erste Mittellinie, Doppelbrechung +.

Fig. 497.

$2E = 46^0\ 32'$ roth,
$47\ \ 30$ gelb,
$48\ \ 46$ violett,

$\beta = 1,497$ roth. $1,502$ gelb.

Starke Aenderung durch die Wärme:

Für Roth: $2E = 41^0\ 49'$ bei 7^0 C.
$46\ \ 4$ - 47 -
$51\ \ 50$ - 95 -

(Des Cloizeaux, Nouv. Rech. 95). Electr. s. Hausmann, Götting. Nachr. 1846, 121.

Nat. Kieselzinkerz $= Zn^2SiO^4 + H^2O$. $a:b:c = 0,7835:1:0,4778$. Combination Fig. 498: $b = \infty\breve{P}\infty$, $a = \infty\bar{P}\infty$, $p = \infty P$; am oberen (analogen) Pol: $r = \bar{P}\infty$, $r' = 3\,\bar{P}\infty$, $q = \breve{P}\infty$, $q' = 3\,\breve{P}\infty$, $c = oP$; am unteren (antilogen) Pol nur $o = 2\breve{P}2$. Spaltbarkeit ∞P vollkommen.

---

*) In diesem System ist stets die Axe der Hemimorphie zur Verticalaxe gewählt worden.

Optische Axenebene $\infty \bar{P} \infty$, c erste Mittellinie, Doppelbrechung +; optische Constanten:

	α	β	γ	$2V$	$2E$
für Roth:	1,6107	1,6142	1,6324	47° 30	81° 7′
- Gelb:	1,6136	1,6170	1,6360	46 9	78 39
- Grün:	1,6176	1,6202	1,6392	44 42	76 3

(von Lang, Sitz.-Ber. d. Wien. Akad. 37. Bd. 379).

Resorcin = $C^6H^6O^2$. $a : b : c = 0,9105 : 1 : 0,5404$. Combination Fig. 499: $p = \infty P$, oberer Pol: $r = \bar{P}\infty$, unterer Pol: $o = P$. Optische Axenebene oP, a erste Mittellinie, Doppelbrechung —; für die Na-Linie ist $2V = 46^0 14'$, $\beta = 1,555$;

$2E = 76^0 40'$ roth,
76 6 gelb,
74 35 blau

(Groth, unveröff. Beob.).

Fig. 498.

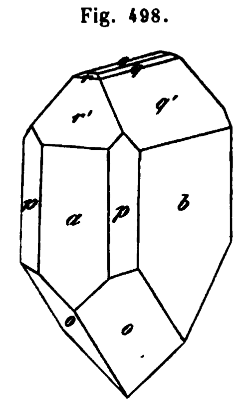


Fig. 499.

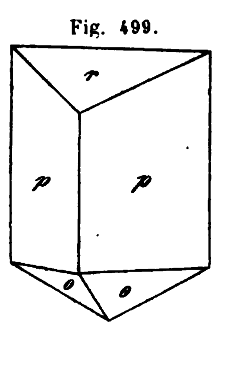
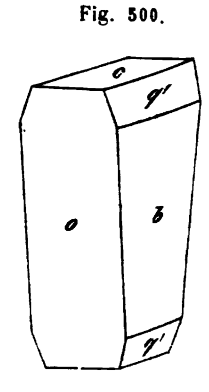


Fig. 500.



Milchzucker = $C^{12}H^{22}O^{11}$. $a : b : c = 0,3529 : 1 : 1,6092$. Zugleich sphenoidisch hemiëdrisch und hemimorph. Combination Fig. 500: $c = oP$, $b = \infty \breve{P} \infty$, $q' = 2\breve{P}\infty$, $o = P$ als untere Hälfte des primären Sphenoids. Spaltbarkeit $\infty \bar{P} \infty$ deutlich. Optische Axenebene $\infty \breve{P} \infty$, a erste Mittellinie. Doppelbrechung —; Axenwinkel $2E = 40^0$ c., $\varrho > v$. (Grailich und von Lang, Sitz.-Ber. d. Wiener Akad. 27. Bd. 66.)

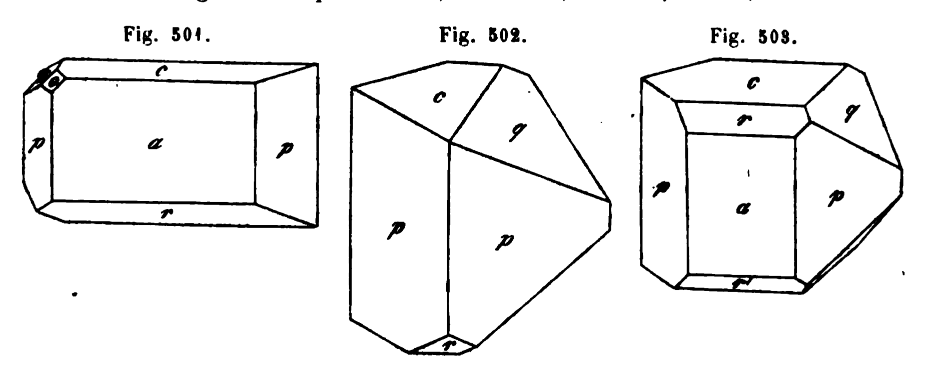
d) Monosymmetrisches System.

Rohrzucker = $C^{12}H^{22}O^{11}$. $a : b : c = 1,2595 : 1 : 0,8782$, $\beta = 76^0 30'$. Combination Fig. 501: $a = \infty P \infty$, $c = oP$, $r = +P\infty$. $p = \infty P$; nur am linken (antilogen) Pol der Symmetrieaxe: $q = P\infty$ und $o = -P$. Spaltbarkeit $\infty P \infty$ deutlich. Optische Axenebene $\infty P \infty$. Doppelbrechung —; erste Mittellinie für mittlere Farben im stumpfen Axenwinkel bildet mit c $67^0 48'$ (Miller);

$2E = 77^0 53'$ roth, $79^0 5'$ violett;

schwache geneigte Dispersion; merkliche Aenderung des Axenwinkels und der Lage der Mittellinie durch die Wärme (Des Cloizeaux, Nouv. Rech. 170); über die elektrischen Eigenschaften s. Hankel, Poggend. Ann. 49. Bd. 495.

Quercit $= C^6H^{12}O^5$. $a : b : c = 0,7935 : 1 : 0,7533$, $\beta = 69^0 50'$. Combination Fig. 502: $p = \infty P$, $c = oP$, $r = + P \infty$; nur rechts:



$q = P \infty$. Optische Axenebene $\infty P \infty$, Doppelbrechung +, erste Mittellinie im spitzen Winkel bildet mit c:

für die *Li*-Linie	11° 49′	
- - *Na*- -	11	46
- - *Tl*- -	11	22;

der scheinbare Axenwinkel:

für die *Li*-Linie	57° 35′	
- - *Na*- -	58	1
- - *Tl* -	58	34

(Bodewig, unveröffentl. Beob.).

Weinsteinsäure (= Rechtsweinsäure) $= C^4H^6O^6$. $a : b : c = 1,2747 : 1 : 1,0266$, $\beta = 79^0 43'$. Combination Fig. 503: $a = \infty P \infty$, $c = oP$, $r = - P \infty$, $r' = + P \infty$, $p = \infty P$, nur am rechten antilogen) Pol: $q = P \infty$. Spaltbarkeit $\infty P \infty$ deutlich. Optische Axenebene senkrecht zur Symmetrieebene, Doppelbrechung +; erste Mittellinie im spitzen Winkel der Axen bildet mit c 71° 18′ für Roth, 72° 10′ für Blau; $2V = 78^0 20'$ gelb (Des Cloizeaux, Nouv. Rech. 114). Pyroëlektricität s. Hankel, Poggend. Ann. 49. Bd. 500.

§. 102. Unvollkommenheiten in der Ausbildung der Krystalle.

Die Hemimorphie kann ebenso wenig wie die Hemiëdrie als eine Unvollkommenheit der Ausbildung betrachtet werden, da beide ganz bestimmten Gesetzen gehorchen und gewissen Körpern eigen sind, daher sie nicht von äusseren Umständen bei der Bildung des Krystalls, sondern von seiner chemischen Natur selbst abhängen. In der unregelmässigen Unvollzähligkeit der Flächen dagegen lernten wir bereits eine eigentliche Unvollkommenheit, welche nur durch zufällige Verhältnisse bedingt ist, kennen, und dieser reihen sich noch folgende an:

Unterbrochene Raumerfüllung: Die Krystalle, welche sich z. B.

aus einer Lösung absetzen, vergrössern sich je nach den äusseren Umständen in sehr verschiedener Weise; nur wenn diese so beschaffen sind, dass eine sehr allmähliche und ungestörte Volumvermehrung stattfindet, wachsen die Krystalle gleichartig auf allen Flächen und zeigen eine vollkommene Erfüllung desjenigen Raumes, welcher durch ihre Kanten und Ecken gegeben ist. Bei schneller Ausscheidung dagegen, z. B. bei der Abkühlung einer heiss gesättigten Lösung, vergrössern sich die zuerst entstandenen kleinen und meist sehr einfachen Kryställchen häufig in der Weise, dass sich nach gewissen Richtungen (Wachsthumsrichtungen) reihenförmig kleine Krystalle derselben Form in paralleler Stellung anlagern, und so sternförmige Aggregate (Wachsthumsformen, Krystallgerippe) entstehen, welche die Form eines grösseren Krystalls nachahmen, von welchem jedoch nur Ecken und Kanten angedeutet, statt der Flächen treppenförmige Vertiefungen vorhanden sind. Die Wachsthumsrichtungen sind stets krystallographisch bestimmte, namentlich häufig den Symmetrieaxen parallel. Ueber die verschiedenen, bei regulären Krystallen unter verschiedenen Umständen auftretenden Wachsthumserscheinungen s. das Werk von Knop, »Molekularconstitution und Wachsthum der Krystalle, Leipzig 1867«. Nach den in diesem Buche niedergelegten Beobachtungen über die Krystallisation des Chlornatriums, Chlorammoniums, Chlorkaliums u. a. sind die Wachsthumsrichtungen bei diesen Körpern die Normalen zu den Hexaëder-, zu den Dodekaëder- und zu den Octaëderflächen. Wenn ein derartiges Krystallgerippe durch Mangel an Stoff am Weiterwachsen gehindert wird, so resultirt demnach ein den Raum nur unvollkommen ausfüllender Krystall; findet aber in den späteren Stadien ein allmählicher weiterer Stoffabsatz statt, so füllt sich nach und nach der Raum zwischen den zuerst gebildeten Krystallreihen durch parallele Schichten aus, so dass schliesslich, wenn die Bildung ohne Störung lange genug dauert, ein vollkommen geschlossen ausgebildeter Krystall zu Stande kommen kann. Sehr häufig bleiben jedoch noch Theile der Flächen nicht ausgefüllt; andererseits setzen sich oft die ausfüllenden Schichten nicht unmittelbar auf einander, so dass Hohlräume der mannigfaltigsten Gestalt, oft erfüllt mit der Lösung, aus welcher sich der Krystall ausschied, entstehen. Diese Unvollkommenheiten der Raumerfüllung eines Krystalls, zu welchen auch der Einschluss eines festen fremden Körpers gehört, um welchen derselbe herumgewachsen ist, bilden namentlich Hindernisse der Untersuchung seiner physikalischen Eigenschaften. So muss man sich zur Bestimmung der optischen Erscheinungen nur solcher Krystalle bedienen, welche möglichst frei von Poren und Einschlüssen sind, da an diesen eine Reflexion des Lichtes stattfindet und daher der Krystall, wenn er deren sehr viele enthält, vollkommen trübe wird. Ferner kommt es vor, dass Substanzen zahlreiche Einschlüsse eines fremden Körpers in paralleler Stellung enthalten, welche in ihrer Gesammtheit optische Erscheinungen hervorbringen, welche man leicht fälschlicherweise als solche des umschliessenden Krystalls auffassen kann. Ein Beispiel hierfür bietet der

Boracit (s. S. 236), dessen Krystalle meist mikroskopisch kleine Blättchen einer optisch zweiaxigen Substanz in solcher Menge parallel eingelagert enthalten, dass eine Platte nach $\infty O \infty$ geschnitten die Erscheinungen eines doppeltbrechenden und zwar zweiaxigen Krystalls zeigt (Des Cloizeaux, Mém. sur l'empl. d. micr. polar. 1864. p. 23; s. auch Poggend. Ann. 126. Bd. 387). Ferner kann die Zusammensetzung eines Krystalls aus parallelen Schichten, welche nicht vollkommen einander berühren, zu der irrthümlichen Annahme einer Spaltbarkeit nach jenen Flächen verleiten, welche man dadurch prüfen muss, dass man untersucht, ob die Trennung parallel jenen Ebenen zu Stande kommt, an welcher Stelle des Krystalls dieselbe auch versucht werde, während sie bei einer schaligen Zusammensetzung natürlich nur in den Ebenen zu erhalten ist, in welchen bereits durch den Bildungsprocess eine Trennung vorhanden war.

Eine andere nicht minder erwähnenswerthe Unvollkommenheit der Ausbildung der Krystalle, als die unvollständige Raumerfüllung, beruht ebenfalls auf dem allmählichen Wachsthum derselben. Wenn ein solches stattfindet, so sind es offenbar die von den Oberflächentheilchen des bereits gebildeten Krystalls ausgehenden Kräfte, welche bewirken, dass sich nur Theilchen in paralleler Stellung anlagern. Würden diese Molecularkräfte ganz allein hierbei in Betracht kommen, so würden alle folgenden Theilchen in strengster Genauigkeit parallele Anordnung haben mit den zuerst abgesetzten und das Ganze, gleichviel ob es ein geschlossener Krystall oder ein Aggregat solcher, ein Krystallgerippe, ist, physikalisch als ein einziger Krystall zu betrachten sein. Dem ist aber nicht so; vielmehr wirken stets, wenn auch in geringem Grade, andere Kräfte mit auf die sich absetzenden Theilchen ein und beeinflussen ihre Lagerung. Zu diesen gehört namentlich die Schwerkraft, welche natürlich verschieden wirkt, je nach dem Winkel, welchen die sich absetzende Schicht mit der Richtung jener einschliesst; ferner die Anziehung von Seiten eines benachbarten, in anderer Stellung befindlichen Krystalls, oder fester in der Lösung suspendirter Theilchen eines fremden Körpers. So kommt es, dass die Moleculаranordnung einer später sich ausscheidenden Schicht des Krystalls nicht absolut parallel derjenigen der zuerst gebildeten ist, die einer dritten nicht parallel der zweiten u. s. f.; je länger demnach der Krystall zu seiner Bildung gebraucht hat, d. h. je grösser er ist, desto geringere Gewähr ist dafür geboten, dass er aus genau parallelen Theilen zusammengesetzt sei. Ausserdem ist jedoch die Fähigkeit, derartigen störenden Einflüssen zu folgen, bei den verschiedenen Substanzen eine sehr verschiedene, so dass es solche giebt, von denen kein Krystall von einiger Grösse gefunden werden kann, der nicht in seinen Theilen deutliche Abweichungen vom Parallelismus zeigte. Die Folgen einer solchen Zusammensetzung aus nicht genau parallelen Theilen sind z. B. Unregelmässigkeiten der optischen Erscheinungen, deren Erklärung nach Obigem ohne Schwierigkeit ist; einaxige Krystalle zeigen eine Trennung der Kreuzesarme des Interferenzbildes, als ob sie zweiaxig, mit sehr kleinem Axen-

winkel, wären (Beryll, Zirkon u. A.); zweiaxige zeigen Differenzen des Winkels der optischen Axen, gemessen an verschiedenen Stellen einer Platte. Selbstverständlich werden durch die in Rede stehende Unvollkommenheit auch die Krystallwinkel beeinflusst. Dies geschieht in zweierlei Art: Entweder endigen mehrere nicht parallele Theile des Krystalls an einer Fläche: dann gehören deren einzelne Theile verschiedenen derselben an, haben also nicht dieselbe Richtung, die Krystallfläche erscheint gebrochen und liefert somit mehrere Einstellungen bei der Messung mit dem Reflexionsgoniometer, welche nicht selten um mehr als 1° differiren; man würde nun im Allgemeinen den Winkel zwischen zwei Flächen erheblich falsch finden, wenn man für beide die mittlere jener Einstellungen als richtig annähme, mit grösster Wahrscheinlichkeit dagegen den wahren Werth, wenn man diejenigen Flächentheile benutzt, welche unmittelbar in der Kante an einander grenzen. Die Zusammensetzung kann aber auch in der Weise stattfinden, dass der zuletzt gebildete Theil des Krystalls den ganzen Raum einer Fläche bildet, so dass diese vollkommen eben erscheint, aber in ihrer Richtung jener einzelnen Schicht, nicht dem übrigen Krystall, entspricht. Hierdurch entstehen zuweilen bei scheinbar vorzüglich ausgebildeten Krystallen Differenzen derjenigen Kantenwinkel, welche gleich gross sein sollen, von ziemlich beträchtlicher Grösse. Da diese Abweichungen durch zufällige äussere Störungen veranlasst sind, welche mit dem Wesen des Krystalls in keinem gesetzmässigen Zusammenhange stehen, so muss durch solche ein bestimmter Krystallwinkel einmal zu gross, ein anderes Mal zu klein ausfallen, d. h. man wird sehr nahe den wahren Winkel, welchen die betreffende Kante haben würde, wenn der Krystall in allen seinen Theilen parallel wäre, erhalten, wenn man dieselbe an einer genügend grossen Zahl von Krystallen derselben Substanz der Messung unterzieht und alsdann das arithmetische Mittel aus den Resultaten nimmt. Dies ist in der That um so mehr der Fall, je grösser die Zahl der gemessenen Krystalle ist, wie durch folgende Erfahrung bewiesen wird: wählt man zur Untersuchung nur möglichst kleine Krystalle, welche nach Obigem am meisten Gewähr für sehr nahe parallele Zusammensetzung darbieten, so wird man oft einen oder den anderen finden, der eine solche innerhalb der Beobachtungsfehler wirklich darbietet, dessen Flächen also sehr genau die richtige Lage haben; die Winkel dieses Krystalls findet man alsdann um so genauer mit dem Mittel der übrigen übereinstimmend, je mehr der letzteren gemessen wurden.

Es wurde ebenfalls bereits in der Einleitung S. 156 erwähnt, dass sehr gewöhnlich die Krystalle dadurch unvollkommen ausgebildet erscheinen, dass ein fremder Körper, meist ein Krystall derselben Substanz, aber in anderer Lage, ihr Wachsthum nach gewissen Seiten verhindert hat, nach denen alsdann die Krystallflächen fehlen. Gewöhnlich beginnt eine Krystallisation an vielen Stellen ungefähr zu gleicher Zeit und unabhängig von einander, daher die einzelnen zuerst entstehenden kleinen Krystalle nicht einander parallel, sondern in den mannigfachsten Lagen sich befinden. Ist nun Material genug

vorhanden, um ihr Wachsthum bis zur gegenseitigen Berührung zu ermöglichen, so verwachsen schliesslich dieselben mit einander, aber meist nach ganz unregelmässigen Flächen, da natürlich die zuletzt sich absetzenden und den Zwischenraum ausfüllenden Moleküle von denen beider Krystalle angezogen werden, also eine regelmässige Lage nicht mehr einnehmen können, es sei denn, dass nur noch der eine Krystall fortwachse, in welchem Falle seine Begrenzung gegen den andern gleichsam einen Abdruck von dessen Form darstellt. So entstehen Aggregate unregelmässig mit einander verwachsener Krystalle, in welchen sich nur an den Stellen, wo es an Stoff zur Krystallbildung fehlte, Hohlräume befinden, deren Wände aus theilweise frei hereinragenden Krystallen bestehen (Drusenräume). Von manchen Substanzen, namentlich in der Natur gefundenen, hat man nur solche, nicht ringsum ausgebildete Krystalle zur Verfügung, und hat also aus diesen, gleichsam Fragmenten, auf die vollständige Form zu schliessen. Dies ist eine leichte Aufgabe, wenn dieselben so frei ausgebildet sind, dass sie nur mit einem Ende festgewachsen erscheinen; sie kann aber sehr schwierig werden, wenn an jedem Krystall nur zwei oder drei von vielen daran auftretenden Flächen entwickelt sind, und daher, wegen der verschiedenen Lage der andern Krystalle, diese andere Flächen aufweisen, so dass die Zurückführung der einen auf die anderen oft ohne Zuhülfenahme der optischen Eigenschaften eine Unmöglichkeit wird.

Oft sind Krystalle zwar ringsum ausgebildet und gestatten doch nur eine unvollständige Bestimmung ihrer Form; wenn sie nämlich nach gewissen Richtungen so geringe Dimensionen besitzen, dass ein Theil der Flächen zu klein ist, um eine Messung durch Reflexion des Lichtes zu gestatten; wenn dieser Mangel an räumlicher Ausdehnung nur nach einer Richtung hin stattfindet, so bilden die Krystalle sehr dünne Tafeln oder Blättchen, deren Randflächen zur Messung zu schmal sind; wenn sie dagegen nur nach einer Richtung eine merkliche Dimension besitzen, so erscheinen sie nadel- oder haarförmig, und dann sind die Endflächen ihrer geringen Grösse wegen nicht bestimmbar. Dass ein Krystall, wenn er überhaupt von äusserster Kleinheit ist, nicht mehr mit dem Reflexionsgoniometer gemessen werden kann, versteht sich von selbst; es kann ein solcher zwar noch mit dem Mikroskop untersucht werden, indem man die ebenen Winkel, welche die Kanten mit einander bilden, bestimmt, doch ist diese Messung keiner grossen Genauigkeit fähig, da sie erfordert, dass die betreffende Fläche genau senkrecht zur optischen Axe des Mikroskops liegt, und diese Lage an einem mikroskopischen Krystall nicht sicher controlirt werden kann (über mikroskopische Krystallmessung s. »Rosenbusch, mikroskopische Physiographie der Mineralien, Stuttgart 1873«, S. 10 f.

§. 103. **Beschaffenheit der Krystallflächen.** Es ist bisher angenommen worden, dass die Krystallflächen vollkommene Ebenen sind; und dies ist auch wirklich der Fall. Wenn wir jedoch solche eines natürlichen Krystalls betrachten, so werden wir sehr zahlreiche Ausnahmen von jenem

Gesetze zu sehen glauben, Ausnahmen, welche indess nur scheinbare sind, indem bei oberflächlicher Beobachtung als eine einzige Fläche erscheint, was genau genommen mehreren angehört. Die in Rede stehenden Unvollkommenheiten der Flächen sind die folgenden:

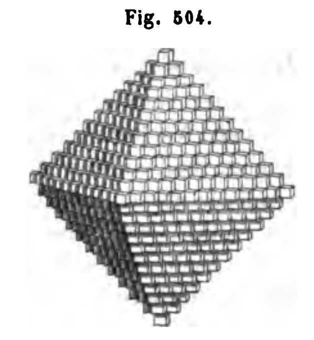
Streifung der Flächen. Diese entsteht durch alternirende Ausbildung zweier, gewöhnlich gegen einander sehr stumpfwinkelig geneigter Flächen; die scheinbare Fläche, welche gestreift ist, besteht demnach aus treppenförmig absetzenden Streifen zweier verschiedener, mit einander abwechselnd, wovon man sich leicht überzeugen kann, wenn man das Licht von den Flächentheilen der einen Art reflectiren lässt und alsdann eine Drehung ausführt, bis die zwischenliegenden, vorher dunkel bleibenden Streifen das Licht zurückwerfen. Man hat demnach bei der Messung zwei verschiedene Einstellungen auszuführen und gelangt dadurch zur Bestimmung zweier Krystallflächen; da jedoch an stark gestreiften Krystallen gewöhnlich die Theile nicht vollkommen parallel sind, so gelingt es nur selten, von solchen genaue Messungen der Winkel zu erhalten. Aus dem Wesen der Streifung ist ersichtlich, dass dieselbe stets der Axe einer krystallographischen Zone parallel sein muss. Sie kann aber auch auf einer Fläche eine mehrfache sein, z. B. auf der eines Rhomboëders, wenn sie durch Flächen eines Skalenoëders hervorgebracht wird, welches dessen Polkanten zuschärft; alsdann resultirt eine zweifache federförmige Streifung parallel den beiden Polkanten, welche längs der Diagonale der Fläche zusammenstösst. Die Streifung kann zuweilen zur Erkennung der Hemiëdrie dienen: wenn ein Hexaëder durch die Flächen eines Pyramidenwürfels gestreift erscheint, so müssen vier in den Diagonalen rechtwinkelig an einander stossende, den Kanten parallele Streifensysteme auf jeder Fläche erscheinen; ist der Krystall aber pentagonal hemiëdrisch, so entsteht statt dessen auf jeder Würfelfläche nur ein Streifensystem, parallel den beiden gegenüberliegenden Kanten, und diese Streifen, gebildet von den Flächen eines Pentagondodekaëders, stehen auf je zwei benachbarten Flächen zu einander normal.

Wenn nun auch die Streifung zu den Erscheinungen gehört, welche, wie das Auftreten gewisser Formen einer Krystallreihe, von den zufälligen äusseren Bedingungen bei der Bildung des Krystalls abhängen, so ist sie doch, wie das letztere, in verschiedenem Grade von jenen abhängig bei verschiedenen Substanzen, und es giebt deren solche, bei denen bestimmte Krystallflächen fast immer eine ganz bestimmte Streifung zeigen, welche man ihre »charakteristische Streifung« nennen kann, weil durch dieselben die Flächen und ihre Stellung leicht erkannt werden können. So zeigen z. B. die natürlichen Quarzkrystalle (s. S. 300) auf ihren Prismenflächen (∞R) nie eine andere Streifung, als ein horizontale, gebildet von den Flächen steiler Rhomboëder, die Krystalle von Topas (s. S. 366) in der ganzen Prismenzone nur verticale Streifung u. s. f.

Drusige Beschaffenheit der Flächen. Dies ist ebenfalls nur eine scheinbare Ausnahme von dem Gesetz, dass die Krystallflächen Ebenen

sind, denn die drusigen oder rauhen Flächen sind gar nicht eigentliche Krystallflächen, sondern bestehen aus zahlreichen Ecken kleiner paralleler Krystalle, welche so angeordnet sind, dass jene in einer Ebene liegen. So beobachtet man z. B. von Chlornatrium, Flussspath u. a. regulären Substanzen oft scheinbare Octaëder, aufgebaut aus kleinen Würfeln, bei denen die drusigen Octaëderflächen von den Ecken dieser Würfel gebildet werden, also als eigentliche Flächen nicht am Krystall auftreten (s. Fig. 504). Sind diese in je einer Ebene liegenden Ecken weit kleiner und zahlreicher, so erscheint die Krystallfläche zwar eben, aber matt, und zwischen diesen und vollkommen glänzenden Flächen sind alle möglichen Uebergänge vorhanden. Je matter eine solche nun ist, d. h. je weniger Licht sie reflectirt, desto schwieriger ist ihre Lage durch das Reflexionsgoniometer zu bestimmen, und ganz matte Flächen können hierzu natürlich gar nicht verwendet werden.

Fig. 504.



Es ist eine ganz allgemeine Erscheinung, dass an einem und demselben Krystall die Oberflächenbeschaffenheit aller Flächen einer einfachen Form die gleiche ist, z. B. an der Combination O, $\infty O \infty$ alle Octaëderflächen matt, alle Würfelflächen glänzend erscheinen, ebenso kommen aber von derselben Substanz Krystalle der nämlichen Combination vor, an denen alle Octaëderflächen glänzend, alle Würfelflächen matt sind. Diese Gleichheit der Oberflächenbeschaffenheit gilt alsdann bei den hemiëdrischen Substanzen nur für die Hälfte der Flächen der holoëdrischen Gestalt, z. B. erscheinen die vier Flächen des einen Tetraëders glatt, die des andern sämmtlich matt oder gestreift, oder beide Tetraëder zeigen verschieden gerichtete Streifung u. s. f.

Krümmung der Flächen. Diese kann von verschiedenen Ursachen herrühren. Entweder können viele sehr schmale Flächen, welche sehr stumpfe Winkel mit einander bilden, in ihrer Gesammtheit den Eindruck einer einzigen krummen Fläche machen; hierher dürften z. B. die oft sehr gerundeten Flächen des Diamants gehören. Oder, und dies ist besonders häufig der Fall, eine und dieselbe Fläche erscheint in zahlreiche kleine Facetten zerlegt, deren Richtung von einer zur andern sich nur wenig ändert, weil die zugehörigen inneren Theile des Krystalls nicht einander vollkommen parallel sind (s. vorigen §, S. 429); wenn z. B. prismatisch ausgebildete Krystalle fächerförmig zu einem scheinbar einheitlichen Krystall verwachsen, so muss die Basis, wenn sie am Ende desselben auftritt, eine Krümmung zeigen. Endlich können auch dadurch Flächen gekrümmt erscheinen, dass die Krystalle solcher Substanzen, welche einen geringen Grad von Sprödigkeit besitzen, durch mechanische Kräfte verbogen wurden; es kann auch hier nicht mehr von eigentlichen Krystallflächen die Rede sein, da eine solche gebogene Fläche niemals ohne Entstehung von Rissen und Spalten zu Stande

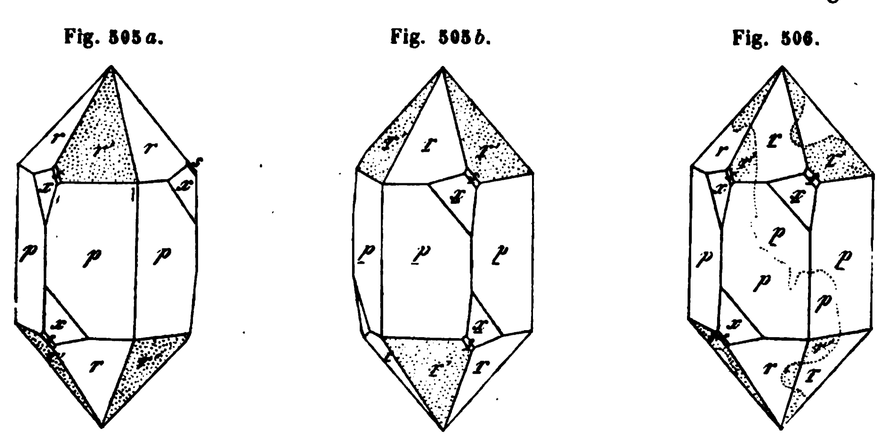
kommt und daher aus mehreren gegen einander gedrehten Ebenen zusammengesetzt ist. Es bedarf kaum noch der Erwähnung, dass die Neigung einer, durch irgend eine dieser Ursachen gekrümmten, Krystallfläche gegen andere um so weniger genau gemessen werden kann, je grösser der Grad ihrer Krümmung ist.

§. 104. **Arten der regelmässigen Verwachsung mehrerer Krystalle.** Auf S. 431 haben wir die Entstehung der Aggregate unregelmässig mit einander verwachsener Krystalle kennen gelernt und in den vorher besprochenen Wachsthumsformen das erste Beispiel einer regelmässigen Verwachsung, bei welcher die einzelnen Krystalle einander parallel und daher physikalisch als ein einziger zu betrachten sind. Ausserdem finden sich jedoch, und zwar sehr häufig, Verwachsungen mehrerer nicht paralleler Krystalle nach ganz bestimmten Gesetzen, welche eine eingehendere Betrachtung erfordern.

Zunächst kommt es vor, dass Krystalle zweier verschiedener Substanzen regelmässig mit einander verwachsen, indem nämlich ein bereits fertig gebildeter Krystall die Ablagerung derjenigen eines fremden Körpers auf seiner Oberfläche derartig beeinflusste, dass dieselben eine gesetzmässige Lage gegen ihn annahmen; die Gesetzmässigkeit besteht in diesen Fällen darin, dass bestimmte Kanten des aufgewachsenen Krystalls gewissen des erstgebildeten parallel sind. So finden sich z. B. in der Natur Krystalle von Eisenoxyd (s. S. 287), tafelförmig nach der Basis, auf welcher Fläche nadelförmige Krystalle von Rutil (S. 322) so aufgewachsen sind, dass ihre Prismenkante, also ihre Hauptaxe, parallel den Basiskanten der Pyramiden zweiter Ordnung des Eisenoxydkrystalls ist; diese können also nach drei verschiedenen Richtungen, welche sich unter 120° schneiden, liegen, und nicht selten findet man solche Krystalle in allen diesen drei Richtungen aufgewachsen. Ferner kommen Krystalle von Kalifeldspath (S. 405) vor, auf deren Prismenflächen solche von Natronfeldspath (S. 417) so aufsitzen, dass bei beiden die Prismenkanten, d. h. die Verticalaxen, parallel sind.

Mit einer gleichen Gesetzmässigkeit sind auch zuweilen zwei Krystalle einer und derselben Substanz mit einander verwachsen. Das wichtigste Beispiel hierfür bietet der Quarz (S. 300) dar, von dessen Krystallen ausserordentlich häufig zwei derart mit einander verwachsen sind, dass die Kanten des positiven Rhomboëders $+R$ von dem einen Krystall parallel denen des negativen $-R$ des andern sind, in Folge dessen auch die Hauptaxen beider Krystalle dieselbe Richtung haben; zwei rechtsdrehende Krystalle in der angegebenen relativen Stellung zeigt Fig. 505 *a* und *b*; diese verwachsen nun in der Art mit einander, dass sie sich gegenseitig mit unregelmässigen Grenzen vollständig durchdringen und äusserlich ganz so erscheinen, wie ein einfacher Krystall (s. Fig. 506), dessen Oberfläche jedoch theilweise dem einen, theilweise dem andern Krystall angehört. Die Zusammengesetztheit des scheinbar einfachen Krystalls wird durch zweierlei Eigenschaften des-

selben erkannt: die Flächen der trigonalen Pyramide $s = 2P2$ und des Trapezoëders $x = \frac{6P\frac{6}{5}}{4}$ liegen oft an zwei benachbarten Ecken, während sie an einfachen Krystallen oben (ebenso unten) nur an den abwechselnden vorkommen dürfen (s. S. 301); je nach der Art der Durchdringung sind die bezeichneten Flächen in der verschiedensten Zahl und Vertheilung am



Krystall vorhanden, es können z. B. oben alle sechs, unten gar keine auftreten u. s. f. Ein zweites Erkennungsmittel der Verwachsung liegt in der verschiedenen Oberflächenbeschaffenheit der beiden Rhomboëder $+R$ und $-R$, von welchen gewöhnlich das letztere weniger eben und glänzend, als das erstere, manchmal auch ganz matt ist; hierdurch sind nun bei sehr vielen derartigen Verwachsungen auf den Rhomboëderflächen die Grenzen der beiden Krystalle deutlich zu sehen, da Theile derselben glänzend ($+R$ des einen), andere matter ($-R$ des andern, in der Figur punktirt) erscheinen; natürlich muss an den Kanten stets eine glänzende an eine matte Fläche, demselben Krystall angehörig, zusammenstossen. Wenn die Differenz der Beschaffenheit der beiden Flächen so gering ist, dass sie sich der Beobachtung entzieht, und wenn weder trigonale Pyramiden, noch Trapezoëder an einem Krystall auftreten, ist er nicht von einem einfachen zu unterscheiden, da eine optische Differenz zwischen den Componenten nicht besteht; sie haben nämlich parallele optische Axen und denselben Sinn der Drehung; in dem gewählten Beispiel war dieser rechts, ebenso oft kommen aber auch zwei linksdrehende Krystalle nach demselben Gesetz verwachsen vor.

Fast alle sehr zahlreich vorkommenden Arten der Verwachsung zweier Krystalle (sogen. Zwillinge) folgen dagegen einem anderen Gesetze. Bei denselben sind nämlich die beiden verbundenen Krystalle derartig gegen einander orientirt, dass dieselben zu einander symmetrisch liegen in Bezug auf eine Ebene, welche bei beiden derselben Krystallfläche, aber keiner Symmetrieebene des einzelnen ent-

spricht. Derartig verwachsene Krystalle wollen wir symmetrische Zwillinge nennen, diejenige Ebene, in Bezug auf welche sie zu einander symmetrisch sind, die Zwillingsebene. Dieselbe ist also nach obiger Definition stets eine krystallonomisch mögliche Fläche der beiden Krystalle, und da es deren unendlich viele giebt, so sind theoretisch an den Krystallen einer Substanz ebenso viele Verwachsungsarten möglich; von diesen kommen aber, wenn überhaupt deren beobachtet werden, gewöhnlich nur solche nach Flächen mit den einfachsten Indices vor. Eine Symmetrieebene kann deshalb nicht Zwillingsebene sein, weil alsdann der zweite Krystall absolut parallel dem ersten, d. h. beide nur ein einziger wären; dagegen kann bei hemiëdrischen oder hemimorphen Krystallen eine Fläche Zwillingsebene sein, welche an den holoëdrischen Symmetrieebene ist, aber durch die Hemiëdrie oder Hemimorphie ihren Charakter als solche eingebüsst hat; solche Zwillingsverwachsungen existiren sehr zahlreich.

Da die beiden verwachsenen Krystalle eines Zwillings im Allgemeinen gleichzeitig, also unter gleichen Verhältnissen entstanden sind, so zeigen sie gewöhnlich auch ganz gleiche Ausbildung, manchmal auch sehr nahe gleiche Grösse. Was nun die Verwachsungsfläche, d. h. diejenige, in welcher sie an einander grenzen, betrifft, so ist diese zuweilen identisch mit der Zwillingsebene*), oft aber eine ganz beliebige krumme Fläche. Das Letztere ist eine natürliche Folge des Umstandes, dass der Ort einer Fläche ein unwesentliches Moment ist, dass dieselbe parallel sich selbst beliebig verschoben gedacht werden kann. Stellt man sich zwei kleine, gleichzeitig sich bildende und zwillingsartig verbundene Krystalle in weiterem Wachsthum begriffen vor, so ist es klar, dass es nur von dem zufälligen Zufluss des Materials abhängt, welcher von den beiden Krystallen ein grösseres Volumen erhält und nach welchen Richtungen er sich besonders ausdehnt; dabei kann er z. B. seitlich über den andern hinauswachsen u. s. f. Es wird also z. B. vorkommen, dass die beiden Krystalle nicht mit der Zwillingsebene auf einander, wie in den unten (Anmerkung) beschriebenen Modellen, sondern auf derselben Seite jener Ebene neben einander liegen und mit einer dazu normalen Fläche verwachsen sind; man braucht sich hierzu, von jenem Zwillingsmodell ausgehend, nur den einen Krystall parallel sich selbst verschoben zu denken. Eine und dieselbe Art der Verwachsung kann also ein sehr verschiedenes Ansehen haben, wie im folgenden § an einigen Beispielen gezeigt werden soll.

*) In diesem Falle erhält man ein geometrisches Modell des Zwillings, wenn man zwei Modelle des einfachen Krystalls in paralleler Stellung mit den der Zwillingsebene parallelen Flächen auf einander legt und den einen um die Normale zu jener (die sogen. Zwillingsaxe) um 180° dreht. In dieser Weise werden die Arten der Verwachsung im Allgemeinen in den Lehrbüchern erläutert. Da sehr gewöhnlich die Krystalle in der Richtung der Zwillingsaxe verkürzt sind, so fertigt man Modelle der Zwillinge meist so, dass man das eines einfachen Krystalls nach der Zwillingsebene halbirt und dann um 180° dreht (Drehungsaxe ⊥ Zwillingsebene); solchen Modellen stehen natürliche Krystalle oft in der Ausbildung sehr nahe.

Für die symmetrischen Zwillinge gilt der folgende Satz: Jede krystallonomisch mögliche Fläche des einen Krystalls ist zugleich eine solche des andern. Da dieser Satz jedoch nur ein theoretisches Interesse hat, möge in Betreff des Beweises verwiesen werden auf »Naumann, Elem. d. theoret. Krystallographie, Leipzig 1856«, S. 62 f.

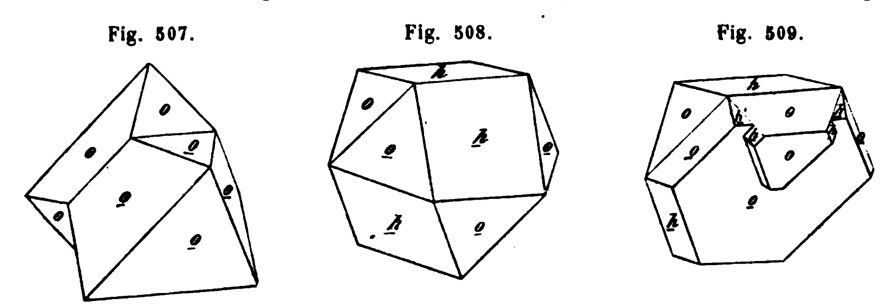
Wie aus den nunmehr folgenden Beispielen hervorgeht, werden bei vielen Zwillingsgesetzen scheinbare äussere Analogien hervorgerufen mit andern Systemen von höherer Symmetrie; so z. B. erscheint die Verwachsung zweier asymmetrischer Krystalle an einem Ende oft wie ein einheitlicher monosymmetrischer Krystall, daher, wenn dieses allein ausgebildet ist, nur durch physikalische Hülfsmittel die Unterscheidung von einem solchen möglich ist. Diese Analogie der äussern Formen mit denen anderer Systeme zeigt sich besonders oft, wenn sich die Zwillingsbildung wiederholt, d. h. wenn mit dem zweiten Krystall nach demselben Gesetz ein dritter, vierter u. s. f. verbunden ist (Drillinge, Vierlinge etc., polysynthetische Krystalle).

In den folgenden §§ sollen nun die verschiedenen Arten der Zwillingsverwachsungen an einer Reihe der wichtigsten Beispiele erläutert werden.

§. 105. **Symmetrische Zwillingsverwachsungen des regulären Systems.** Nach der im vorigen § gegebenen Definition der Zwillingsebene kann dieselbe im regulären System eine Fläche jeder beliebigen Form, ausser einer des Hexaëders oder Dodekaëders, sein, falls die verbundenen Krystalle holoëdrische sind; für die plagiëdrisch hemiëdrischen Krystalle wären ausserdem auch diese Flächen möglich; wenn zwei tetraëdrisch hemiëdrische Krystalle verbunden sind, so können sie, da sie nicht symmetrisch sind zu den Würfelflächen, auch eine solche zur Zwillingsebene haben, endlich können aus demselben Grunde zwei pentagonal hemiëdrische nach einer Dodekaëderfläche verwachsen sein. Von allen diesen möglichen Verwachsungen sind indess nur wenige verwirklicht, und zwar im Wesentlichen folgende:

Zwillingsebene eine Octaëderfläche: Sind die beiden Krystalle selbst als Octaëder ausgebildet, ungefähr gleich gross und mit der Zwillings-

Fig. 507. Fig. 508. Fig. 509.

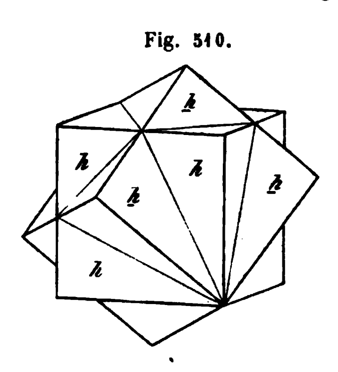


ebene selbst verwachsen, so haben sie, da sie gewöhnlich nach der Zwillingsaxe verkürzt erscheinen, das Ansehen der Fig. 507*); die Zwillings-

*) Hier, wie in den folgenden Figuren, hat ein Krystall die übliche Stellung, die ihm als einfachen zukommt; die Flächenzeichen des anderen sind unterstrichen, z. B. $\underline{o}$.

kanten bilden ein regelmässiges Sechseck und sind abwechselnd ein- und ausspringend, und da einspringende Winkel an einem einfachen Krystall nicht auftreten können, so ist ein solcher leicht als Zwilling zu erkennen (Beispiele Spinell S. 217, Magneteisenerz S. 217). Wenn dagegen die Einzelkrystalle nicht einfache Octaëder, sondern z. B. Combinationen mit dem Würfel sind, so können sie wie Fig. 508 erscheinen, d. h. ohne einspringende Winkel, einer hexagonalen Combination zweier trigonalen Pyramiden mit der Basis (d. i. die Zwillingsebene) gleichend (Beispiel Bleiglanz S. 217). Sind bei einer solchen Verwachsung die beiden Krystalle ungleich gross, so können sie in der mannigfaltigsten Weise, der eine über den andern, übergreifen; s. eine Anzahl solcher Formen in den Abbildungen zu der Arbeit von Sadebeck, »über die Krystallisation des Bleiglanzes, Zeitschr. d. d. geolog. Gesellsch. 1874, 617«, von denen in Fig. 509 eine copirt ist. Sind die nach dem Octaëder verwachsenen Krystalle als Hexaëder ausgebildet, so erscheinen sie gewöhnlich ganz durch einander gewachsen, wie es Fig. 510 darstellt; hier sind beide Hexaëder gleich gross und genau concentrisch, während dies an natürlichen Krystallen selbstverständlich nicht der Fall ist; ist das eine Hexaëder z. B. beträchtlich kleiner, so ragen nur einige Ecken desselben um ein Weniges über die Flächen des anderen hervor u. s. w. (Beispiel Flussspath S. 217).

Fig. 510.



Zwillingsebene eine Fläche des Ikositetraëders 202: Bei gewissen tetraëdrisch hemiëdrischen Substanzen (Zinkblende, Fahlerz S. 235, 236) kommen Verwachsungen vor, welche identisch zu sein scheinen mit denen des vorigen Gesetzes, jedoch nach der Octaëderfläche, welche zugleich die der Verwachsung ist, nicht symmetrisch sind, indem einer Fläche des

Fig. 511.

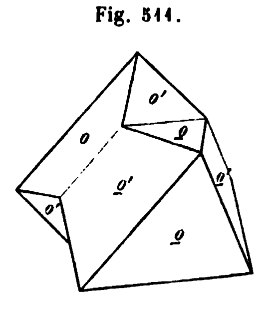
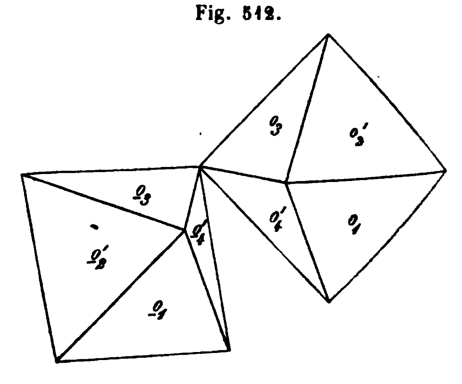


Fig. 512.



positiven Tetraëders o stets eine solche o' des negativen gegenüber liegt, s. Fig. 511. Definirt man eine Zwillingsverwachsung so, wie es S. 436

in der Anmerkung erwähnt wurde, so ist dies Gesetz allerdings gleichlautend mit dem vorigen, denn man gelangt, von der parallelen Stellung beider Krystalle ausgehend, zur Stellung derselben, wenn man den zweiten, die Normale zur Octaëderfläche als Drehungsaxe, um 180° dreht. Dieser Zwilling kann aber auch als ein symmetrischer betrachtet werden, wie aus Fig. 512 ersichtlich, dessen Zwillingsebene diejenige Fläche des Ikositetraëders $2O2$ ist, welche die Ecke, in der sich die beiden Krystalle berühren, schief abstumpft, und normal ist zu den beiden in einer Ebene liegenden Octaëderflächen o_1 und $\underset{\cdot}{o}_1$. Denkt man sich bei dieser Zwillingsstellung den einen der beiden Krystalle so weit, parallel sich selbst, verschoben, bis die hintere, $\underset{\cdot}{o}_1$ gegenüber liegende Fläche auf o_1 aufliegt, so entsteht die Verwachsung Fig. 511.

Zwillingsebene eine Hexaëderfläche: Denkt man sich zu einem Tetraëder ein gleiches symmetrisch in Bezug auf eine Fläche von $\infty O \infty$ gestellt und dann beide ganz durch einander gewachsen, so erhält man die Verwachsung Fig. 513. In der Natur findet sich eine Verwachsung nach diesem Gesetz besonders häufig beim Diamant (S. 235), dann aber stets

Fig. 513.

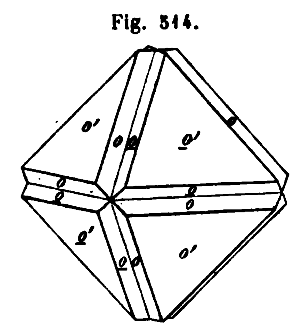


Fig. 514.

so ausgebildet, wie Fig. 514 zeigt, nämlich mit den Flächen des Gegentetraëders $o' = -\frac{O}{2}$, welche fast ebenso gross sind wie die von $o = +\frac{O}{2}$, daher von letzterem nur schmale Rinnen übrig bleiben; zeigen sich diese nur als sehr schmale Einkerbungen der Kanten, so erscheint der Krystall wie ein einfaches Octaëder, um so mehr, als alle acht Flächen, da sie sämmtlich $-\frac{O}{2}$ angehören, gleiche Oberflächenbeschaffenheit zeigen.

Fig. 515.

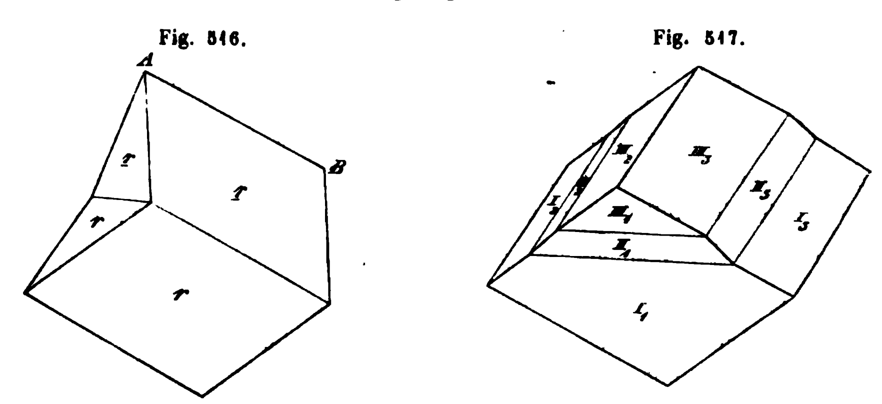
Zwillingsebene eine Dodekaëderfläche: Zwei Pentagondodekaëder, in Bezug auf eine Fläche von ∞O zu einander symmetrisch gestellt, und das eine parallel sich selbst verschoben, so dass sie einander ganz durchdringen, bilden den Zwilling Fig. 515, wie er beim Eisenkies S. 228 häufig vorkommt. In dieser Verwachsung ist nun die vollständige Symmetrie der holoëdrischen regulären Krystalle ebenso wieder hergestellt wie in derjenigen der beiden Te-

traëder Fig. 513. — Ausser diesen Zwillingsgesetzen kommt noch sehr selten beim **Bleiglanz** (s. Sadebeck, Zeitschr. d. d. geol. Gesellsch. 1874) eine Verwachsung nach dem Pyramidenoctaëder $4O$ vor.

§. 106. **Symmetrische Zwillinge des hexagonalen Systems.** Zufolge der Definition der Zwillingsebene können folgende Flächen bei holoëdrischen Krystallen als solche fungiren: die einer dihexagonalen Pyramide, die eines dihexagonalen Prismas (Beides noch nicht beobachtet), die einer hexagonalen Pyramide (beobachtet an dem **Tridymit**, der holoëdrisch hexagonalen Modification von SiO^2, dessen mannigfaltige Verwachsungen G. vom Rath, Poggendorff's Ann. d. Phys. 152,1 beschrieb). Bei den rhomboëdrisch hemiëdrischen Krystallen treten hierzu noch die Basis und das Prisma erster Ordnung. welche als Zwillingsebenen beide zu derselben Verwachsung führen. Bei den pyramidal hemiëdrischen Krystallen können Zwillinge vorkommen nach den Flächen des Prismas erster oder zweiter Ordnung. Endlich sind bei den tetartoëdrischen Krystallen dieses Systems Zwillinge nach jeder Art von Flächen möglich, da dieselben nach keiner der Symmetrieebenen der holoëdrischen symmetrisch sind. Von diesen verschiedenen Verwachsungsarten sollen nunmehr einige Beispiele erläutert werden:

Zwillingsebene eine Rhomboëderfläche: Dieses Gesetz entspricht vollkommen demjenigen in der Holoëdrie, nach welchem die Zwillingsebene eine Pyramidenfläche ist. Als Beispiel möge das an den Krystallen des **Kalkspaths** am häufigsten vorkommende Gesetz dienen, nach welchem die Zwillingsebene eine Fläche von $-\frac{1}{2}R$, d. i. demjenigen Rhomboëder, welches die Polkanten des Spaltungsrhomboëders grade abstumpft. Fig. 516 stellt zwei Spaltungsrhomboëder, jedes nur zur Hälfte ausgebildet und mit der Zwillingsebene, der Abstumpfung der Polkante AB, an einander ge-

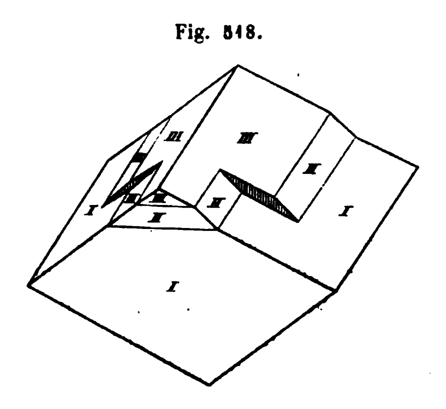
Fig. 516. Fig. 517.



wachsen, dar. In dieser Weise sind jedoch die Kalkspathzwillinge selten ausgebildet, sondern gewöhnlich so, dass an den Krystall II Fig. 517 (die Zwillingsebene von I und II ist hier nicht die Abstumpfung der seitlichen Polkante, wie in der vorigen Figur, sondern der nach vorn herablaufenden ein dritter III, nach derselben Ebene symmetrisch, angewachsen ist. Da

nun *III* und *I* parallel sind, so kann man sie als einen einzigen Krystall betrachten, welcher eine in Zwillingsstellung befindliche parallelwandige Lamelle, *II*, umschliesst; die Flächen 2 und 3 (und ihre parallelen), deren Kante die Zwillingsebene abstumpft, fallen für beide Krystalle zusammen, dagegen bildet die Kante zwischen I_1 und II_1 einen einspringenden (die parallelen hinteren Flächen einen ausspringenden) Winkel von 141° 46′, diejenige von II_1 und III_1 einen ebenso grossen ausspringenden. Die Zwillingslamelle erscheint also nur auf der unteren vorderen und der dieser parallelen Fläche des Spaltungsrhomboëders als ein meist sehr schmaler gradliniger Streifen, welcher genau der längeren Diagonale der Rhombusfläche parallel verläuft. Gewöhnlich sind nun in ein solches Rhomboëder eine grössere Zahl derartiger Zwillingslamellen eingeschaltet, so dass dasselbe auf zwei gegenüber liegenden Flächen eine Streifung, parallel der längeren Diagonale, zeigt. Eine solche Zwillingslamelle setzt nun zuweilen in eine andere Ebene über, und es ist aus Fig. 518 leicht ersichtlich, dass alsdann ein Hohlraum entstehen muss, welcher in Form einer Röhre von rhombischem Querschnitt den Krystall von einer Seite bis zur andern durchzieht; hört eine solche Zwillingslamelle inmitten des Krystalls ganz auf, so muss statt der Röhre eine parallelwandige Kluft, parallel einer Spaltungsfläche, bis an die beiden andern heranreichend, erscheinen, und auch dies beobachtet man häufig. Nun können aber die Zwillingslamellen dieser Art nicht nur nach

Fig. 518.



einer Fläche von $-\frac{1}{2}R$, sondern auch nach den beiden anderen auftreten; wo deren zwei, verschiedenen Ebenen angehörig, sich durchkreuzen, ist ebenfalls keine vollständige Ausfüllung des Raumes durch Krystallsubstanz möglich, und es entsteht somit ein röhrenförmiger Hohlraum auf der Durchkreuzungslinie der beiden Lamellen. Diese hohlen Kanäle im Innern der Kalkspathkrystalle, welche durch die Doppelbrechung als zwei von dem Punkte aus, wo sie die Oberfläche berühren, divergirende Röhren erscheinen, sind schon vor langer Zeit beobachtet worden, aber erst durch eine Untersuchung von G. Rose (»über die im Kalkspath vorkommenden hohlen Kanäle«, Abhandlungen der Berl. Akad. d. Wiss. 1868) als sämmtlich von Zwillingslamellen herrührend erklärt worden. Schon vorher wurde von Reusch (Poggendorff's Ann. 132. Bd. 441) die interessante Entdeckung gemacht, dass man Zwillingslamellen nach $-\frac{1}{2}R$ künstlich herstellen könnte, wodurch dann auch die Möglichkeit zur Herstellung jener Kanäle gegeben ist. Schleift man nämlich an ein Spaltungsrhomboëder von Kalkspath, dessen Durchschnitt *abcd* Fig. 519 darstellt (wobei *ab* und *cd* zwei Polkanten, *bc* und *ad* die

Diagonalen zweier Flächen), zwei horizontale Flächen an, wie sie die punktirten Linien andeuten, und lässt mittelst einer Pressung in der Richtung der Pfeile einen Druck auf das Kalkspathstück wirken, so geht ein Abwärtsgleiten der rechten, eine Aufwärtsbewegung der linken Hälfte vor sich, und zwar in der Weise, dass innerhalb eines Raumes, der von zwei Ebenen, parallel der Abstumpfung der Kanten *ab* und *cd*, begrenzt ist, eine Umlagerung der Theilchen bis zur Zwillingsstellung stattfindet, d. h. es entsteht eine Zwillingslamelle nach $-\frac{1}{2}R$, s. Fig. 519 *b*. Da eine solche im Innern

Fig. 519 *a*.

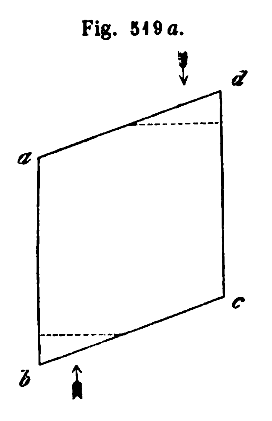
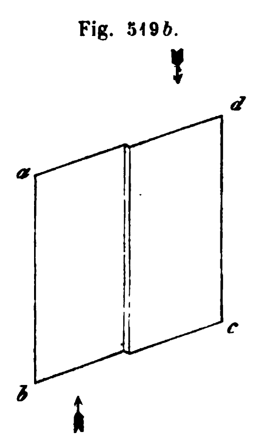


Fig. 519 *b*.



ohne Zertrümmerungen, vielmehr vollkommen homogen und oben und unten von einer (neu entstandenen) spiegelnden, in der Zwillingsstellung befindlichen Fläche begrenzt ist, so unterscheidet sie sich in Nichts von einer natürlichen, und es ist daher sehr wahrscheinlich, dass auch die natürlichen Zwillingslamellen dieses Gesetzes durch Druck ihre Entstehung gefunden haben.

Zwillingsebene die Basis: Es wurde bereits oben bemerkt, dass bei einem rhomboëdrisch hemiëdrischen Krystall dieses Gesetz identisch sei mit demjenigen: »Zwillingsebene eine Fläche des Prismas erster Ordnung«. Dies geht sehr deutlich aus dem in Fig. 520 und 521 gewählten Beispiel hervor, welche sich ebenfalls auf Kalkspath beziehen. Fig. 520 stellt zwei nach diesem Gesetz mit der Basis verwachsene Spaltungsrhomboëder dar, welche ebenso symmetrisch sind in Bezug auf eine Fläche von ∞P, wenn man sich das eine parallel verschoben denkt, bis es neben dem andern befindlich ist. Vergrössert man die drei

Fig. 520.

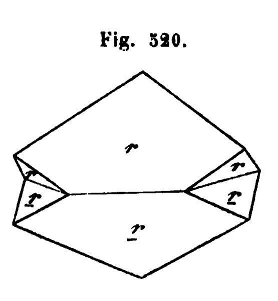
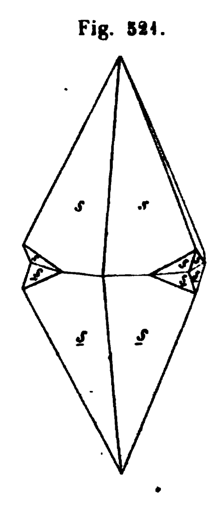


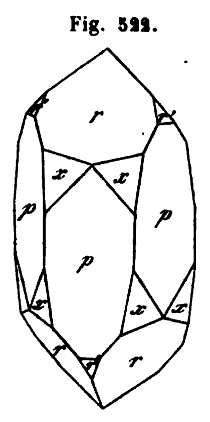
Fig. 521.



oberen und die drei unteren Flächen dieses Zwillings durch Abspalten, so erhält man eine trigonale Pyramide ohne einspringende Winkel, welche dadurch als Zwilling kenntlich ist, dass die Spaltbarkeit der oberen Hälfte nicht in die untere sich fortsetzt, und umgekehrt. Fig. 521 ist ein Zwilling desselben Gesetzes, gebildet von zwei mit der Basis verwachsenen Skalenoëdern $+R3$.

Zwillingsebene eine Fläche des Prismas zweiter Ordnung: Von diesem Gesetz wollen wir ein Beispiel aus der Tetartoëdrie wählen, nämlich eine Verwachsung des Quarzes, S. 300. Wenn ein rechts drehender Quarzkrystall eine Combination von $r = +R$, $r' = -R$, $p = \infty P$ und $x = +\frac{6P\frac{6}{5}}{2}r$ nach einer Fläche von $\infty P2$ ein Spiegelbild liefert, so ist der zu ihm in Bezug auf diese Fläche symmetrische Krystall ein solcher, dessen r, r' und p absolut parallel sind denen des ersten, an welchem aber statt des rechten das entsprechende linke positive Trapezoëder auftritt: es ist also ein links drehender. Denkt man sich nun beide Krystalle so vollkommen durch einander gewachsen, dass sie wie ein einziger erscheinen, s. Fig. 522, so können an diesem Zwilling nicht, wie in Fig. 506, Grenzen von matten und glänzenden Flächen die Verwachsung andeuten, da die gleichbeschaffenen Flächen hier zusammenfallen, es müssen dagegen, wenn die Art der Durchwachsung eine derartig regelmässige ist, dass die Prismenkanten abwechselnd dem einen und dem andern Krystall angehören, das rechte und linke Trapezoëder zusammen auftreten und ein vollständiges Skalenoëder bilden. Dass solche Krystalle nun in der That keine einfachen, sondern Zwillinge eines rechten und eines linken sind, zeigt die optische Untersuchung, welche das Resultat liefert, dass diejenigen Theile des Krystalls, deren äussere Begrenzung das rechte Trapezoëder bildet, rechts drehend, die an dem linken Trapezoëder links drehend sind (Groth, Poggendorff's Ann. 137. Bd. 433).

Fig. 522.

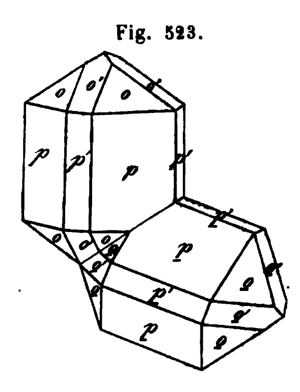


§. 107. **Symmetrische Zwillinge des tetragonalen Systems.** Bei den holoëdrischen Krystallen dieser Abtheilung kann als Zwillingsebene auftreten eine ditetragonale Pyramide oder ein dergleichen Prisma, doch ist eine solche Verwachsung noch nicht beobachtet; ferner eine tetragonale Pyramide, in welchem Falle ein Unterschied zwischen einer solchen erster und zweiter Ordnung nicht existirt, da derselbe auf der willkürlichen Wahl der Nebenaxen beruht. Verwachsungen nach einem tetragonalen Prisma oder der Basis führen bei holoëdrischen Krystallen zum Parallelismus derselben. Dagegen sind Zwillinge nach den Flächen der tetragonalen Prismen möglich in der trapezoëdrischen und der pyramidalen Hemiëdrie, nur nach einem Prisma, nämlich dem zweiter Ordnung, bei sphenoidisch hemiëdrischen

Krystallen. Endlich kann auch die Basis als Zwillingsebene fungiren, wo dieselbe nicht mehr Symmetrieebene ist, d. h. bei trapezoëdrisch und sphenoidisch hemiëdrischen (in letzterem Falle ist der Zwilling identisch mit dem nach $\infty P \infty$) und bei hemimorphen Krystallen, wenn die Hauptaxe die Axe der Hemimorphie ist. Von diesen Verwachsungsarten wollen wir die beiden folgenden Beispiele kennen lernen:

Zwillingsebene eine Fläche einer tetragonalen Pyramide: Fig. 523 zeigt einen Zwilling von Zinnstein S. 322 nach diesem Gesetz, dessen Einzelkrystalle auch mit derselben Fläche verwachsen sind; bei der S. 322 gewählten Stellung ist die Zwillingsebene eine Fläche von $P\infty$, demnach fallen vorn und hinten die Flächenpaare von $p' = \infty P\infty$ in eine Ebene, da sie normal zur Zwillingsebene sind; die Bezeichnungen sind dieselben wie in Fig. 365. Da eine tetragonale Pyramide aus vier Paaren paralleler Flächen besteht, so kann an einem Krystall nicht blos nach einem derselben, sondern auch noch symmetrisch in Bezug auf das zweite, dritte und vierte Paar, je ein Krystall angewachsen sein, und so ein Fünflingskrystall entstehen, der bei vollständiger Durchwachsung aller Einzelkrystalle gleichsam die tetragonale Symmetrie wieder herstellt, welche im Zwilling gestört ist.

Fig. 523.



Zwillingsebene eine Fläche eines tetragonalen Prismas: Fig. 524 zeigt zwei Krystalle des wolframsauren Calciums, Scheelit S. 333, Fig. 400 vertical von oben gesehen, welche zu einander symmetrisch stehen in Bezug auf eine Fläche $\infty P\infty$, welche die Basiskante der Pyramide

Fig. 524.

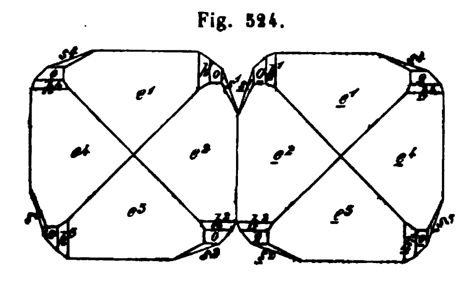
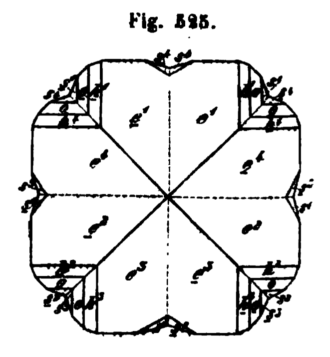


Fig. 525.

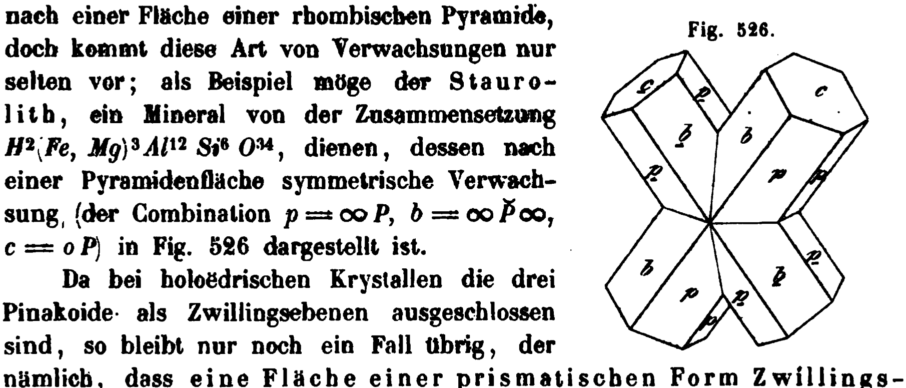


$e = P\infty$ abstumpfen würde; dieselben sind auch zu einander symmetrisch in Bezug auf das Prisma ∞P, die Abstumpfung der Basiskanten von $o = P$. Zwei Krystalle in dieser relativen Stellung erscheinen nun vollständig durch einander gewachsen, wie es Fig. 525 darstellt (ebenfalls von oben gesehen), so dass von den acht Achteln des Zwillings je vier abwechselnde dem einen,

vier dem anderen Krystall angehören, wie es die übereinstimmende Numerirung der Flächen e, $h = \frac{P3}{2}$ und $s = \frac{3P3}{2}$ in Figg. 524 und 525 zeigt, wobei von den Flächen e je eine des einen mit einer des anderen in eine Ebene fällt. Das Ganze erscheint also wie eine einfache tetragonale Pyramide von der Gestalt von $P\infty$, aber mit einspringenden Winkeln an den vier Basisecken und den Mitten der Basiskanten, und hat dieselbe Symmetrie, wie ein holoëdrischer einfacher tetragonaler Krystall. Bei einer nicht ganz vollständigen Durchdringung der beiden Krystalle können diese einspringenden Ecken theilweise fehlen, oder sie können durch grössere Ausdehnung von e und o zum Verschwinden gebracht werden, wobei dann die Verwachsung ganz wie ein einfacher Krystall, an welchem die Pyramide h holoëdrisch auftritt, erscheint. Da bei diesem Zwillingsgesetz die optischen Axen beider Krystalle parallel sind, so verhält sich eine derartige Verwachsung auch optisch, wie ein einfacher Krystall.

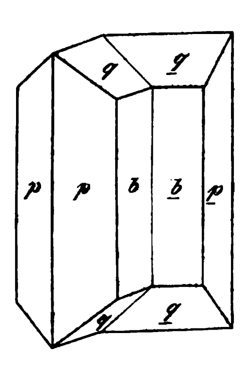
§. 108. **Symmetrische Zwillinge des rhombischen Systems.** Die holoëdrischen Krystalle dieses Systems können zu Zwillingen verbunden sein nach einer Fläche einer rhombischen Pyramide, doch kommt diese Art von Verwachsungen nur selten vor; als Beispiel möge der Staurolith, ein Mineral von der Zusammensetzung $H^2(Fe, Mg)^3 Al^{12} Si^6 O^{34}$, dienen, dessen nach einer Pyramidenfläche symmetrische Verwachsung, (der Combination $p = \infty P$, $b = \infty \breve{P} \infty$, $c = o P$) in Fig. 526 dargestellt ist.

Fig. 526.



Da bei holoëdrischen Krystallen die drei Pinakoide als Zwillingsebenen ausgeschlossen sind, so bleibt nur noch ein Fall übrig, der nämlich, dass eine Fläche einer prismatischen Form Zwillingsebene ist, wobei es natürlich gleichgültig ist, ob es die eines verticalen Prismas, eines Makrodomas oder eines Brachydomas ist. Solche Verwachsungen sind nun sehr zahlreich; da sie aber einander analog sind, wird es genügen, sie an zwei Beispielen zu erörtern:

Fig. 527.

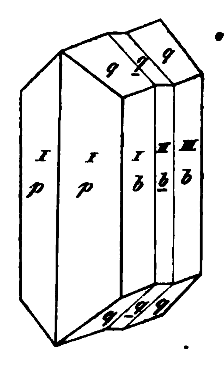


Arragonit S. 362 Fig. 527, Combination $p = \infty P$, $b = \infty \breve{P} \infty$, $q = \breve{P} \infty$; Zwilling nach einer Fläche von ∞P und mit derselben Fläche verwachsen; sehr oft ist der einspringende Winkel der Flächen b durch Vorherrschen von p verdeckt, und es erscheint nur derjenige von q. Häufig ist an den zweiten Krystall noch ein dritter nach demselben Gesetz angewachsen; hierbei sind aber zwei Fälle möglich: entweder ist die Zwillingsfläche des zweiten und dritten Krystalls

parallel derjenigen des ersten und zweiten, oder sie ist dem anderen Prismenflächenpaar parallel.

Betrachten wir zunächst den ersten, in Fig. 528 wiedergegebenen Fall, so ist klar, dass Krystall *I* und *III* parallel sind, die Verwachsung also erscheint als ein Krystall, in welchem eine in Zwillingsstellung befindliche Lamelle eingewachsen ist. Nicht selten finden sich Arragonitkrystalle mit einer Anzahl solcher Zwillingslamellen, welche eine Streifung der Flächen *q* und *b* verursachen. Ein Arragonitkrystall mit einer derartigen Lamelle bietet in optischer Beziehung besonderes Interesse dar: Schleift man nämlich an denselben oben und unten die Basis an und blickt etwas schräg durch diese Flächen nach einem hellen Licht (oder einer hellen Oeffnung in einem dunkeln Schirm), so sieht man die Interferenzcurven des einen der beiden Axenbilder ohne Polarisationsapparat. Die Ursache dieser Erscheinung ist die eingelagerte Zwillingslamelle. Da nämlich die erste Mittellinie parallel der Verticalaxe, und der Axenwinkel des Arragonit klein ist, so bilden die einer optischen Axe der Zwillingslamelle entsprechenden Strahlen einen sehr spitzen Winkel mit deren einer verticalen Prismenfläche parallelen Begrenzungsfläche: fällt nun in einer geeigneten Richtung Licht auf die eine Endfläche des Krystalls auf, so wird dies doppelt gebrochen; die beiden Strahlenbündel treffen unter verschiedenen, aber bei beiden sehr spitzen Winkeln auf die eingelagerte Lamelle, werden also hier sehr verschieden abgelenkt, resp. der eine total reflectirt. In der Richtung der optischen Axe des Krystalls *II* tritt also nur ein linear polarisirtes Strahlenbündel in denselben ein, der Krystall *I* wirkt gerade so, wie der polarisirende Nicol des Polarisationsinstrumentes. Die in jener Richtung durch *II* hindurchgegangenen Strahlen werden in *III* wieder doppelt gebrochen, weil in diesem ihre Richtung wegen der Zwillingsstellung nicht die einer optischen Axe ist, sie verlassen die obere Endfläche also in verschiedenen Richtungen; bringt man nun das Auge in diejenige, welche den Strahlen entspricht, deren Vibrationsrichtung senkrecht zu derjenigen der aus *I* in *II* eintretenden ist, so erhält man die auf eine Schwingungsebene zurückgeführten Componenten der in *III* eintretenden Strahlen, d. h. *III* wirkt ebenso wie der mit dem Polarisator gekreuzte Analysator eines Polarisationsinstrumentes, und man erblickt, in dieser Richtung nach einer hellen Oeffnung hinsehend, indem man den Krystall dem Auge nähert, auf jener die dunkle Hyperbel mit den innersten Farbenringen des optischen Axenbildes. Solche Krystalle, welche ohne Polarisationsapparat die Interferenzringe zeigen, hat man idiocyclophanische genannt.

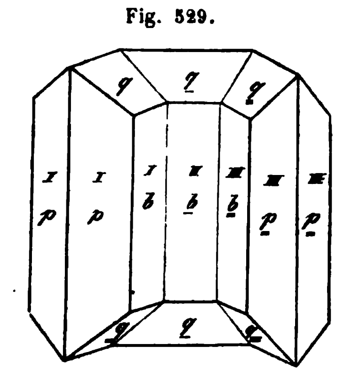
Fig. 528.



Es wurde oben erwähnt, dass noch eine zweite Art von Drillingsverwachsungen eines derartigen rhombischen Krystalls nach demselben Gesetz

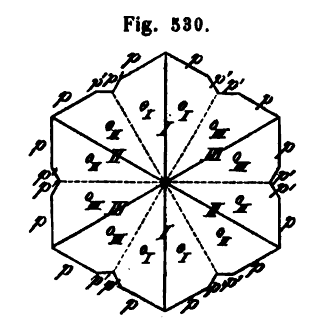
möglich wäre. Diese ist in Fig. 529 dargestellt; hier ist die Zwillingsfläche von *II* und *III* nicht parallel der von *I* und *II*, sondern es ist die zweite Prismenfläche des Krystalls *II*; in Folge dessen hat *III* eine andere Stellung als *I*. Würde sich an *III* in derselben Weise ein vierter Krystall anlegen u. s. f., so könnten, da der Prismenwinkel nahe 120°, deren sechs einen Ring schliessen. Sehr häufig sind Krystalle von der relativen Stellung *I*, *II*, *III* auch ganz durcheinandergewachsen; sind sie nach *b* tafelförmig, so erscheint der Drilling, von oben gesehen, wie ein sechsstrahliger Stern, dessen Strahlen nahe 60° mit einander bilden. Die Krystallgruppe hat sodann sehr nahe die Gestalt einer solchen, deren Symmetrie gleich der des hexagonalen Systems ist, und das Bestreben der Krystalle, sich zu Verwachsungen zu verbinden, welche eine höhere Symmetrie haben oder wenigstens nachahmen, als es diejenige der einzelnen Krystalle ist, zeigt sich darin, dass im rhombischen System besonders häufig Zwillingsbildungen nach einer prismatischen Form auftreten, deren Winkel wenig von 120° verschieden ist, welche also, wenn drei Krystalle sich in der angegebenen Weise verbinden, anscheinend hexagonale Formen liefern. Ein besonders lehrreiches Beispiel hierfür bildet das

Fig. 529.



Schwefelsaure Kalium S. 363, dessen Drillingskrystalle auf den ersten Anblick wie einfache hexagonale Pyramiden aussehen. In Fig. 530 ist ein solcher, vertical von oben gesehen, abgebildet. Denkt man sich den Krystall *I* allein vorhanden und zu beiden Seiten vervollständigt, so bildet er eine rhombische Pyramide $o_I\ o_I\ o_I\ o_I$, deren Basiskanten durch die vier, in der Figur nur als Linien erscheinenden Flächen p_I des Prismas ∞P gerade abgestumpft sind; endlich erscheinen noch die vier Flächen des ebenfalls verticalen Prismas $p'_I = \infty \breve{P}3$. Da der Winkel von ∞P sehr nahe 120°, so ist derjenige von $\infty \breve{P}3$ an derselben Seite nicht viel verschieden von 60°, und eine Fläche des letzteren nahezu normal zu einer nicht anliegenden von ∞P (wäre der Winkel von ∞P genau = 120°, so wäre der von $\infty \breve{P}3$ genau = 60°, und die erwähnten beiden Flächen würden sich unter 90° schneiden). Nach einer Fläche von $\infty \breve{P}3$ symmetrisch zu *I* ist nun der Krystall *II*, und nach dem anderen Flächenpaar desselben Prismas der Krystall *III* mit *I* verbunden. Da nach Obigem die Zwillingsebene nahe senkrecht zu einer *p*-Fläche eines jeden Krystalls steht, so fallen je zwei

Fig. 530.



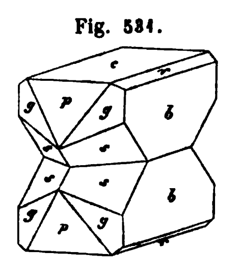
derartig gelegene Flächen nahezu in eine Ebene (sie bilden einen einspringenden Winkel von 178° 44′), und da die Neigung von o zu p natürlich in allen drei Krystallen dieselbe ist, so müssen auch die aneinanderstossenden pyramidalen Flächentheile von I und II und von I und III fast zusammenfallen. Verschwinden nun die einspringenden Winkel der p'-Flächen durch vorherrschende Ausbildung der Pyramide o, so entsteht eine Form, welche nur bei genauer Betrachtung von einer hexagonalen Pyramide mit abgestumpften Basiskanten unterschieden werden kann, indem nämlich jede ihrer Flächen nicht aus einer Ebene besteht, sondern nach vertical herablaufenden Grenzen geknickt erscheint. Um dies zu erkennen, braucht man nur das Licht einer einigermassen entfernten Flamme von den Pyramiden- oder Prismenflächen reflectiren zu lassen, wobei immer die Hälfte derselben beleuchtet erscheint.

Bei den sphenoidisch hemiëdrischen Krystallen des rhombischen Systems sind, da sie keine Symmetrieebene besitzen, Zwillinge möglich nach einem der Pinakoide, und diese sind dann auch symmetrisch in Bezug auf eines der beiden andern. Denkt man sich zu einem rhombischen Krystall, etwa der Combination eines Prisma mit der Basis und einem rhombischen Sphenoid, einen nach dem Makro- oder Brachypinakoid symmetrischen zweiten, so unterscheidet sich dieser nur dadurch von dem ersten, dass das Sphenoid die entgegengesetzte Lage und Gestalt hat (das linke der beiden enantiomorphen Gestalten, wenn das erste das rechte war); sind nun beide Krystalle mit verticalen Grenzen vollständig durch einander gewachsen, so dass je zwei benachbarte Prismenflächen verschiedenen Krystallen angehören, so erscheinen oben vier Sphenoidflächen, die obere Hälfte einer vollständigen rhombischen Pyramide bildend, unten keine einzige. Derartige scheinbar einfache Zwillingskrystalle beobachtet man z. B. beim Seignettesalz S. 371.

In der monosymmetrischen Hemiëdrie kann es Zwillinge geben nach einem der beiden Pinakoide, nach welchem keine Symmetrie der einzelnen Krystalle vorhanden ist.

Endlich sind auch symmetrische Zwillingsverwachsungen möglich bei hemimorphen Krystallen nach demjenigen Pinakoid, dessen Normale die Axe der Hemimorphie ist. Ein Beispiel hierfür bietet die Verwachsung des Kieselzinkerz S. 425 nach der Basis, Fig. 531, welche hiernach keiner weiteren Erläuterung bedarf; die Form der beiden verwachsenen Krystalle ist sehr ähnlich der Fig. 498, nämlich $c = oP$, $b = \infty \breve{P} \infty$, $r = \breve{P} \infty$, $p = 3\bar{P}\infty$, $g = \infty P$, $s = 2\breve{P}2$.

Fig. 531.



§. 109. Zwillinge des monosymmetrischen Systems.

Symmetrische Verwachsungen nach einer Fläche einer prismatischen Form, wie sie theoretisch wohl möglich sind, hat man bisher nur bei wenigen Substanzen beobachtet (Beispiel Kalifeldspath S. 405 nach $\bar{P}\infty$), weit häufiger dagegen solche nach einer Querfläche. Da es ausser

der Symmetrieebene nur noch zwei Arten von Formen giebt, so sind die beiden genannten Fälle die einzigen, welche im monosymmetrischen Systeme existiren können.

Ein Beispiel für eine Verwachsung nach einer Querfläche bieten sehr gewöhnlich die Krystalle des Gyps (S. 402) Fig. 532 dar, deren Zwillingsebene diejenige Fläche ist, welche bei der gewählten Stellung zum Orthopinakoid wird, d. h. die Abstumpfung der vorderen Prismenkante. Da hier, wie bei jedem Zwilling nach einer Querfläche, die Symmetrieebene *b* für beide Krystalle identische Lage hat, so erscheint das eine Ende des Zwillingskrystalls, in Fig. 532 das untere, wie ein einfacher rhombischer Krystall; die beiden Hemipyramiden *o* und *o̲* bilden scheinbar eine rhombische Pyramide; wäre an deren Stelle ein Hemidoma vorhanden, so würde dieses ein rhombisches Doma bilden. Es leuchtet nun ein, dass es nicht möglich ist, wenn derartige Krystalle nur an dem einen, scheinbar rhombischen Ende ausgebildet sind, ihren wahren Charakter auf rein krystallographischem Wege zu ermitteln. Zuweilen, wie z. B. bei dem Gyps, wird dies durch die Spaltbarkeit ermöglicht, welche in den beiden Hälften des scheinbar einfachen Krystalls eine entgegengesetzte Richtung hat (sie findet, ausser nach $\infty P \infty$ und $\infty P \infty$, welche in beiden gleiche Lage haben, auch nach $+P$ statt). In der einfachsten Weise und unzweideutig wird jedoch die Zwillingsnatur eines solchen Krystalls erkannt durch die optische Untersuchung: man braucht zu diesem Zwecke denselben nur im parallelen polarisirten Licht, durch die Symmetrieebene gesehen, zu betrachten. Wäre z. B. die untere Hälfte des Krystalls Fig. 532 wirklich einem rhombischen einfachen angehörig, so würde die punktirte Gerade die Richtung einer Symmetrieaxe bezeichnen, und der Krystall würde in seiner ganzen Ausdehnung jedesmal dunkel erscheinen (beim Drehen in seiner Ebene *b*), wenn jene Gerade der Schwingungsrichtung des einen der beiden gekreuzten Nicols parallel ist. Handelt es sich jedoch um einen Zwilling nach einer Querfläche, so bilden die Auslöschungsrichtungen (d. s. zwei Hauptschwingungsrichtungen) bestimmte Winkel mit der Zwillingsebene; in den beiden Krystallen liegen sie symmetrisch entgegengesetzt, also können die beiden Hälften niemals zu gleicher Zeit dunkel erscheinen. Sobald also die eine hell, während die andere dunkel, erscheint, so ist damit erkannt, dass der Krystall ein Zwilling und dem monosymmetrischen System angehört.

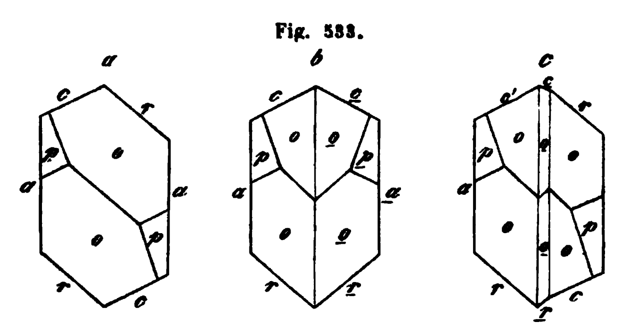
Fig. 532.

Sind von einer optisch zu untersuchenden, monosymmetrisch krystallisirenden Substanz die Krystalle so klein, dass eine genaue Bestimmung der Lage der Hauptschwingungsrichtungen mit dem Stauroskop nicht thunlich ist, so kann man, falls Zwillinge der soeben beschriebenen Art vorkommen, diese zu einer angenäherten Bestimmung jener Richtungen benutzen. Die

eine der beiden im Klinopinakoid liegenden Schwingungsrichtungen bildet einen bestimmten Winkel mit der Zwillingsebene und liegt im einen Krystall nach der einen, im zweiten nach der andern Seite; ihre Richtung im erstern mit derjenigen im letztern bildet also den doppelten Winkel von dem, welchen sie selbst mit der Zwillingsebene einschliesst. Stellt man nun im parallelen polarisirten Licht jene Richtung normal zu einem Nicol, d. h. so, dass die eine Hälfte des Zwillings das Maximum der Dunkelheit zeigt, dreht alsdann den Krystallträger, bis die zweite Richtung dieselbe Lage hat, wobei die andere Hälfte des Zwillings dunkel erscheint, so ist die Hälfte des abgelesenen Drehungswinkels derjenige, welchen die benutzte Schwingungsrichtung mit der Zwillingsebene bildet. Da hierbei der Fehler, welchen man bei der Einstellung auf eine Kante begeht, ganz wegfällt und derjenige bei der Einstellung auf die Auslöschung halbirt wird, so ist diese Methode genauer, als die S. 388 angeführte.

Als ein zweites Beispiel einer Verwachsung, deren Zwillingsebene eine Querfläche ist, möge der **E p i d o t** (S. 404) dienen. Fig. 533 *a* ist die Projection eines einfachen Krystalls dieses Minerals, von der Form der Fig. 460, auf die Symmetrieebene; wie dort, ist auch hier $a = \infty P\!\!\!/ \infty$, $c = oP$, $r = +P\!\!\!/ \infty$, $p = \infty P$, $o = +P$. Fig. 533 *b*, ebenfalls in der Richtung der Orthodiagonale gesehen, ist die Abbildung eines Zwillings nach *a*; hier

Fig. 533.



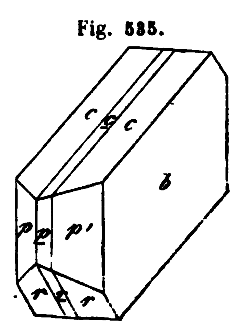
bilden die beiden oberen Flächen $o\,\underline{o}$ einen einspringenden, die unteren $o\,\underline{o}$ einen ausspringenden Winkel; sind die letzteren so gross, dass sie allein die Endigung des nach der Symmetrieaxe prismatischen Zwillings bilden, so erscheint derselbe wie ein einfacher monosymmetrischer Krystall, dessen Symmetrieebene *a* ist; $o\,\underline{o}$ bildet eine Hemipyramide, aber zu dem vorderen prismatischen Flächenpaar $r\,\underline{r}$ fehlen hinten die parallelen (da $c\,\underline{c}$ einen anderen Winkel einschliessen), wodurch der Zwilling sogleich erkannt ist. Sehr häufig ist der in Zwillingsstellung befindliche zweite Krystall dem ersten nur als dünne Lamelle eingelagert, in der Weise, wie es Fig. 533 *c* wiedergiebt. Eisenreiche, ziemlich dunkelgefärbte Epidotkrystalle, welche eine solche Zwillingslamelle enthalten (besonders die vom Sulzbachthal in Tirol), sind in ausgezeichneter Weise **i d i o c y c l o p h a n i s c h** (vergl. S. 446). Da die erste Mittellinie nahe vertical, d. h. fast der Zwillingsebene parallel,

und der optische Axenwinkel ziemlich gross ist (s. S. 404), so gehen hier beide Strahlen, der ordentliche und ausserordentliche, ohne Totalreflexion aus dem ersten in den zweiten Krystall; wegen des ausserordentlich starken Pleochroismus ist jedoch der eine derselben sehr geschwächt; der erste Krystall wirkt also wie eine Turmalinplatte (S. 425), und da ein Theil desselben vor, der andere hinter der Zwillingslamelle sich befindet, so wirkt das Ganze ebenso, als wenn man eine dünne Epidotplatte zwischen zwei parallele Turmaline brächte. Da nun eine optische Axe der Lamelle ungefähr rechtwinkelig auf der Fläche r des Zwillings Fig. 533 c steht, so erblickt man die Farbenringe mit dem schwarzen Büschel, welche dieser Axe entsprechen, wenn man einfach durch das parallele Flächenpaar $r\,r$ hindurch nach dem hellen Himmel sieht.

§. 140. **Zwillinge des asymmetrischen Systems.** In diesem Krystallsystem kann es nur eine einzige Art von symmetrischen Verwachsungen geben, da es nur eine Art von Formen giebt; es können aber Zwillinge nach jeder beliebigen Krystallfläche vorkommen, da keine eine Symmetrieebene ist. Fig. 534 zeigt einen Zwilling von Natronfeldspath (S. 417) der einfachen Combination $c = oP$, $b = \infty\breve{P}\infty$, $p' = \infty P'$, (in der Figur auf der Rückseite), $p = \infty{'}P$, $r = {,}\bar{P}{,}\infty$, dessen Stellung derartig gewählt ist, dass seine Zwillingsebene zum Brachypinakoid wird. Da der Winkel $c : b$ ungefähr 86°, so bilden die Flächen $c\underline{c}$, nach welchen die Krystalle vollkommen spaltbar sind, oben einen ein-, unten einen ausspringenden Winkel von 172°; ebenso ist der Winkel $r\underline{r}$ oben an der Rückseite einspringend, unten vorn ausspringend. Die untere Hälfte, wenn sie allein ausgebildet ist, erscheint demnach vollständig, wie diejenige eines einfachen monosymmetrischen Krystalls, bestehend aus dem Prisma $p'\underline{p}'$, dessen Winkel in diesem Falle sehr ähnlich demjenigen $p\underline{p}$, den beiden stumpfen Hemipyramiden $c\underline{c}$ und $r\underline{r}$, mit der Symmetrieebene b. Nur durch die optische Untersuchung kann ein solcher Krystall mit Sicherheit als ein Zwilling erkannt werden, indem man nämlich, etwa durch eine senkrecht zu b geschliffene Platte, constatirt, dass seine beiden Hälften ungleich liegende Schwingungsrichtungen besitzen.

Fig. 534.

Fig. 535.



Auch an solchen Krystallen kommt häufig eine Wiederholung der Zwillingsbildung vor, indem sich, wie in Fig. 535, an den zweiten Krystall ein dritter in Zwillingsstellung anlegt, oder, da dieser dem ersten parallel sein muss, indem eine Zwillingslamelle eingelagert erscheint. Folgt auf den dritten ein vierter,

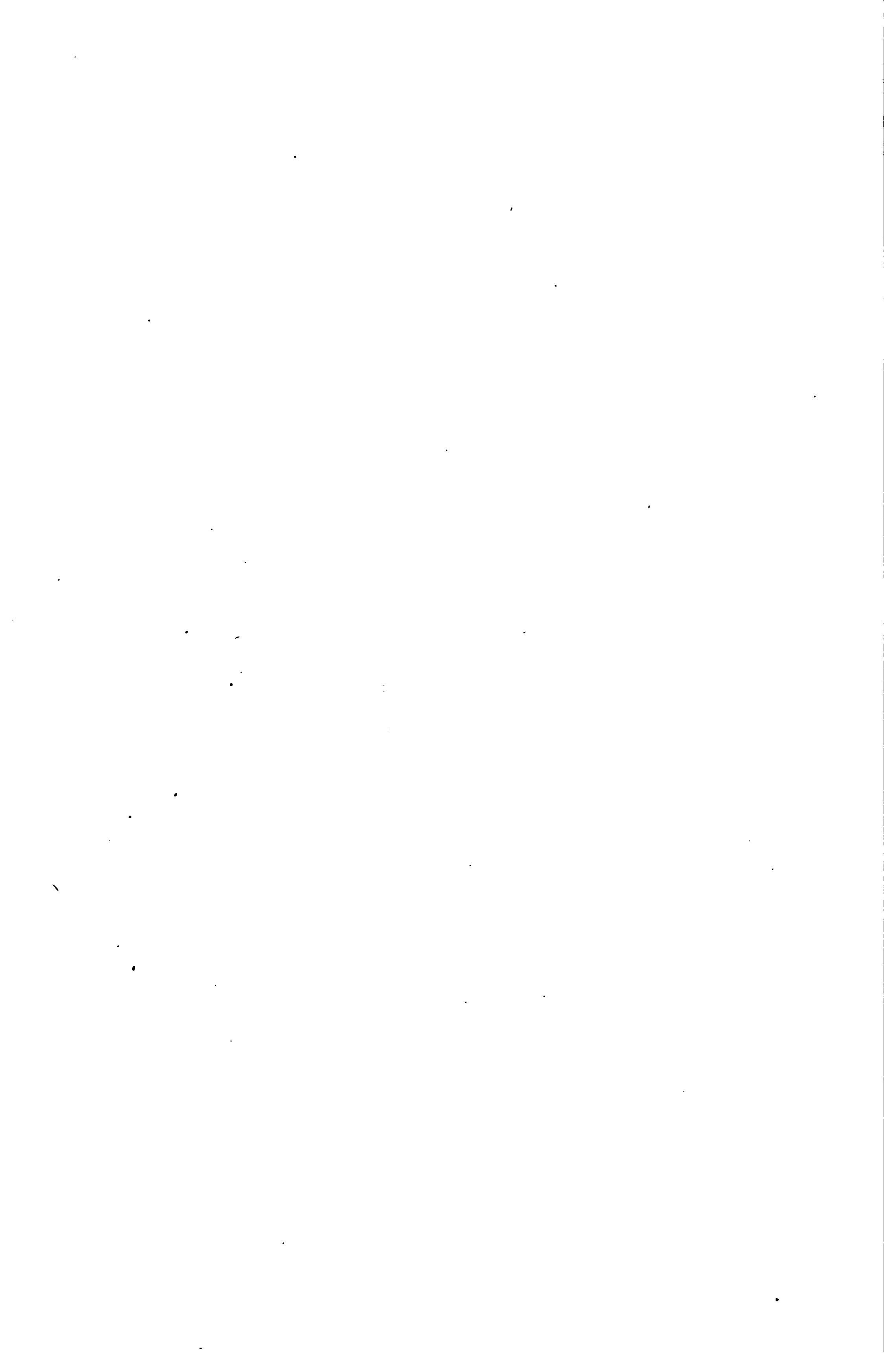
parallel dem zweiten, auf diesen ein fünfter Krystall, parallel dem ersten und dritten u. s. f., so entsteht eine polysynthetische Verwachsung (Viellingskrystall), welche man aber auch betrachten kann als einen Krystall, in welchen eine grosse Zahl unter einander paralleler, also demselben Krystall angehöriger Lamellen in Zwillingsstellung eingewachsen sind. Eine Spaltungsfläche von Natronfeldspath nach $c = oP$ zeigt alsdann eine Streifung, parallel der Kante $c : b$, hervorgebracht durch das Alterniren der nach der einen und der anderen Seite geneigten Flächen c und $\underline{c}$.

Ebenso, wie eine Wiederholung eines Zwillingsgesetzes zur Bildung von Drillingen u. s. w. möglich ist, können auch zwei Zwillinge eines bestimmten Gesetzes sich in der Weise mit einander verbinden, dass ein Krystall der einen Gruppe mit einem der anderen eine symmetrische Verwachsung nach einem zweiten Gesetz bildet; so kommen z. B. Verwachsungen von zwei Natronfeldspathkrystallen nach $\infty \bar{P} \infty$ vor, deren jeder wieder nach $\infty \breve{P} \infty$ mit einem zweiten symmetrisch verwachsen ist.

Das Gleiche gilt auch für die übrigen Krystallsysteme, es können also z. B. zwei monosymmetrische Krystalle nach einer prismatischen Form verwachsen sein, deren jeder wieder die Hälfte eines Zwillings nach einer Querfläche ist (Harmotom), u. s. f.

III. ABTHEILUNG.

DIE APPARATE UND METHODEN ZU KRYSTALLOGRAPHISCH-PHYSIKALISCHEN UNTERSUCHUNGEN.



§. 111. **Goniometer.** Das Instrument, mit welchem zuerst Krystallwinkel gemessen wurden, ist das Contact- oder Anlege-Goniometer, welches im vorigen Jahrhundert von dem Künstler Carangeot, der für den französischen Krystallographen Romé de l'Isle Krystallmodelle anfertigte, erfunden wurde. Dasselbe, in Fig. 536 in einer der jetzt üblichen Formen abgebildet, besteht aus zwei Linealen, *l l* und *l' l'*, welche um eine zu ihrer Ebene normale Axe drehbar sind. Dieselben können mittelst des Knopfes *k* von dem Kreise *r*, um dessen Centrum sie drehbar sind, abgehoben werden. Bringt man nun die zu messende Krystallkante so zwischen die beiden Schneiden *s* und *s'*, dass sie normal zu deren Ebene steht, und dreht die Schenkel der Lineale so weit, dass *s* auf der einen, *s'* auf der anderen Krystallfläche genau aufliegt (was man am besten sehen kann, wenn man das Ganze dabei gegen das Licht hält), so bilden die beiden Lineale offenbar denselben Winkel mit einander, welchen die beiden, in der zu messenden Kante sich schneidenden, Krystallflächen einschliessen. Steckt man nun die Axe derselben wieder in die im Centrum des Kreises *r* befindliche kreisrunde Oeffnung und dreht sie, bis der eine Schenkel an den Stift *o* anschlägt, so zeigt die durch das Centrum gehende Schneide des anderen unmittelbar auf dem Kreise den gesuchten Winkel an. Oft verbindet man auch das eine Lineal fest mit der Kreistheilung, nimmt aber alsdann nur einen Halbkreis. Um auch aufgewachsene Krystalle messen zu können, bei denen oft ein Auflegen der Schenkel wegen der benachbarten Krystalle nicht möglich wäre, kann man dieselben beliebig verkürzen durch Parallelverschiebung beider Lineale. Dieses Instrument kann natürlich nur bei sehr grossen und ganz ebenen Flächen eine grössere Genauigkeit geben, als etwa auf 1°, es dient daher nur zur Orientirung an sehr

Fig. 536.

grossen, für das Reflexionsgoniometer etwa zu unbehülflichen Krystallen, bei der Anfertigung von Modellen u. s. w.

Das Reflexionsgoniometer, 1809 von Wollaston erfunden, ist bereits S. 23 im Princip besprochen worden. Was die nähere Einrichtung desselben betrifft, so ist diese aus Fig. 1 auf Taf. II ersichtlich. Auf einer horizontalen Platte *p* ist ein Fuss *ff* befestigt, dessen oberer Theil die starke Messinghülse *f'*, welche mit *f* aus einem Stück gefertigt ist, und auf der anderen Seite das ebenfalls damit in fester Verbindung stehende Ansatzstück *a'* trägt; an diesem letzteren sind nach zwei entgegengesetzten Richtungen feste Arme *a* (in der Figur ist nur der obere sichtbar) angebracht, deren jeder einen Nonius *n* trägt. Diese Theile sind demnach sämmtlich unbeweglich. An *a* ist ein schwächerer Arm *a''* angeschraubt, welcher eine zusammengesetzte Lupe (einfaches Mikroskop) *l* zur Ablesung der Theilung des Kreises und des Nonius trägt; damit jede Stelle der Theilung des letzteren in die Mitte des Gesichtsfeldes der Lupe gebracht werden kann, ist *a''* innerhalb eines kleinen Kreisbogens beweglich. Auf den Nonius fällt das Licht durch ölgetränktes Papier, welches in dem kleinen Rahmen *r* ausgespannt ist. Durch die Hülse *f'* geht nun die hohle Axe *b*, an welche der getheilte Kreis *k* mittelst Schrauben, die durch den Theil *k'* gehen, fest angeschraubt ist. Da diese Axe durch die am Rande gekerbte Messingscheibe *b'* gedreht wird, so bewegt sich mit der letzteren auch der Kreis und überhaupt der ganze Apparat, mit Ausnahme der Theile *f*, *f'*, *a*, *a'*, *n* und *l*. In der centrischen Durchbohrung der Axe *b* ist nun leicht drehbar die gewöhnlich aus Stahl gefertigte Axe *cc*, welche den Centrir- und Justirapparat mit dem Krystall trägt und durch die Scheibe *c'* bewegt wird.

Um die zu messende Kante des Krystalls in die Axe des Kreises zu bringen, zu centriren, bedarf es zweier, zu einander senkrechter Parallelverschiebungen, parallel der Ebene des Kreises. Die eine dieser Bewegungen wird durch Verschiebung des Schlittens *s* in dem ihn von drei Seiten umfassenden und mit der Axe *c* verbundenen Messingstück *s'* hervorgebracht, die andere durch Herauf- oder Herabschieben des Stiftes *h*, welcher oben in einem Schlitz eine kleine Metallplatte *q* mit dem durch etwas Wachs befestigten Krystall trägt, in der Hülse *h'*. Hat man den letzteren ungefähr richtig auf *q* aufgeklebt (mit der zu messenden Kante *x* nach oben) und dies in den Schlitz von *h* eingesteckt, so bringt man durch jene beiden Bewegungen die Kante in die Verlängerung der Axe des Kreises, bewirkt also, dass beim Drehen der Scheibe *c'* der Krystall sich um die Linie *x* wälzt, diese selbst aber stillsteht. Hierbei bringt man das Auge in eine solche Stellung, dass man die Kante *x* und zugleich einen dahinter befindlichen Gegenstand, z. B. die hintere Kante der Fussplatte *p*, deutlich sieht und beide sich decken, und ändert den Ort des Krystalls so lange, bis diese Deckung für eine ganze Umdrehung bestehen bleibt; alsdann ist der Krystall centrirt.

Um die Kante *x* zu justiren, d. h. der Drehungsaxe des Instrumentes

parallel zu machen, muss man den Krystall innerhalb zweier, auf einander senkrechter Ebenen neigen können. Dies geschieht 1) durch Drehen des runden Stiftes *h* in der Hülse *h'*, 2) durch Drehen des Armes *z* um das Charnier *y*, mit welchem er an *v* befestigt ist (*v* und *s* bilden ein aus einem Stück gefertigtes, rechtwinkeliges Knie). Durch diese beiden Drehungen kann man dem Krystall jede beliebige Neigung gegen die Ebene des Theilkreises geben, also kann man ihn auch, wenn er schief dagegen steht, in die dazu normale Richtung bringen. Ist die Fussplatte des Instrumentes horizontal gestellt, so wird alsdann ein in einiger Entfernung (am hellen Fenster) aufgehängter verticaler Faden, welcher unten ein kleines Gewicht trägt, oder eine verticale Fenstersprosse, in beiden Krystallflächen gespiegelt (zu welchem Zwecke man das Auge sehr nahe an den Krystall bringen muss), ebenfalls vertical erscheinen. Dies kann man am besten controliren, wenn an der Fussplatte *p* ein kleiner horizontaler Spiegel *w* angebracht ist, in welchem man zu gleicher Zeit das Bild jenes Fadens oder der Sprosse erblickt; man neigt dann den Krystall so weit, dass das von der einen, wie der anderen Fläche reflectirte Bild jenem vollkommen parallel ist, und dreht alsdann das ganze Instrument um eine verticale Axe, bis das Bild einer Krystallfläche, also auch der anderen, mit dem des Spiegels sich deckt. Ist dies der Fall, so stehen nicht nur beide Krystallflächen, also auch ihre Kante senkrecht zu der Ebene des Theilkreises, sondern das verticale Object (Faden oder Fenstersprosse) befindet sich ganz in der Ebene, welche durch den Krystall, dem Theilkreise parallel, geht. Betrachten wir nun das im Spiegel *w* reflectirte Bild eines möglichst entfernten Gegenstandes (einer Dachkante, einer horizontalen Fenstersprosse in wenigstens 8—10 Meter Abstand, oder dergl.), und drehen die Axe *c*, bis das von einer der beiden Krystallflächen gespiegelte Bild desselben Gegenstandes mit jenem genau zur Deckung kommt, so ist die Reflexionsebene offenbar jene dem Kreise parallele. Dieselbe bleibt sie auch, wenn wir, diesmal aber mit der Scheibe *b'*, den Kreis und den Krystall drehen, bis das von der zweiten Krystallfläche reflectirte Bild mit dem vom Spiegel *w* zurückgeworfenen coincidirt. Wurden nun beide Stellungen des Kreises am Nonius abgelesen, so ist die Differenz dieser Ablesungen das Supplement des gesuchten Winkels.

Es liegt nun auf der Hand, dass sowohl die Centrirung, als die Justirung der Kante nur angenähert möglich ist, und dass die Einstellung der beiden, von den Krystallflächen reflectirten Bilder des benutzten Objectes auf das im Spiegel *w* gesehene nicht absolut genau vorgenommen werden kann. Wenn daher auch die Genauigkeit, mit welcher man hierdurch Winkel messen kann, weit grösser ist, als bei dem Anlegegoniometer, so ist sie doch andererseits nicht so gross, wie es in vielen Fällen wünschenswerth erscheint; eine derartige Messung ist nämlich, wenn die Krystallflächen sehr gut reflectiren, und alle oben genannten Bedingungen nach Möglichkeit erfüllt sind, höchstens auf etwa $\frac{1}{10}{}^{\circ}$ genau. Es wurden daher schon frühe Verbesserungen an demselben vorgenommen. Zuerst M a l u s, und dann

namentlich Mitscherlich verbanden damit ein dem Kreise paralleles Fernrohr, durch welches das reflectirte Object betrachtet wird; bringt man in der Bildebene desselben ein Fadenkreuz an, so kann man durch Drehen des Krystalls einen bestimmten Punkt in dem Bilde des Objectes mit grosser Schärfe auf die Mitte dieses Fadenkreuzes einstellen. Mitscherlich (s. Abhandlungen der Berliner Akad. d. Wiss. 1843, S. 189) wies darauf hin, dass das Fernrohr wenig oder gar nicht vergrössern dürfe, weil sonst das von kleinen Krystallflächen reflectirte Bild zu lichtschwach wird, um deutlich gesehen zu werden. Wir haben aber S. 429 gesehen, dass gerade kleine Krystalle am ehesten frei von Störungen der Ausbildung sind, während unter den grösseren sehr häufig solche vorkommen, deren Flächen geknickt und gebrochen sind; da man mit dem Fernrohr ein sehr scharfes Bild des Objectes erblickt, so gewahrt man durch dasselbe auch viel leichter, als mit blossem Auge, derartige Unebenheiten der Flächen, indem diese dann mehrere Bilder reflectiren. Mitscherlich benutzte ferner als Object das Fadenkreuz eines zweiten Fernrohrs, welches, ebenfalls parallel dem Kreise, mit dem Beobachtungsfernrohr einen stumpfen Winkel bildete; stellt man vor dessen Ocular ein Licht, so treten die Strahlen, welche aus der Focalebene kommen, parallel aus, werden von der Krystallfläche reflectirt, treten einander parallel in das Beobachtungsfernrohr und erzeugen daher ein Bild des dunklen Fadenkreuzes auf hellem Grunde genau in der Bildebene des letzteren Fernrohrs, welches man alsdann mit dessen Fadenkreuz zur Deckung bringt. Wegen des Parallelismus der eintretenden Strahlen ist dies Verfahren gleichbedeutend damit, dass das zum Reflectiren und das zur Bestimmung der Richtung dienende Object, beide unendlich fern seien; dies ist aber deshalb besonders günstig, weil dann, wie wir in §. 113 sehen werden, eine unvollkommene Centrirung des Krystalls ohne Wirkung auf das Messungsresultat ist. Andererseits ist jedoch die Verwendung zweier Fernröhre nur möglich bei sehr vollkommener Beschaffenheit der Krystallflächen, da solche, welche, wenn auch nur schwach, gestreift, oder matt, oder zu klein sind, kein deutliches Reflexbild eines Fadenkreuzes liefern.

Die wichtigste Verbesserung, welche Mitscherlich (s. a. a. O.) eingeführt hat, besteht in der Benutzung der von dem Mechaniker Oertling construirten Centrir- und Justirvorrichtung. Selbst für ganz kleine Goniometer ohne Fernrohr, welche nur zu ganz approximativen Messungen dienen sollen, ist die ältere Einrichtung weniger empfehlenswerth, als eine a. a. O. von Mitscherlich vorgeschlagene, welche eine sicherere Centrirung und Justirung gestattet; für genauere Messungen ist jene in Fig. 1, Taf. II dargestellte Einrichtung dagegen ganz unbrauchbar; dieselben erfordern vielmehr eine völlig exacte Centrirung und Justirung und eine grössere Stabilität derselben, als jene gewähren kann.

Der Oertling'sche Apparat erfüllt nicht nur diese Bedingungen vollkommen, sondern gestattet auch eine so bequeme Handhabung, dass man mit demselben nach kurzer Uebung schneller zum Ziel kommt, als mit dem älteren

Wollaston'schen Goniometer. Seine Einrichtung ist aus Fig. 2, Taf. II ersichtlich, in welcher er so aufrecht gestellt ist, dass die Axe des Kreises vertical (statt horizontal) erscheint; man denke sich denselben also mit seiner Unterfläche so auf dem Ende der Axe *c* Fig. 1 (bei *s'*) befestigt, dass die beiden Füsse *dd* in deren Verlängerung fallen. Fig. 2 ist eine Abbildung in natürlicher Grösse, während ein diesem Apparat entsprechender Kreis die doppelte Grösse von Fig. 1 haben müsste. Unmittelbar auf der Axe des Kreises aufgeschraubt ist das Messinglineal *m* mit zwei darauf befestigten, nach innen abgeschrägten Schienen, zwischen denen *n* verschiebbar ist; dieses letztere wird bewegt durch die Schraube *o*, welche mittelst des Theiles *p*, in dem sie sich mit einem kugelförmigen Wulst dreht, in fester Verbindung mit *m* ist, während *q*, an die Schiene *n* angeschraubt, im Innern ein Schraubengewinde besitzt und folglich von *p* entfernt oder ihm genähert wird, je nachdem man die Schraube *o* nach der einen oder der andern Seite dreht. An dieser Bewegung von *q* und *n* nimmt nun der ganze obere Apparat Theil, da die ganz ebenso eingerichtete Schlittenconstruction *m'*, *n'*, *p'*, *q'* mit der Schraube *o'* in der Weise damit in Verbindung steht, dass die Unterseite von *m'* an die obere von *n* angeschraubt ist. Man sieht nun leicht ein, dass der aufsitzende Justirapparat, dessen Füsse *dd* auf dem Schlitten *n'* befestigt sind, mit Hülfe der beiden Schrauben in zwei auf einander senkrechten Richtungen parallel verschoben, der darauf befestigte Krystall also centrirt werden kann. Die Justirung desselben wird nun dadurch hervorgebracht, dass die Halbkugel *u*, auf deren ebener Oberfläche man den Krystall mit Wachs aufsetzt, in zwei auf einander senkrechten Ebenen geneigt wird, so dass sie sich in ihrem Lager *l* nach Art eines Kugelgelenks dreht. Zu diesem Zwecke hat sie unten einen cylindrischen Fortsatz, welcher die Schraube *s'* durch ein Kugelgelenk umfasst und daher durch diese in derselben Richtung hin und her bewegt werden kann, in welcher sich der Schlitten *n* verschiebt; das Stück, in welchem sich das Gewinde zu *s'* befindet, dient zugleich als Schraubenmutter für *s* und ist durch diese Schraube senkrecht zu jenem verschiebbar, wobei es auf dem hindurchgehenden Cylinder *t* gleitet. Diese beiden Bewegungen ermöglichen eine Neigung der Krystallkante in zwei Ebenen und folglich die Normalstellung derselben, wenn sie vorher nicht allzu schief aufgesetzt war (da der Winkel der möglichen Neigung nur etwa 10—15° nach beiden Seiten beträgt).

Die von Oertling gefertigten Goniometer für genauere Messungen, welche vielfach in Gebrauch sind, haben einen Theilkreis von der doppelten Grösse desjenigen in Fig. 1, gestatten eine Ablesung von $\frac{1}{2}'$ und sind mit der in Fig. 2 in natürlicher Grösse abgebildeten Centrir- und Justirvorrichtung versehen; sie besitzen ferner zwei Fernröhre, welche durch Arme getragen werden, die mit centrisch abgedrehten Ringen auf der Hülse *f* Fig. 1 beweglich sind, so dass man sie unter jeden beliebigen Winkel gegen einander stellen kann. Die Verticalstellung des Kreises bei diesen Instrumenten hat

mehrere Nachtheile zur Folge. Es können mit denselben nur sehr kleine Krystalle gemessen werden, da grössere durch ihr Gewicht entweder beim Drehen sich senken, oder überhaupt gar nicht mit Wachs an dem Ende der horizontalen Axe befestigt werden können. Durch den Druck, welchen die Axe nur nach unten auf die Innenseite der sie umschliessenden Hülse ausübt, wird diese nach längerem Gebrauch dort stärker abgenutzt und die Drehung wird alsdann excentrisch und bleibt nicht gleichmässig sanft. Endlich zeigt die beschriebene Centrir- und Justirvorrichtung nach langem Gebrauche kleine Fehler durch sogenannten »todten Gang« der Schrauben, indem durch Abnutzung des Metalls die betreffenden Theile nicht mehr genau auf einander passen.

Aus dem zuerst angegebenen Grunde sind solche Goniometer vorzuziehen, deren Theilkreis horizontal liegt und auf deren verticaler Axe ein Tischchen aufgesetzt wird, auf welchem man, da es horizontal ist, beliebig grosse Krystalle oder ganze Krystalldrusen, welche man nicht zerkleinern will, mit Wachs befestigen kann. Es werden daher von dem Mechaniker Herrn Fuess in Berlin, welcher z. Z. hauptsächlich krystallographische Apparate fertigt, fast nur horizontale Instrumente, wie solche zum Theil auch schon früher, z. B. von Babinet, verwendet, construirt; der Genannte hat ausserdem die Centrir- und Justirvorrichtung wesentlich verbessert, so dass diese Instrumente den an sie zu stellenden Anforderungen vollkommener entsprechen als die früheren.

Es soll daher im nächsten § die Construction dieser Apparate erläutert werden, und da die Art, wie die Fernröhre befestigt und die hohlen Axen in einander beweglich sind, ganz analog der bei den zuletzt erwähnten Oertling'schen Instrumenten ist, so kann diese Erläuterung zugleich zur Vervollständigung derjenigen der letzteren dienen, wenn man sich dieselben horizontal gestellt denkt.

§. 112. **Goniometer** (Fortsetzung). Fig. 3, Taf. II stellt ein Reflexionsgoniometer von mittleren Dimensionen dar, welches für weitaus die meisten Zwecke bei krystallographischen Untersuchungen ausreicht. Dieselbe ist so gezeichnet, dass der mittelste Theil des Instrumentes, d. h. die in einander geschobenen Axen, der Kreis und die Centrir- und Justirvorrichtung im Durchschnitt, die übrigen Theile dagegen in der Ansicht erscheinen. Das Ganze ruht auf drei Füssen und der Kreis kann daher durch die drei Schrauben $s^1 s^2 s^3$ genau horizontal gestellt werden. Diese Füsse sind an der Unterseite der kreisrunden dicken Messingplatte p angeschraubt, welche, in der Mitte conisch durchbohrt, die hohlen Axen und den Kreis trägt. In der weiten Durchbohrung derselben sitzt zunächst eine conische Axe n; diese ragt nach unten nur wenig über die Hülse g, welche mit p aus einem Stück gefertigt ist, hervor, ist aber nach oben fest verbunden mit einem Kreis n', der an zwei diametral entgegengesetzten Stellen eine Nonientheilung (Ablesung auf $\frac{1}{2}'$) besitzt; an diese Kreisscheibe ist endlich von unten her (durch zwei punktirt angedeutete Schrauben) der Arm m, welcher das Beobachtungs-

fernrohr b *) trägt, angeschraubt, so dass durch Bewegung des letzteren sich auch der Nonienkreis n' und die hohle Axe n um die Centralaxe des Instrumentes drehen. Diese Drehung kann durch Anziehen der Schraube f an jeder beliebigen Stelle arretirt werden, indem dadurch das parallelepipedische Stück i, in welchem jene Schraube endigt, gegen die ringsum in die Aussenseite von n eingedrehte Rinne presst und dasselbe daher fest an die gegenüber liegende Seite seines Lagers andrückt. Für die Krystallmessung kann daher der Beobachter dem Fernrohr b diejenige Stellung geben, welche ihm die bequemste ist, und dasselbe dann in dieser fixiren, indem er die Schraube f fest anzieht. Dadurch ist auch der Ort der beiden Nonien ein unveränderlicher geworden; die Theilung dieser ist vor Verunreinigung geschützt durch planparallele Glasplatten, welche, im Durchschnitt in der Figur sichtbar, bis über die Theilung des Kreises hinüberragen.

In n bewegt sich concentrisch die ebenfalls hohle Axe l, welche oben mit dem eigentlichen Theilkreise k, unten mit der am Rande gekerbten hohlen Scheibe l' durch Verschraubung fest verbunden ist; durch Drehen der letzteren mit der Hand bewegt man somit, wenn Nonien und Fernrohr auf die oben angegebene Art fixirt sind, den Kreis und die inneren Axen, also auch den aufgesetzten Krystall, und kann also die erfolgte Drehung an jedem der beiden Nonien ablesen. Diese Drehung kann nun arretirt werden durch die Schraube q, welche in Verbindung steht mit einem starken Ring o (im Durchschnitt auf der linken Seite), der den untersten Theil der Axe l, da, wo sie mit l' verbunden ist, umfasst; zieht man q an, so klemmt sie mit einem an ihrem Ende befindlichen parallelepipedischen Stück die Axe an jenen Ring fest. Die Schraube q ist aber ihrerseits nicht wie f unmittelbar mit dem Stativ (p) verbunden, sondern das Metallstück r, welches die Schraubenmutter von q enthält, liegt auf der Hinterseite nur lose an dem Ende einer Schraube an, die den Fuss, dessen Ende auf der Schraube s^2 steht, horizontal von hinten nach vorn durchbohrt, und deren Knopf t in der Zeichnung nur zum kleinen Theil sichtbar ist. Gegen das Ende dieser Schraube wird aber r angepresst durch eine an den eben erwähnten Fuss angeschraubte stählerne Feder u. Dreht man die Schraube mittelst des Knopfes t vorwärts, so giebt die Feder nach, r und o, folglich auch die darin festgeklemmte Axe l mit dem Krystall drehen sich, als wenn keine Arretirung existirte; dreht man die Schraube zurück, so folgt ihr r wegen des Druckes der Feder u nach, und der Krystall dreht sich nach der entgegengesetzten Seite, als vorher. Da man mittelst der Bewegung einer Schraube es viel besser in der Gewalt hat, eine kleine Drehung auszuführen, als mit freier Hand, so stellt man durch Drehen an der Scheibe l' das von der Krystallfläche reflectirte Bild nur ungefähr im Gesichtsfeld des Fernrohrs ein, klemmt alsdann die Axe l und corrigirt die Einstellung mittelst der

*) Ueber die vor dessen Objectiv vorgeschobene Lupe s. i. nächsten § beim Centriren; die am Rohr befestigte Schraube dient zum Einstellen des Oculars.

Schraube t, welche man deshalb Feinstellschraube nennt. Ueber den Kreis ist noch zu bemerken, dass der Rand desselben abgeschrägt ist, so dass seine Theilung mit derjenigen der Nonien in einer Ebene liegt.

Innerhalb l ist die ebenfalls noch hohle Axe h sehr leicht drehbar, welche durch die Scheibe h' bewegt wird, um die beim Centriren und Justiren nöthigen Drehungen auszuführen, ohne zugleich den ganzen Kreis mitdrehen zu müssen, was eine überflüssige Abnutzung des Instrumentes zur Folge haben würde. Da h' und l' an diesem einfacheren Instrument nicht durch eine Klemme mit einander verbunden werden können, so darf man beim Messen, indem man einmal die eine, das andere Mal die andere Krystallfläche durch Drehen von l' einstellt, die Scheibe h' nicht berühren, was dadurch vermieden wird, dass erstere bedeutend grösser ist.

In h steckt nun endlich die innerste cylindrische Axe c, unten verjüngt mit einem Schraubengewinde versehen; dadurch, dass die kleine am Rande gekerbte Scheibe v mit einer Hülse verbunden ist, welche als Schraubenmutter für den unteren Theil von c dient, wird durch eine Drehung jener die Axe in verticaler Richtung bewegt. Man kann also mit der Scheibe v den Krystall so weit heben oder senken, dass die zu messenden Flächen sich genau vor der Mitte des Objectivs des Beobachtungsfernrohrs befinden. Auf der Axe c ist nunmehr die Centrir- und Justirvorrichtung, welche mit Hülfe der nächsten Figur näher erläutert werden soll, aufgeschraubt. Zu Fig. 3 ist nur noch Folgendes hinzuzufügen: der obere über p hervorragende Theil der Hülse g wird von einem leicht drehbaren Ringe X umfasst, welcher zwei Arme mit den Ablesungslupen yy trägt. Endlich ist an den rechts befindlichen Fuss des Statives mit der Schraube e die verticale Säule d befestigt, auf welcher ein zweites Fernrohr ruht, dessen Fadenkreuz als Object dienen kann, statt dessen Ocular jedoch auch ein sogenannter Websky'scher Spalt oder auch ein gewöhnlicher verticaler Spalt eingesetzt werden kann. Der erstere ist dadurch gebildet, dass zwei undurchsichtige Kreisscheiben von rechts und links so vor die Oeffnung geschoben werden, dass sie sich in der Mitte derselben berühren; stellt man nun ein Licht vor diese, so dient als Object zum Reflectiren das Bild einer hellen Oeffnung, welche die Gestalt zweier durch Kreisbögen begrenzter Dreiecke hat, deren Spitzen von unten und oben her einander zugekehrt sind; ein solches Bild gestattet nun, selbst wenn es lichtschwach ist, eine recht scharfe Einstellung auf einen Faden.

Einen gewöhnlichen verticalen Spalt, durch den das Licht einer nahe gestellten Flamme eingelassen wird, bringt man statt des Oculars am Fernrohr a an, wenn man das Goniometer zur Bestimmung der Brechungsexponenten eines Prismas benutzen will. Da es sich alsdann darum handelt, die Ablenkung der durch den schmalen Spalt gegangenen Lichtstrahlen zu messen, so muss das Beobachtungsfernrohr b beweglich sein und seine Drehung um die Axe des ganzen Instrumentes abgelesen werden können, ohne dabei den Krystallträger und das darauf befindliche Prisma

zu drehen. Dies erreicht man dadurch, dass man, sobald das Prisma seine richtige Stellung hat, durch Anziehen der Schraube *q* die Axe *l* in dem Ringe *o* festklemmt, dagegen die Schraube *f* löst, so dass sich die Axe *n* mit dem Nonienkreis und dem Fernrohr drehen können, während alle inneren Axen stillstehen. Man braucht nunmehr lediglich das Beobachtungsfernrohr in die Verlängerung des Spaltfernrohrs *a* zu stellen, wobei dessen Spalt am verticalen Mittelfaden erscheinen muss, alsdann das erstere so weit zu drehen, bis das durch das Prisma abgelenkte Bild des Spaltes in der Mitte seines Gesichtsfeldes ist, und beide Stellungen am Kreise abzulesen; die Differenz dieser Ablesungen ist der Ablenkungswinkel.

Die Fuess'sche Centrir- und Justirvorrichtung zeigt in natürlicher Grösse der Durchschnitt Fig. 4. Auf die innerste Axe *c* des Goniometers ist der rectanguläre Kasten *m* aufgeschraubt, in welchem das Parallelepiped *n* durch die Schraube *a* von rechts nach links oder umgekehrt verschoben werden kann; dasselbe bewegt sich wie beim Oertling'schen Centrirapparat zwischen zwei schrägen Schienen und gleitet ausserdem noch auf zwei dasselbe der Länge nach durchbohrenden Stahlcylindern. Eine die Schraube (auf der rechten Seite in der Figur) umwindende Spiralfeder presst das Stück *n*, die Schraubenmutter von *a*, gegen die eine Seite des Gewindes der Schraube, wodurch, selbst wenn letztere durch vieljährigen Gebrauch stark abgenutzt sein sollte, jeder »todte Gang« vermieden wird. Auf *n* ist nun der zweite senkrecht dazu bewegliche Schlitten befestigt, der genau die Construction des ersteren besitzt, daher dessen Querschnitt (*m'* der Rahmen *), *n'* das verschiebbare Stück, *a'* die Schraube) zugleich zur Erläuterung des unteren dient; zu beiden Seiten der Schraube *a'* erblickt man auch die beiden derselben parallelen Stahlcylinder im Querschnitt, auf denen *n'* sich verschiebt. Dieses letztere trägt nun die Justirvorrichtung, welche ganz abweichend von der Oertling'schen construirt ist. Die Drehung des Krystallträgers in zwei auf einander senkrechten Ebenen wird nämlich erzielt durch Gleiten zweier Schlitten, deren Gestalt ein Kreissegment ist, in Schienen von derselben Form. Die Schienen, *e* die untere in der Längsansicht, *e'* die obere im Querschnitt, umfassen die beiden Seitenränder des Schlittens, *t* der untere, *t'* der obere, von oben und unten in Form einer Rinne, wie aus dem Querschnitt des oberen Theils deutlich ersichtlich ist. Die beiden Schlitten sind nun an ihrer Unterseite in der Mittelzone von einem Ende bis zum andern gezähnelt, so dass diese Zone gleichsam ein Stück eines Zahnrades bildet; in dessen Zähne greift nun das Gewinde einer horizontalen Schraube (*s*, resp. *b*) ein, welche ohne Ortsveränderung in der Schiene drehbar ist und durch deren Drehung das Kreissegment folglich in jener verschoben wird. Da der Kreisbogen eines solchen

*) Die Kästen *m* und *m'* werden durch dünne Metallplatten, von denen in der Figur natürlich nur das über *m*, an *m'* befestigte, sichtbar ist, vor dem Eindringen von Staub geschützt.

Segmentes etwa einem rechten Winkel entspricht, so sieht man leicht ein, dass dasselbe um etwa 40° nach rechts oder links gedreht werden kann, ohne dass die Stabilität des Krystallträgers gefährdet ist; diese Weite der Grenzen, innerhalb deren man den Krystall neigen kann, hat aber den grossen Vortheil, dass man zwei Flächen noch immer justiren kann, selbst wenn man sie, weil ihre Kante nicht sichtbar (zerbrochen oder durch andere Flächen weggenommen), sehr schief auf den Krystallträger aufgesetzt hatte. Da der gemeinschaftliche Drehungspunkt beider Segmente etwa 12 Millimeter über dem letzteren liegt, kann man eine Kante eines kleinen, wie eines ziemlich grossen Krystalls leicht in jene Höhe bringen, in welcher er seinen Ort beim Justiren nicht mehr wesentlich ändert. In den oberen Schlitten ist ein kreisrundes Loch eingebohrt, in welchem der Fuss des horizontalen Tischchens *u*, auf das der Krystall mit Wachs aufgesetzt wird, durch eine kleine Schraube *v* festgehalten ist. Um auch in den Justirschrauben jeden todten Gang zu vermeiden, werden dieselben durch eine horizontale Feder gegen das Schraubengewinde der Schlitten angepresst; den Querschnitt der zu *s* gehörigen und mit *e* vorn und hinten verbundenen Feder sieht man in *f*. Aus dieser Beschreibung, zu deren Verdeutlichung noch die Ansicht in Fig. 5 dienen kann, geht nun hervor, welche mannigfachen Vortheile diese Centrir- und Justirvorrichtung vor der älteren Oertling'schen voraus hat.

Für sehr genaue Messungen, namentlich Untersuchungen über die Aenderungen der Krystallwinkel mit der Temperatur, welche ja stets sehr klein sind, bedarf es eines grösseren Instrumentes, wie es in Fig. 5, Taf. II in $\frac{1}{3}$ der natürlichen Grösse abgebildet ist. Diese Ansicht bedarf nach dem Vorigen nur noch einer kurzen Erläuterung. Der Kreis, dessen Theilung horizontal liegt, ist auf je 10′ getheilt, und die Nonien (vier) gestatten eine Ablesung auf 10″; der erstere ist fest mit dem Stativ des Goniometers verbunden durch eine starke Hülse, welche von den inneren Axen durchbohrt wird. Um diese Hülse drehen sich, der eine über dem andern, zwei Ringe, welche nach einer Seite einen horizontalen Arm, an dem auf einer Säule ein Fernrohr ruht, nach der andern ein Gegengewicht tragen. Die beiden Fernröhre sind daher ganz von einander unabhängig beweglich und können in jede beliebige Stellung gebracht und durch Klemmschrauben darin fixirt werden; eine bestimmte Stellung eines jeden derselben kann ferner durch eine Feinstellschraube (die am linken Fernrohr in der Figur dem Beobachter zugekehrte) in beliebiger Schärfe hergestellt und mittelst eines Nonius, der am äussern Rande des Kreises entlang schleift (am rechten Fernrohr in der Figur sichtbar), abgelesen werden. Hierdurch ist man im Stande, mit dem Instrument alle Arten von optischen Untersuchungen anzustellen, bei denen es sich um Bestimmung der Richtung von auffallenden, reflectirten oder gebrochenen Strahlen handelt; um hierbei auch polarisirtes Licht anwenden zu können, ist auf das Ocular jedes Fernrohrs ein um seine Axe drehbares Nicol'sches Prisma mit einem kleinen Theilkreis, der die

Stellung des ersteren angiebt, aufzuschrauben. Zur Bestimmung der Brechungsexponenten kann ferner das Ocular des einen Fernrohrs mit einem Spalt vertauscht werden, der durch eine Schraube enger oder weiter gestellt wird.

Durch die oben erwähnte Hülse, welche den Kreis trägt, geht nun zunächst eine hohle Axe, deren Bewegung mittelst der obersten und grössten der drei zwischen den Füssen des Goniometers befindlichen Scheiben ausgeführt wird; mit dieser drehen sich zugleich die Nonien, welche nur mit ihrem äussersten Rande auf dem Theilkreis schleifen. Diese Drehung wird bei einer Krystallmessung benutzt, und kann die betreffende Axe durch die am rechten Fuss des Instrumentes sichtbaren beiden Schrauben geklemmt und fein gestellt werden. In dieser Axe steckt concentrisch eine zweite, ebenfalls hohl (der Axe *h* in der Fig. 3 entsprechend) und durch die zweite kleinere Scheibe von unten her zu bewegen; diese trägt oben die Centrir- und Justirvorrichtung, welche gleich der vorher beschriebenen ist, nur dass auf dieselbe nach Erforderniss auch ein grösseres Tischchen aufgesetzt werden kann. Sie kann ebenso wie bei dem Instrument Fig. 3 in das erforderliche Niveau gebracht werden dadurch, dass die letzte und innerste Axe ein Schraubengewinde trägt, welches durch Drehen des untersten in der Fig. 5 sichtbaren Knopfes auf und nieder bewegt wird. Die beiden hohlen Axen können auch an den zu ihnen gehörigen Scheiben gegen einander festgeklemmt und feingestellt werden. Ueber dem Nonienkreis ist ein Ring, lose drehbar, befindlich, an dessen vier Armen je eine Lupe zur Ablesung angebracht ist.

Will man dieses Goniometer zur Messung von Krystallwinkeln in höherer Temperatur anwenden, so muss man mit demselben ein Luftbad verbinden, in welchem sich der Krystall befindet. Ein solches zeigt Fig. 6, Taf. II, vertical von oben gesehen, in $\frac{1}{3}$ natürlicher Grösse; es ist dies ein innen runder, aussen achteckiger Metallkasten von 40—50 Millimeter Höhe, dessen Boden in der Mitte ein kreisrundes Loch hat und der durch einen Deckel geschlossen werden kann. Derselbe hat drei Fenster, d. h. kurze Ansatzröhren mit planparallelen Glasplatten geschlossen. Nach zwei gegenüberliegenden Seiten ist er mit je einer am Ende geschlossenen Metallröhre in Verbindung, deren äusserster Theil durch Gasflammen erhitzt wird, bis der ganze Innenraum eine constante Temperatur angenommen hat, welche durch zwei Thermometer gemessen wird, die durch den Deckel hineinreichen. Die kleine Skizze Fig. 7 zeigt die Art der Zusammenstellung des Apparates für den genannten Zweck. Der Erhitzungskasten ruht mit beiden Enden auf je einer Gabel eines eisernen Stativs, an welchem zugleich ein Bunsen'scher Brenner befestigt ist. Die Oeffnung in dem Boden des Mittelraums ist unmittelbar über der Centrir- und Justirvorrichtung befindlich; auf diese ist statt des kleinen Tischchens *u* Fig. 4 eine kleine verticale Messingpincette zum Halten des Krystalls angeschraubt, welche sich zum grösseren Theile im Innern des Kastens befindet, so dass der Krystall gerade in dessen Mitte

durch die beiden gegenüberliegenden Fenster gesehen werden kann. Um die zur ungehinderten Drehung nothwendig weite Oeffnung an der Unterseite des Luftbades möglichst zu schliessen, dient ein kreisförmiges Metallplättchen, welches halbirt und mit Charnier wie eine Scheere geschlossen werden kann; dasselbe hat in der Mitte ein Loch von dem Durchmesser des Stiels der Pincette und verschiebt sich mit dieser, wenn es um dieselbe herumgelegt worden ist. Zur Krystallmessung stellt man das eine Fernrohr senkrecht auf die Glasscheibe des hinteren Fensters, das andere normal zu dem seitlich gelegenen vorderen; alsdann bilden beide einen Winkel von 135° mit einander, und bei passender Stellung einer Krystallfläche wird das Bild des Fadenkreuzes des hinteren Fernrohrs, von derselben reflectirt, in das vordere gelangen. Denselben Apparat kann man auch dazu benutzen, die Brechungsexponenten eines in höherer Temperatur befindlichen Prismas zu bestimmen. Giebt man demselben nämlich einen so grossen Winkel, dass die im Minimum dadurch hervorgebrachte Ablenkung etwa 45° beträgt, so kann man, durch die beiden gegenüberliegenden Fenster blickend, das directe Bild des am hinteren Fernrohr angebrachten Spaltes und durch das seitliche Fenster das abgelenkte Bild desselben im Beobachtungsfernrohr einstellen.

Anmerkung: Ein kleines, aber für die meisten Krystallmessungen ausreichendes Goniometer mit einem Fernrohr bildet zugleich einen Theil des in §. 114—117 beschriebenen krystallographisch-optischen Universalapparates, s. §. 117.

§. 113. **Methode der Messungen und deren Fehler.** Die Genauigkeit der Messung einer Krystallkante hängt hauptsächlich ab von der Beschaffenheit der sie bildenden Flächen; sind diese uneben, gebrochen oder matt, so kann auch das genaueste Instrument den Beobachter nicht zu einer andern als einer approximativen Kenntniss der Winkel verhelfen, die nur dadurch der Wahrheit mehr genähert wird, dass Derselbe eine grössere Zahl von Krystallen untersucht und das Mittel aus den Resultaten zieht. Trotzdem muss der Beobachter es sich stets zur Vorschrift machen, alle Fehler, welche durch mangelhafte Centrirung, Justirung und dergl. hervorgebracht werden können, so weit zu vermeiden, dass die erhaltenen Resultate so genau sind, als es bei der Beschaffenheit der Flächen nur irgend möglich.

Bei der nun folgenden Besprechung der Manipulationen wollen wir uns lediglich auf das in Fig. 3 abgebildete Instrument beziehen, da sich daraus die für anders construirte von selbst ergeben.

1) Wahl des Objectes. Die Wahl desjenigen Objectes, dessen Bild von den Krystallflächen reflectirt werden soll, muss ganz von deren Beschaffenheit abhängig gemacht werden. Das vortheilhafteste ist, wie schon früher bemerkt, das Fadenkreuz eines zweiten Fernrohrs, aber dieses lässt sich nur bei sehr vollkommenen Flächen anwenden. Bei Weitem in den

meisten Fällen erhält man kein Reflexbild desselben von den Flächen und muss sich daher nach einem lichtstärkeren Object umsehen. Als solches ist besonders zu empfehlen eine kleine Gasflamme in genügender Entfernung (s. weiter unten); hierbei muss aber ein dunkles Zimmer zur Verfügung stehen und womöglich auch die Ablesung des Instrumentes bei künstlicher Beleuchtung stattfinden. Die Gasflamme muss aus einem Leuchtbrenner mit einfacher runder, sehr kleiner Oeffnung ausströmen, so dass sie bei ganz geöffnetem Gashahn lang und schmal ist und durch Drehen des letzteren auf ein Flämmchen reducirt werden kann, dessen leuchtende Spitze höchstens 10 Millimeter hoch ist. Eine solche Flamme, welche man natürlich, je nach der Flächenbeschaffenheit, grösser oder kleiner macht, hat besonders den Vortheil, dass sie ein sicheres Urtheil über diese letztere gestattet; sobald eine Krystallfläche nicht ganz eben ist, erhält man mehrere Flammen oder ein verwaschenes Bild derselben u. s. f. Es ist zu empfehlen, bei jeder Einstellung eines Reflexbildes dessen Beschaffenheit bei der Ablesung zu notiren; dies kann am kürzesten durch eine der Fläche ertheilte Censur (*a*, *b*, *c*) geschehen, zwei nahe gleich helle Flammen sind einzeln einzustellen und abzulesen. Hierdurch ist man im Stande, bei Herleitung der Endresultate die einzelnen Zahlen mit Rücksicht auf ihre Zuverlässigkeit zu benutzen. Hat man keine genügend grosse Distanz zur Aufstellung der Flamme zur Verfügung, so ist die Anwendung des bereits S. 462 beschriebenen Websky'schen Spaltes zu empfehlen, welcher statt des Oculars auf das zweite Fernrohr aufgesetzt und durch eine dicht darangestellte Flamme erleuchtet wird.

Ehe man die Messung beginnt, hat man das Ocular des Beobachtungsfernrohrs so einzustellen, dass das Object, sei es das Fadenkreuz oder der Spalt des andern Fernrohrs, sei es eine entfernte Flamme, direct gesehen ganz scharf erscheint, ebenso das Fadenkreuz des Beobachtungsfernrohrs, und dass beide bei einer Bewegung des Auges sich gar nicht gegen einander verschieben, d. h. dass das Bild des Objects und das Fadenkreuz genau in einer Ebene liegen.

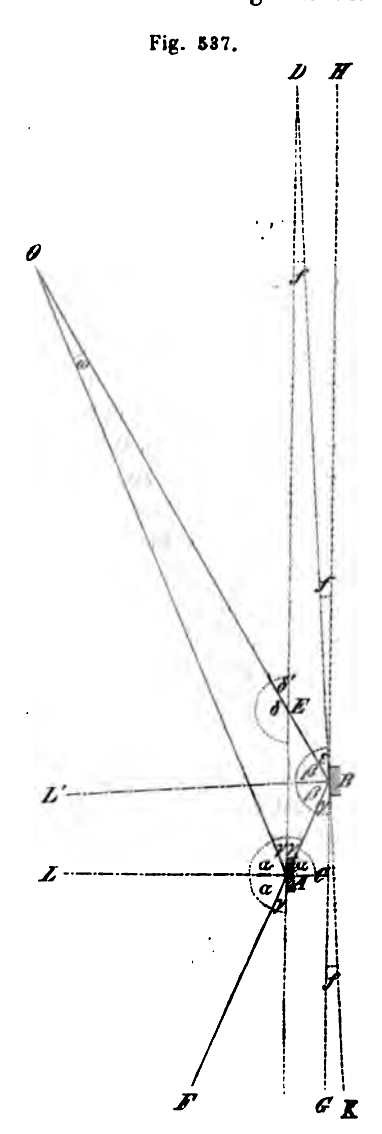
Centrirung. Diese geschieht durch die beiden Schrauben *a* und *a'* Fig. 4, nachdem vor das Objectiv des Beobachtungsfernrohrs eine Linse in der Weise vorgeschoben worden ist, wie es aus Fig. 3 und 5 ersichtlich. Dieselbe besitzt eine Brennweite, welche gleich ihrer Distanz von dem Krystall ist, und bewirkt folglich, dass man durch das Fernrohr den Krystall erblickt*); man stellt nunmehr eine der beiden Centrirschrauben parallel dem Fernrohr und bewegt durch die zweite die zu centrirende Krystallkante nach rechts oder links, bis sie in der Mitte des Gesichtsfeldes erscheint; alsdann dreht man an der Scheibe *h'* um 90° und wiederholt das Gleiche mit der andern Schraube; ist das Fernrohr genau auf die Drehungsaxe gerichtet, so steht nunmehr die Kante im Gesichtsfeld still, d. h. sie ist centrirt. Ist dieselbe jedoch nicht sichtbar, z. B. abgebrochen, so muss beim

*) In die richtige Höhe bringt man ihn durch Drehen der Schraube *v* Fig. 8.

Drehen eine Fläche genau in die Lage der andern kommen, wenn sie so gestellt werden, dass sie nur als gerade Linien verkürzt erscheinen. Mit welcher Genauigkeit dies erreicht werden muss, darüber erhält man am besten Rechenschaft, wenn man untersucht, welchen Fehler überhaupt eine ungenaue Centrirung der Kante hervorbringt.

Sei in Fig. 537 *A* ein Punkt der reflectirenden Krystallfläche, deren Durchschnittsrichtung mit der Ebene, in welcher die Reflexion stattfindet, *AD*; sei *O* das leuchtende Object, *OA* der unter dem Winkel α auffallende Lichtstrahl, *OF* der in das Fernrohr reflectirte; ausserdem reflectiren auch die andern Punkte der Fläche, so dass divergente Strahlen auf das Objectiv des Beobachtungsfernrohrs auffallen; diese werden aber alle zu einem Bilde von *O* vereinigt, da ihre Richtung so ist, als ob sie alle herkämen von einem Punkte, der symmetrisch zu *O* in Bezug auf die Spiegelebene liegt. Demnach ist es gleichgültig, an welcher Stelle innerhalb der Ebene *AD* die reflectirende Fläche liegt; das Bild wird auch an derselben Stelle im Fernrohr zu Stande kommen, wenn es von der andern Fläche (nach der Drehung) reflectirt wird, wenn diese nur parallel *AD* und zugleich in dieselbe Ebene, nicht rechts oder links, fällt. Ist dagegen der letzten Bedingung nicht genügt, so ist das virtuelle Bild von *O* hinter dem Spiegel jetzt an einem andern Ort, also auch die Richtung der von ihm herkommenden Strahlen, d. h. die Stellung seines Bildes im Fernrohr eine andere, und es muss die Krystallfläche um einen Winkel vor oder zurück gedreht werden, um dieselbe Einstellung zu erhalten. Um so viel aber, als diese Drehung beträgt, wird das Messungsresultat falsch, da das gesuchte Supplement des Kantenwinkels gleich ist dem Winkel, um welchen man den Krystall drehen muss, damit die zweite Krystallfläche derjenigen Ebene, in welcher sich vorher die erste befand, parallel wird.

Fig. 537.



Sei nun *B* Fig. 537 ein Punkt der zweiten Krystallfläche, *BD* deren Lage, nachdem der Krystall so weit gedreht worden ist, bis das reflectirte Bild

von O im Fernrohr an derselben Stelle (Mitte des Fadenkreuzes) erscheint, wie vor der Drehung das von der ersten Fläche zurückgeworfene, d. h. bis die Richtung BF mit AF zusammenfällt; sei ferner $GH \parallel AD$, so ist offenbar die Differenz der abgelesenen Drehung und des gesuchten Winkels, d. h. der Fehler des Resultats = dem Winkel f, welchen die beiden Ebenen AD und BD mit einander bilden. Dessen Grösse ergiebt sich auf folgende Weise:

Da $\delta' = \varepsilon + f$ der Aussenwinkel des Dreiecks AEO, so ist

$$\gamma + \omega = \varepsilon + f,$$

und da

$$\varepsilon = \gamma + f$$

(weil $KBL' = \gamma + f + \beta = L'BD = \varepsilon + \beta = 90^0$), so ist

$$\omega = 2f.$$

Da ferner

$$AB = \frac{AC}{\sin\gamma}$$

und da im Dreieck ABO

$$\sin\omega = \frac{AB \cdot \sin 2\gamma}{BO} = \frac{AC}{\sin\gamma} \cdot \frac{\sin 2\gamma}{BO},$$

so ist, weil $\sin 2\gamma = 2\sin\gamma \cdot \cos\gamma$,

$$\sin\omega = \frac{AC}{BO} \cdot 2\cos\gamma.$$

Hieraus sieht man, dass der Fehler f, d. i. $\frac{\omega}{2}$, um so kleiner wird, je grösser BO, d. h. die Entfernung des Objects vom Krystall; ist diese unendlich gross, bildet z. B. das in der Focalebene eines Fernrohrs befindliche Fadenkreuz das Object, wobei die Strahlen parallel aus dem Objectiv austreten, als ob sie von einem unendlich fernen Object kämen, so ist der Fehler = 0. Daraus folgt, dass bei Anwendung zweier Fernröhre die Krystallkante nur so weit centrirt zu werden braucht, dass das von beiden Flächen reflectirte Licht nahe durch die Mitte des Objectivs des Beobachtungsfernrohrs geht, um möglichst helle und vollkommene Bilder zu erhalten. Benutzt man dagegen eine Flamme als Object, so hängt es von deren Entfernung ab, wie gross f wird; ferner von dem Winkel γ, denn ω, also auch f, wächst mit abnehmendem γ (gewöhnlich stellt man das Fernrohr so, dass $\gamma = 30^0$—40^0). Sei z. B. der Abstand AC der beiden Ebenen, in welche wegen unvollkommener Centrirung die eine und die andere Krystallfläche zu liegen kommen, = 1 Millimeter, der Abstand der Flamme = 5 Meter, $\gamma = 30^0$, so wird der entstehende Fehler $f = 0' \, 36''$; setzt man dagegen die Flamme auf eine Entfernung von 10 Meter, so wird, bei sonst gleichen Verhältnissen, $\omega = 0' \, 36''$, d. h. $f = 0' \, 18''$. Man hat also stets die Flamme so entfernt aufzustellen, als es die Flächenbeschaffenheit gestattet, um noch ein deutliches Reflexbild zu erhalten. Hält man an Stelle des Krystalls eine beleuchtete Millimeterskala, so kann man ein- für allemal bestimmen, der wie vielte Theil des Gesichtsfeldes (bei aufgesteckter Centrirlupe) einem Millimeter entspricht, und kann unter Berücksichtigung der Gestalt des Krystalls nach Obigem leicht, wenn derselbe aufgesetzt ist, beurtheilen, ob die erreichte Centrirung noch Fehler von störender Grösse hervorbringen kann. Habe man z. B. ein

rhombisches Prisma, dessen beide Flächenpaare, das eine 2, das andere 3 Millimeter gegenseitigen Abstand haben, so kann man getrost die Mitte desselben centriren und, ohne neu zu centriren, alle vier Winkel messen, denn es ist klar, dass alsdann die Ebenen, in welche beim Drehen die verschiedenen Flächen zu liegen kommen, nicht weiter von einander abstehen können, als ½ Millimeter; bei 10 Meter Flammendistanz giebt dies nur einen Fehler von ca. 9″, ja selbst bei 5 Meter Abstand würde derselbe in den meisten Fällen noch weit geringer sein, als die aus Unvollkommenheiten der Flächen entstehenden, nämlich 18″. Würden die Flächen einer Zone zufällig alle genau gleich weit von der Mitte des Krystalls abstehen, so wäre der Fehler bei der Centrirung dieser Mitte für die Messung aller ihrer Kantenwinkel absolut gleich Null.

Nach geschehener Centrirung ist die vor dem Objectiv befindliche Lupe zu entfernen, zu welchem Zwecke sie an einem Charnier beweglich ist.

Justirung. Um diese zu erleichtern, ist es nothwendig, die zu messende Kante (oder Zone) schon nach dem Augenmaasse so genau wie möglich normal zum Kreise aufzusetzen; man nimmt zu diesem Zwecke das kleine Tischchen *u* Fig. 4 (nach Lösung der Schraube *v*) ab und befestigt nun mit Wachs den Krystall so (s. Fig. 5), dass die Flächen der zu messenden Zone ca. 12 Millimeter über dessen Fläche, und deren Axe normal zum Tischchen steht, was man dadurch controlirt, dass man dasselbe gegen das Licht hält; ausserdem muss eine der vorherrschenden Flächen der betreffenden Zone so orientirt sein, dass sie ebenfalls so genau, wie es mit dem Augenmaass möglich, nach dem Aufsetzen und Festschrauben des Tisches parallel einer der beiden Justirschrauben ist, also entweder in die Zeichnungsebene von Fig. 4 fällt oder dazu senkrecht steht. Ist das Tischchen in dieser Weise auf dem Goniometer befestigt und vorher die Segmente der Justirvorrichtung horizontal gestellt, so erhält man gewöhnlich die reflectirten Bilder beim Drehen schon in das Fernrohr, wenn auch zu hoch oder zu niedrig im Gesichtsfeld. Sollte dies jedoch nicht der Fall sein, so muss man durch Sehen neben dem Fernrohr entlang unter Auf- und Niederbewegung des Auges die Reflexe suchen, um zu erkennen, ob sie zu hoch oder zu niedrig sind, und dann mit den beiden Schrauben eine erste Correction anbringen; hat man die Bilder aber einmal im Gesichtsfeld des Beobachtungsfernrohrs, so ist die genaue Justirung der Kante leicht: man stellt zuerst das von derjenigen Fläche, welche einer Justirschraube parallel ist (s. oben), reflectirte Bild ein und dreht an der anderen Schraube, bis es am horizontalen Mittelfaden des Fadenkreuzes steht; alsdann stellt man das Bild von einer zweiten Fläche ein und corrigirt dieses mit der ersteren Schraube, wobei die Justirung der ersten Fläche um so weniger geändert wird, je genauer sie dieser Schraube parallel ist; durch ein oder zwei kleine Nachcorrectionen gelingt es dann leicht, zu erreichen, dass die Bilder von beiden Flächen her, folglich auch von allen übrigen derselben Zone, beim Drehen genau am horizontalen Mittelfaden entlang sich bewegen. Ist dies nur für die beiden

justirten Flächen, nicht auch für die übrigen genau der Fall, so sind die Theile des Krystalls nicht vollkommen parallel (s. S. 429), oder die betreffende dritte, vierte, fünfte Fläche liegt nicht in der Zone der beiden ersten. Eine genaue Justirung auf dem Goniometer ist daher das sicherste Mittel, um zu erkennen, ob eine Krystallfläche in der Zone zweier anderen liegt.

Messung. Sind die oben genannten Bedingungen für Justirung und Centrirung erfüllt, so kann zur Messung geschritten werden. Statt wie bisher mit der Scheibe *h'* Fig. 3 die Axe *h* allein zu bewegen, dreht man jetzt mit *l'* zugleich den Kreis, stellt das Bild einer jeden Fläche genau in den Kreuzungspunkt der Fäden, liest die Stellung des Kreises ab und notirt sie nebst der Censur des Bildes (S. 467). Um sich vor der Täuschung zu bewahren, ein Bild einzustellen, welches durch Reflexion im Innern eines durchsichtigen Krystalls entsteht, ist es zu empfehlen, das Auge nahe neben dem Fernrohr zu halten und so zu drehen, dass jenes zuerst die beleuchtete Fläche erblickt, ehe das Bild in das Gesichtsfeld des Fernrohrs eintritt. Kann man alle Flächen einer Zone mit einer einzigen Centrirung messen, so dreht man, bis die erste Fläche noch einmal eintritt, und sieht zu, ob man für diese die gleiche Ablesung wie im Anfang erhält, um sich zu vergewissern, dass nicht inzwischen irgend eine Verschiebung vorgekommen ist. Hat man dagegen bei den einzelnen Kanten neu zu centriren, so werden natürlich für jede Kante beide Flächen neu eingestellt und abgelesen; die Justirung bleibt aber dieselbe für die ganze Zone.

Aus den einzelnen Messungsresultaten werden die Mittelzahlen stets mit Berücksichtigung der Güte der ersteren berechnet; am einfachsten und fast immer ausreichend in der Weise, dass man das arithmetische Mittel nimmt, aber dabei eine Messung *b* zweimal, eine Messung *a* dreimal zählt, wenn man eine solche *c* nur als einmal angestellt in Rechnung zieht.

§. 114. **Das Polarisationsinstrument.** Dieses für den Krystallographen ebenso unentbehrliche Instrument, wie das Reflexionsgoniometer, ist bereits S. 58 f. genau beschrieben worden. Die verschiedenen gebräuchlichen Constructionen unterscheiden sich nur durch die Zahl und Anordnung der Linsensysteme, welche statt der Sammellinse *n* Fig. 52 und des Objectivs *o* ebendaselbst dienen. Die Form, welche Nörremberg demselben gegeben und in der sie der Optiker Hr. Steeg in Homburg liefert, hat den Vortheil eines sehr grossen Gesichtsfeldes, so dass selbst bei sehr grossem Axenwinkel die Lemniscatensysteme noch zu übersehen sind. Nur sind freilich die Bilder nahe dem Rande des Gesichtsfeldes stets weniger vollkommen und daher für feinere Farbenunterschiede, z. B. für Erkennung des Sinnes der Dispersion durch die Säume der Hyperbeln (vergl. S. 96), nicht zuverlässig. Etwas kleiner ist das Gesichtsfeld bei dem von Des Cloizeaux (Poggendorff's Ann. 126. Bd.) angegebenen Instrumente, welches jedoch in mehrfacher Beziehung vorzuziehen ist, während sein Gesichtsfeld doch gross

genug ist, um in allen Fällen zu genügen (bei scheinbarem Axenwinkel von 125° sind noch beide Axenbilder innerhalb desselben sichtbar).

In diesem und den folgenden §§ sollen nun die zu krystalloptischen Arbeiten nöthigen Apparate in der Form beschrieben werden, wie sie, mit möglichster Benutzung einzelner Theile für mehrere Zwecke, zu einer Art Universalapparat vereinigt, von dem Verfasser (s. Groth, Poggendorff's Ann. 144. Bd.) vorgeschlagen wurden und vom Mechaniker Fuess in Berlin geliefert werden. Dieser gesammte Apparat enthält, wenn man die einen oder anderen Theile desselben in der jetzt zu besprechenden Weise verbindet, alle Instrumente, welche bei krystallographisch-optischen Untersuchungen gebraucht werden, inclusive eines Goniometers zur Bestimmung der Krystallwinkel und der Brechungsexponenten.

Das Polarisationsinstrument für convergentes Licht, im Wesentlichen übereinstimmend mit dem von Des Cloizeaux a. a. O. beschriebenen, ist in Fig. 1 auf Taf. III im verticalen Durchschnitt dargestellt. bis auf die beiden Theile *m'* und *f'*, welche mit ihren Schrauben in Vorderansicht erscheinen. Der einfache Spiegel *a* wird bei parallelen Nicols um seine Axe so gedreht, dass er, wenn das Instrument nahe am Fenster steht, das Licht eines möglichst hellen Theils des Himmels in dasselbe reflectirt. Das Rohr *b*, in *c* verschiebbar, enthält den Polarisator *d* und die beiden Glaslinsen *ee'*, welche bewirken, dass das ganze auf *e* fallende Licht in das Instrument gelangt (vergl. S. 57); unmittelbar über *e'* befindet sich das Diaphragma, dessen kreisrunde Oeffnung fast die Innenweite des Rohrs hat, so dass es nur als ein in das kurze Einsatzrohr *g* eingeschraubter Ring erscheint, dessen Ebene durch eine dünne Glasplatte *p'* ausgefüllt ist, auf der zwei sich in der Mitte rechtwinkelig durchschneidende Linien eingerissen und geschwärzt sind, so dass dieselben als Fadenkreuz dienen. Da nach S. 59 diese helle Oeffnung es ist, nach der hin man durch das Instrument blickt, so muss das in derselben angebrachte Kreuz scharf sichtbar sein, wenn man von oben hineinsieht. In demselben Ansatzrohr *g* sitzt nun das Sammellinsensystem, aus vier planconvexen Gläsern *h* bestehend; *g* wird mit seinem unteren, engeren Theile in das Rohr *c* eingeschoben, während der obere Theil mit diesem gleiche Weite hat, so dass *c* und *g* zusammen in der mit dem Träger *f* festverbundenen Hülse bewegt, resp. aus derselben herausgezogen werden können. Das Ganze ist stets so weit hinaufzuschieben, dass *g* den aufgesetzten Krystallträger berührt, um ein möglichst grosses Gesichtsfeld zu erhalten. Mit dem Träger *f* ist der Kreis *k*, besonders für die Stauroskopvorrichtung bestimmt (s. nächsten §), fest verbunden; um die Hülse, welche nach oben die Fortsetzung des Trägers *f* bildet, dreht sich das oben mit einem gezähnelten vorspringenden Rande versehene kurze Rohr *l*, dessen unterer Rand den auf *k* schleifenden Nonienkreis trägt. Auf *l* wird oben die kreisförmige durch einen Messingring gefasste Glasscheibe *i*, auf der bei der Beobachtung der Krystall liegt, in einer bestimmten Stellung aufgelegt; diese ist dadurch fixirt, dass der Rand jenes Messingringes an

einem Punkte einen Einschnitt hat, in welchen genau ein an *l* festgemachter kleiner Stift passt. Durch Drehen des vorspringenden Wulstes von *l* mit zwei Fingern wird also die Krystallplatte in ihrer Ebene gedreht um einen Winkel, welcher mittelst des Nonius auf dem Kreise *k* abgelesen werden kann. Der Träger *f* ist mit dem hohlprismatischen Theile *f'* in fester Verbindung und diese durch eine Schraube an das dreiseitige Stahlprisma, welches mit einem hufeisenförmigen Fuss das Stativ des Instrumentes bildet, angeklemmt. Das ebenso gestaltete Stück *m'*, durch eine Stellschraube, welche in eine Zahnstange des Stativs eingreift, auf und nieder beweglich, trägt den Arm *m* und dessen ebenso bezeichneten hülsenförmigen Fortsatz. In letzteren wird das Rohr *n* eingeschoben, in welchem die vier den Sammellinsen ganz gleichen Objectivlinsen *o* sitzen; da vermöge der kurzen Brennweite dieses Systems das Bild der Ebene *p'* ganz nahe über jenen, in der Ebene *p*, zu Stande kommt, so ist in letzterer wiederum eine Glasplatte mit eingerissenen und geschwärzten Linien angebracht, aber nicht blos mit einem einfachen Kreuz, sondern einer Theilung des einen der beiden Arme von einer Seite des Gesichtsfeldes bis zur andern. Dieses »Glasmikrometer« ist daher gleichzeitig mit dem unteren Kreuz *p'* und der Interferenzfigur eines Krystalls deutlich sichtbar. In *n* ist das Ocularrohr *q* mit der Ocularlinse *q'* verschiebbar, während von oben die Fassung des analysirenden Nicols *r* drehbar eingesetzt wird. Der oberste Theil von *q* wird von einem dünnen Messingring umfasst, dessen Drehung gestattet, einen in dem Ocularrohr befindlichen (unter dem Nicol in der Figur angedeuteten) horizontalen Schlitz entweder zu schliessen oder zu öffnen; der letztere dient dazu, ein lang rectanguläres $\frac{1}{4}$ Undulationsglimmerblatt (s. S. 109) oder einen Quarzkeil (S. 107) zur Bestimmung des Charakters der Doppelbrechung einzuschieben.

Um ein grosses Gesichtsfeld zu erhalten, muss man das unterste Objectiv *o* dem Krystall so weit als möglich nähern, und derselbe darf nicht zu dick sein; ein noch grösseres Gesichtsfeld erhält man übrigens, wenn man den Krystallträger *i* abnimmt, den Krystall direct auf die oberste Linse *h* legt und wiederum *o* demselben bis fast zur Berührung nähert. Hat man es mit einer zweiaxigen Platte, senkrecht zur ersten Mittellinie, zu thun, so kann das Glasmikrometer *p* zu einer schnellen approximativen Bestimmung des scheinbaren optischen Axenwinkels dienen, indem man die Theilung jenes in die optische Axenebene bringt, die Nicols so stellt, dass die schwarzen Hyperbeln erscheinen, und den Abstand derselben in Theilen des Mikrometers bestimmt; wie viel Grade des scheinbaren Axenwinkels einem Theilstrich des Mikrometers entsprechen, erkennt man mittelst einiger Krystallplatten von bestimmtem Axenwinkel (im Durchschnitt beträgt bei den Fuess'schen Instrumenten 1 Theilstrich 6°).

Das untere Mikrometer *p'* dient dazu, eine geschliffene Platte annähernd auf den Parallelismus ihrer Flächen zu prüfen. Man legt dieselbe nämlich einfach auf den Krystallträger *i* und nähert *o* derselben;

ist sie merklich keilförmig, d. h. weichen ihre beiden Flächen mehr als 1° vom Parallelismus ab, so wird das Bild des unteren Fadenkreuzes etwas abgelenkt, und man sieht deutlich, dass die vorher zusammenfallenden beiden Fadenkreuze sich nun nicht mehr decken. Diese Methode genügt indessen nur bei sehr kleinen Platten, welche man höchstens bis auf 1° genau parallel schleifen kann; bei grösseren hat man, wenn es auf eine höhere Genauigkeit ankommt, den Winkel, welchen die beiden parallel sein sollenden Flächen mit einander bilden, mit dem Goniometer zu messen.

Das beschriebene Polarisationsinstrument dient hauptsächlich zur Aufsuchung der Lage der optischen Axen, durch welche man, in Vergleich mit dem Habitus der Krystallform, in vielen Fällen sofort das Krystallsystem bestimmen kann. Will man dabei durch unvollkommene Flächen, z. B. Bruchflächen, Richtungen unvollkommener Spaltbarkeit oder dergl. sehen, so hat man dieselben mit einem Tropfen Canadabalsam zu bedecken und dann ein kleines Stückchen sehr dünnen Glases (sogen. Birminghamglases) darauf anzudrücken, um die Zerstreuung der Lichtstrahlen an der unregelmässigen Fläche zu eliminiren. Bei dickeren Platten bleibt der Brennpunkt des Objectivs über demjenigen der Sammellinsen, man wird also nur im mittleren Theil des Gesichtsfeldes die Interferenzerscheinungen erblicken; um sie im ganzen Gesichtsfeld zu sehen, welches aber dann einem kleineren Winkel entspricht, kann man eine oder mehrere der Objectivlinsen *o* abschrauben. Was die Flächenausdehnung der zu den Beobachtungen nöthigen Platten betrifft, so kann dieselbe sehr gering sein, namentlich wenn man das neben derselben vorübergehende Licht abblendet; so kann man z. B. von einem Glimmerblättchen mit grossem Axenwinkel, dessen Oberfläche $= \frac{1}{270}$ Quadrat-Millimeter (erhalten durch Bedecken einer Glimmerplatte mit Stanniol, in welchem eine entsprechend grosse Oeffnung durch einen Stich mit einer feinen Nadel hergestellt ist), noch ein recht deutliches Axenbild erhalten. Ein so lichtstarkes Instrument ist daher sehr geeignet zur Aufsuchung der Axen kleinerer Mineralpartikel in Dünnschliffen feinkörniger Gesteine, falls diese nur noch dick genug sind und durch übergeklebtes Stanniol das Licht der benachbarten Theile abgehalten wird.

Zur Untersuchung im parallelen polarisirten Licht kann man dasselbe Instrument benutzen, wenn es sich nur um eine ungefähre vorläufige Bestimmung der Auslöschungsrichtungen eines kleinen Krystalls handelt. Man legt denselben alsdann auf den Krystallträger *i* genau in die Mitte und schraubt den oberen Theil so hoch, dass man durch denselben statt der Oeffnung *p'* den Krystall deutlich erblickt; da man dann zugleich den Umriss des unteren Nicols sieht, so kann man leicht annähernd beurtheilen, ob in denjenigen Stellungen, in welchen der erstere beim Drehen dunkel erscheint, gewisse Kanten desselben den Diagonalen des Nicolquerschnittes parallel sind oder nicht.

Will man dagegen einen grösseren Krystall im parallelen Licht untersuchen, das Interferenzbild gepresster oder gekühlter Gläser, einer Alaun-

platte oder dergl. beobachten, so hat man das Rohr *n* mit seinem gesammten Inhalt zu entfernen und durch das einfache kürzere Rohr *s*, Fig. 2, Taf. III, zu ersetzen, in welches oben der Nicol *r* passt (die unten angesetzte Kappe *x* dient für die Stauroskopmessung und ist daher für diesen Fall fort-, ebenso ist die Platte *t* durch den gewöhnlichen Krystallträger *i* ersetzt zu denken). Ferner hat man das Rohr *g* mit den Sammellinsen und dem Mikrometer aus dem Rohre *c* zu entfernen und dieses wieder in die Hülse des Trägers einzuschieben, wie es Fig. 2 zeigt.

§. 115. **Das Stauroskop.** Die in Fig. 2, Taf. III dargestellte Zusammensetzung des verticalen Polarisationsapparates dient zugleich als Stauroskop, bei welchem ja der Krystall durch paralleles polarisirtes Licht beleuchtet werden muss. Statt des Krystallträgers *i* wird nun der Träger *t*, ebenfalls mit einer am Rande befindlichen Durchbohrung in den Stift des Rohrs *l* passend, aufgesetzt; derselbe, in Fig. 3 von oben gesehen gezeichnet, besteht aus einer Messingplatte mit rectangulärem weitem Ausschnitt (letzterem entspricht das punktirte Viereck); neben diesem ist eine Stahlplatte *u* aufgeschraubt, deren nach der Mitte zu gerichtete Seitenfläche nach unten abgeschrägt ist, während die obere Kante derselben eine sehr wenig von einer Geraden abweichende Wellenlinie darstellt, von welcher zwei Punkte, rechts und links dem Ende genähert, am meisten nach der Mitte des Instrumentes zu hervorragen (eine so schwache Krümmung ist deshalb gewählt worden, um die Abnutzung der vorspringenden Stellen auf ein Minimum zu reduciren). Wenn man also an diese Schneide von *u* eine zur Ebene des Krystallträgers verticale ebene Fläche anlegt, so wird diese nur in zwei Punkten von jener berührt; die Verbindungslinie dieser beiden Punkte ist genau parallel der Geraden zwischen den Nullpunkten der beiden gegenüberliegenden Nonien auf dem Nonienkreise *l*, mit welchem die Platte *t* ja in fester Verbindung steht. Auf diese wird nun die kleine rectanguläre, aus schwarzem Glase verfertigte Platte *v* so aufgelegt, dass sie den viereckigen Ausschnitt von *t* völlig bedeckt und zugleich durch eine kleine Feder mit einer Seitenfläche an die Schneide von *u* gegengedrückt wird. Sowohl diese Seitenfläche, welche genau senkrecht zur Oberfläche geschliffen ist, als auch die letztere sind polirt. Aus dem Bisherigen folgt nun, dass die Kante zwischen diesen beiden polirten Flächen der schwarzen Glasplatte, wenn diese in der erwähnten Weise befestigt ist, sei es, dass die polirte Oberfläche nach oben oder nach unten gekehrt ist, genau parallel sein muss der Verbindungslinie zwischen den Nullpunkten der beiden Nonien. Dem Centrum des Nonienkreises entsprechend ist eine kreisförmige Durchbohrung in der Platte *v* befindlich, auf welche die Krystallplatte mit möglichst wenig Canadabalsam so aufgeklebt wird, dass kein Licht durch die Oeffnung neben dem Krystall vorbei gehen kann; es sind daher mehrere Platten von schwarzem Glase mit verschieden grossen Oeffnungen vorhanden.

Zur Befestigung des Krystalls wird die betreffende Platte *v* herabge-

nommen, die Krystallkante, mit welcher man die Schwingungsrichtung vergleichen will, ungefähr parallel und möglichst nahe an die Kante der beiden polirten Flächen v' und v'' (s. Fig. 4, welche in natürlicher Grösse gezeichnet ist, während alle anderen Figuren auf $\frac{1}{4}$ verkleinert sind) gebracht und so der Krystall angekittet. Darauf wird Beides zusammen auf den Tisch eines Reflexionsgoniometers aufgesetzt und die Kante $v'\,v''$ centrirt und justirt; war der Krystall vorher fest angedrückt, so muss seine Fläche w' (Fig. 4) parallel v' sein, also bei genügender Distanz des leuchtenden Objects die Reflexbilder beider im Fernrohr zusammenfallen; das von der andern Krystallfläche w'' reflectirte Bild wird jedoch nur dann in der Zone $v'\,v''$ liegen, wenn die Kante $w'\,w''$ wirklich genau der Kante $v'\,v''$ parallel ist. Statt diesen Parallelismus herzustellen, was ein langes Probiren erfordern würde, verfährt man in einfacherer Weise so, dass man den Winkel bestimmt, um welchen der von w'' reflectirte Strahl von der Ebene abweicht, in welcher die Reflexion von v', v'', w' stattfindet, und aus diesem Winkel berechnet, wie viel die beiden Kanten gegen einander gedreht sind.

Für die Bestimmung dieser Correction ist das in §. 117 beschriebene, dem optischen Apparat beigegebene kleine Goniometer besonders eingerichtet. Das Fernrohr desselben hat ein Gesichtsfeld von 5—6°, so dass nach dem Justiren der Flächen v' und v'' das Bild von w'' noch im Gesichtsfeld sichtbar ist, wenn selbst die Krystallkante um 2—3° schief angelegt worden war. Daraus, ob dasselbe zu hoch oder zu tief ist, ersieht man, nach welcher Seite die Kante $w'\,w''$ gegen diejenige $v'\,v''$ gedreht ist; und wie viel die Abweichung des von w'' reflectirten Strahls aus der Reflexionsebene der justirten Flächen beträgt, bestimmt man durch ein feines, in der Brennebene des Fernrohrs befestigtes Glasmikrometer, von dem vorher durch Messung festgestellt worden ist (s. §. 117), welchem Winkel ein Theilstrich desselben entspricht. Dreht man das Mikrometer so, dass seine Theilung vertical aufrecht im Gesichtsfeld, dessen Mittelpunkt dem Nullpunkt jener entspricht, steht, so gehen die Reflexbilder der beiden justirten Flächen beim Drehen genau durch den Nullpunkt, das der Fläche w'' nicht; man stellt letzteres nun auf die Theilung ein, liest an dieser die Abweichung in Strichen und (durch Schätzung) deren Theilen ab, und findet durch Umrechnung in Winkelwerth den Winkel δ, die Abweichung des von w'' reflectirten Strahls von der Ebene der übrigen. Um aus δ die gesuchte Grösse α, d. i. den Winkel, welchen die Kante $w' : w''$ mit $v' : v''$ bildet, zu berechnen, bedarf es der Kenntniss des Einfallswinkels der Strahlen bei der Reflexion und des Winkels der Flächen $w' : w''$, dessen Supplement $= \gamma$. Der letztere muss durch Messung bestimmt sein; was den ersteren betrifft, so macht man denselben $= 45^0$, d. h. stellt die optische Axe des Fernrohrs auf dem Goniometer genau normal zu den Geraden zwischen dem leuchtenden Object und dem Centrum des Goniometerkreises (wie dies mit dem Goniometer des optischen Apparates auszuführen ist, wird in §. 117 angegeben werden).

Ist diese Bedingung erfüllt, so folgt die gesuchte Correction aus den Winkeln δ und α nach der Formel:

$$\sin\alpha = \frac{\sin\delta}{\sin\gamma}\sqrt{2}.$$

Zu grösserer Bequemlichkeit ist die folgende Tabelle berechnet worden, welche gestattet, die gesuchte Correction α für bestimmte Werthe von γ und δ unmittelbar abzulesen, resp. sehr einfach zu interpoliren:

Tabelle der Correction α für die Stauroskopmessung.

	$\gamma = 20^0$	$= 25^0$	$= 30^0$	$= 35^0$	$= 40^0$	$= 50^0$	$= 60^0$	$= 70^0$	$= 80^0$	$= 90^0$
$\delta = 0^0 10'$	0° 41′	0° 33′	0° 28′	0° 25′	0° 22′	0° 18′	0° 16′	0° 15′	0° 14′	0° 14′
— 20	1 23	1 7	0 57	0 49	0 44	0 37	0 33	0 30	0 29	0 28
— 30	2 4	1 40	1 25	1 14	1 6	0 55	0 49	0 45	0 43	0 42
— 40	2 45	2 14	1 53	1 39	1 28	1 14	1 5	1 0	0 57	0 57
— 50	3 27	2 47	2 22	2 3	1 50	1 32	1 22	1 15	1 12	1 11
1 0	4 8	3 21	2 50	2 28	2 12	1 51	1 38	1 30	1 26	1 25
— 10	4 50	3 54	3 18	2 53	2 34	2 9	1 54	1 45	1 41	1 39
— 20	5 31	4 28	3 46	3 17	2 56	2 28	2 11	2 0	1 55	1 53
— 30	.	4 58	4 12	3 40	3 18	2 46	2 26	2 14	2 9	2 6
— 40	.	.	4 43	4 6	3 40	3 5	2 43	2 30	2 24	2 21
— 50	.	.	.	4 31	4 2	3 23	3 0	2 46	2 38	2 36
2 0	.	.	.	.	4 24	3 42	3 16	3 1	2 52	2 49

Beispiel: Sei 1 Theilstrich des Mikrometers gleich einem Winkel von 18′ 30″, das leuchtende Object eine kleine entfernte Gasflamme, deren Bild im Fernrohr = 0,6 Theilstrich hoch; seien die Flächen v' und v'' so genau justirt, dass jenes vom Nullstrich gerade halbirt wird, wenn es in die Mitte eingestellt wird; reiche das von w'' reflectirte Bild dagegen auf der Theilung von 3,0 bis 3,6, so ist die Abweichung = 3,3 Theilstrich, d. h. $\delta = 1^0\,1'$; sei der Winkel $w' : w''$ mit Vernachlässigung der Minuten = 126°, sein Supplement $\gamma = 54^0$, so folgt aus der Tabelle die Correction α

für 1° 1′ = 1° 53′ (Columne 50°)
- - = 1 40 (- 60°),

der Werth für die zu interpolirende Columne 54° ist also

$$\alpha = 1^0\,48'.$$

Hieraus ersieht man, dass man die Lage der Kante des Krystalls gegen die Nullrichtung des Nonius am Instrument ebenso genau bestimmen kann, wie man Krystallwinkel zu messen im Stande ist. Würde man die Schwingungsrichtung des unteren Nicols ganz genau jener Richtung parallel machen können, welche die Punkte 0° und 180° an dem festen Kreise k verbindet, so gäbe die Drehung des Nonienkreises (mit der Krystallplatte) von 0 bis zu der Stellung, wo die Březina'sche Doppelplatte (S. 391) erkennen lässt, dass eine Schwingungsrichtung des Krystalls parallel der des Nicols ist, — un-

mittelbar den Winkel der ersteren mit der Nullrichtung des Nonius, und — nach Zufügung der Correction α — denjenigen mit der Krystallkante. Jenen Parallelismus herzustellen, ist jedoch auf einfache Weise nicht möglich, die Nothwendigkeit desselben aber leicht zu vermeiden, wie folgende Betrachtung zeigt:

Sei in Fig. 538: OO die Richtung 0°—180° an dem festen Kreise, und sei das Rohr b (in Fig. 2 Taf. III) so eingeschoben, dass die Schwingungsrichtung des Polarisators nicht genau parallel OO sei, vielmehr die Richtung NN habe, welche mit OO den unbekannten Winkel ν einschliesst; sei ferner der ausgezogene Rhombus $abcd$ die Krystallplatte, deren eine Kante ab genau parallel OO*), SS deren Schwingungsrichtung, so ist der Winkel $s = SCO$ derjenige, welcher mittelst des Stauroskops gefunden werden soll. Dreht man nun den Krystall bis zur Einstellung der Brezina'schen Interferenzfigur, d. h. bis $SS \parallel NN$, so ist der abgelesene Drehungswinkel $SCN = s + \nu$, also um ν grösser, als der gesuchte. Legt man nunmehr die Platte um, so dass die vorher oben befindliche Fläche unten zu liegen kommt, die vorher OO parallele Kante ab es auch jetzt ist, der Krystall also die durch den punktirten Umriss $a'b'c'd'$ bezeichnete Stellung hat, bei welcher $S'S'$ dessen Schwingungsrichtung ist, und dreht wieder bis zum Eintritt der Interferenzfigur, d. h. bis $S'S' \parallel NN$, so ist der abgelesene Drehungswinkel $S'CN$, d. h. $s - \nu$, also um ν zu klein gegen den gesuchten. Addirt man aber die beiden, so gefundenen Drehungen

Fig. 538.

$$s + \nu$$
$$\text{und } s - \nu,$$

so erhält man $2s$, d. h. das arithmetische Mittel beider ist der gesuchte Winkel s.

Hieraus ergiebt sich nun folgendes Verfahren zur Bestimmung des Winkels, welchen eine Schwingungsrichtung mit einer Kante eines Krystalls bildet:

Das Polarisationsinstrument für paralleles Licht wird derart eingerichtet, wie es Fig. 2 Taf. III darstellt; der Polarisator wird so gestellt, dass seine Schwingungsrichtung ungefähr parallel der Richtung 0°—180° auf dem Kreise k ist, der Analysator genau senkrecht dazu, also auf vollständige Dunkel-

*) Dieser Parallelismus braucht nicht erfüllt zu sein, wenn nur die Abweichung davon bekannt ist; diese ist aber die soeben besprochene Correction α.

heit; alsdann wird die Kappe x, welche die Březina'sche Doppelplatte enthält, über das Rohr s geschoben und so weit gedreht, bis das in Fig. 454 abgebildete Interferenzbild erscheint*). Ist die Krystallplatte, welche zur Messung dienen soll, so klein, dass man nicht das ganze Interferenzbild mehr übersehen kann, was meistens der Fall ist, so wendet man das Rohr n (Fig. 1 Taf. III) mit dem Ocularrohr q statt s an, schraubt aber dann von den vier Objectivlinsen o die drei unteren ab, so dass nur die grösste übrig bleibt. Da nunmehr die Bildebene des Objectivs viel höher liegt, als vorher, so hat man das Ocularrohr q so weit als möglich herauszuziehen, um ein scharfes Interferenzbild zu erhalten. Ist dies der Fall, so wird die Platte t mit v und der Krystallplatte aufgesetzt, nachdem vorher für die Befestigung der letzteren die Correction α festgestellt worden ist; darauf wird der vorher auf 0 gestellte Nonienkreis gedreht bis zum Eintritt der Interferenzfigur (s. S. 391 die Erklärung zu Fig. 455) und abgelesen, und dies zweckmässig 5—6 mal wiederholt und von den Ablesungen das arithmetische Mittel genommen. Alsdann wird die Platte v mit dem darauf befestigten Krystall abgehoben und vorsichtig, um den Krystall nicht zu verschieben, umgelegt, so dass die Oberfläche mit dem Krystall nach unten, die Fläche v'' wieder an die Schneide von u Fig. 4 angedrückt, liegt. Damit der Krystall dabei nicht an die Platte t anstösst, muss er etwas von der Kante $v' : v''$ entfernt sein (s. Fig. 4), und um auch bei schmalen Flächen dann noch die Reflexion von w'' (zur Bestimmung von α) zu ermöglichen, hat u vorn einen kleinen Einschnitt. Nach dem oben über die Construction von t, u, v Bemerkten sieht man leicht ein, dass durch diese Manipulation der Krystall ganz genau so gedreht worden ist, wie es Fig. 538 darstellt; wiederholt man also jetzt die Einstellungen durch Drehen nach der anderen Seite ganz in derselben Weise, und nimmt von deren Mittel und dem zuerst erhaltenen die halbe Summe, und corrigirt endlich die resultirende Zahl noch mit dem Werthe von α in positivem oder negativem Sinne, je nach der Seite, nach welcher die Krystallkante $w' : w''$ schief angelegt war, so hat man den gesuchten Winkel, welchen die Schwingungsrichtung mit jener Kante einschliesst.

Da die vorstehende Untersuchung fast nur bei monosymmetrischen und asymmetrischen Krystallen vorgenommen wird, bei denen die Schwingungsrichtungen für die verschiedenen Farben dispergirt sind, so versteht es sich von selbst, dass das Instrument hierbei mit homogenem Licht erleuchtet werden muss. Am besten verwendet man einen Bunsen'schen Brenner, dessen Rohr oben eine plattgedrückte Form besitzt, so dass das Gas aus einem circa 30 Millim. langen und 3 Millim. breiten Schlitz austritt; man erhält dann eine circa 40 Millim. breite und hohe Flamme, welche man in ihrer ganzen Flächenausdehnung färbt, indem man in den unteren Theil

*) Diese Stellung ist an den Fuess'schen Instrumenten durch Marken bezeichnet, wie überhaupt alle Theile derselben solche tragen, welche stets einzustellen sind, um die günstigsten Bedingungen der Centrirung u. s. w. hervorzubringen.

derselben von jeder Seite her eine, an einem Platindraht befindliche Perle von geschmolzenem schwefelsaurem Lithium (roth), schwefelsaurem Natrium (gelb) oder schwefelsaurem Thallium (grün) einführt. Diese Flamme stellt man dann möglichst nahe vor dem Spiegel des Polarisationsinstrumentes auf und dreht diesen so, dass ihr Bild gerade in die Mitte des Gesichtsfeldes reflectirt wird.

§. 116. **Der Axenwinkelapparat.** Um den Winkel der optischen Axen in Luft oder in Oel zu messen (s. S. 100), werden die optischen Theile des Polarisationsinstrumentes Fig. 1, Taf. III benutzt, aber in ein anderes Stativ eingesetzt, wie es in Fig. 5 derselben Tafel dargestellt ist. Dasselbe besteht aus einer hölzernen Fussplatte *J*, auf welcher zwei horizontale Messingröhren *A* und *A'* mittelst zweier verticaler Säulen befestigt sind. In das eine wird nun das Rohr *n* des verticalen Instrumentes mit allen seinen Theilen, in das andere ebenso das Rohr *c* mit *g* u. s. w. eingeschoben, und die Nicols beider Theile so gestellt, dass ihre Schwingungsrichtungen mit der Horizontalebene ca. 45°, mit einander 90° bilden. Zwischen Objectiv- und Sammellinsen muss so viel Platz frei bleiben, um die zu untersuchende Krystallplatte frei umdrehen zu können. Die beiden Rohre *A* und *A'* tragen je eine verticale Säule, *S* und *S'*, auf welche der horizontale Theilkreis *K*, der in der Mitte eine weite Durchbohrung hat, aufgeschraubt ist; in dieser Durchbohrung dreht sich der Ring *B*, welcher mittelst des Armes *D*, der am Ende durch eine Schraube am Kreise festgeklemmt werden kann, bewegt wird. Diametral entgegengesetzt diesem Arme trägt *B* einen zweiten *C* mit einem Nonius, oder statt dessen zwei um 180° von einander abstehende, beide rechtwinkelig zu *D*. Der Ring *B* ist innen conisch ausgebohrt und umfasst den ringförmigen Conus *E*, welcher durch die kleine Schraube *s* festgeklemmt werden muss, wenn man den Axenwinkel messen will (vergl. nächsten §). Auf das Ende von *E* wird nun von unten her die kreisförmige Metallscheibe *F* aufgeschraubt, welche auf ihrem verdickten Rande eine federnde, kreisförmig ausgeschnittene, dünnere Platte trägt, so dass in dem zwischen beiden befindlichen Raume die Scheibe *f* und mit ihr die den Krystall *k* tragende Pincette horizontal verschoben werden kann. Diese Verschiebung dient zum Centriren der Krystallplatte: man lässt *G* durch Lösen der Klemmschraube *γ* so weit nieder, bis man, durch das Instrument blickend, die Interferenzfigur am besten sieht, also eine klare, zur Messung geeignete Stelle des Krystalls sich in der verlängerten Axe des Fernrohrs *n* befindet; dann zieht man das letztere in dem Rohre *A* so weit zurück, dass man den Krystall selbst deutlich erblickt, und centrirt ihn, ebenso wie einen Krystall bei einer Goniometermessung, durch Hin- und Herschieben von *f* in seiner Ebene, bis die zur Messung zu benutzende klare Stelle desselben bei jeder Drehung der Pincette und des Conus *E* still steht. Nähert man jetzt wieder die Objectivlinsen *o* der Platte und stellt durch Drehung derselben die beiden Axenbilder im Gesichtsfeld des Instrumentes ein, so wird man finden, dass diese nicht in die Mitte zu

bringen sind, weil die optische Axenebene des Krystalls noch nicht genau horizontal gestellt ist; entweder sind beide zu hoch, oder zu niedrig, oder ihre Verbindungslinie ist nicht parallel dem Horizontalstrich im Mikrometer, d. h. die Platte ist noch zu justiren. Dies geschieht mittelst der Kugelverschiebung des Theiles *H* der Pincette; *H* bildet nämlich oben ein kreisförmiges Segment einer Kugeloberfläche, auf deren verdicktem Rande ein eben solches H^1, concentrisch mit dem ersten und in der Mitte mit weitem kreisförmigem Ausschnitt versehen, aufgeschraubt ist. Zwischen beide ist die kreisrunde, ebenfalls ein Kugelsegment bildende, kleinere Scheibe, welche das untere Ende von *G* bildet, eingeklemmt; man kann demnach den unteren Theil der Pincette nach jeder beliebigen Richtung um einen gewissen Winkel neigen. Dabei ist das Drehungscentrum dieses Kugelgelenks (des sogen. Petzval'schen Trägers) einige Millimeter unter dem Ende jener, an welcher Stelle sich die Krystallplatte befindet, deren Centrirung also durch das Neigen derselben nach irgend einer Seite keine erhebliche Aenderung erfährt. Den unteren Theil von *H* bildet nun die eigentliche Pincette zum Halten des Krystalls *k*, welcher zu dem Zwecke auf ein Glasstückchen mit Canadabalsam aufgekittet ist (um bei möglichst genäherten Linsen *o* und *h* die Platte frei umdrehen zu können, ist es nothwendig, dieses Glasstückchen nicht breiter zu nehmen, als die Breite des Krystalls in der Ebene der optischen Axen beträgt). Die Pincette, aus stark vergoldetem Stahl gefertigt (um nicht zu rosten, wenn sie in Oel verwendet wird), besteht aus einer nicht federnden Hälfte (in Fig. 5 rechts) mit einer verhältnissmässig grossen ebenen verticalen Fläche, auf welche die den Krystall tragende Glasplatte mittelst der horizontalen Schneide der andern federnden Hälfte fest gepresst wird; in Folge dessen behält die Platte stets die Lage jener ebenen Fläche. Es versteht sich von selbst, dass man die Krystallplatte auf dem unteren Theil des lang rectangulären Glasstückchens so aufkittet, dass ihre Axenebene so genau als möglich senkrecht zur Längsrichtung des letzteren steht; denn wenn man alsdann das Glasstück so in die Pincette einklemmt, dass seine Längsrichtung vertical ist, so bedarf es zur Justirung der Platte nur noch einer kleinen Correction.

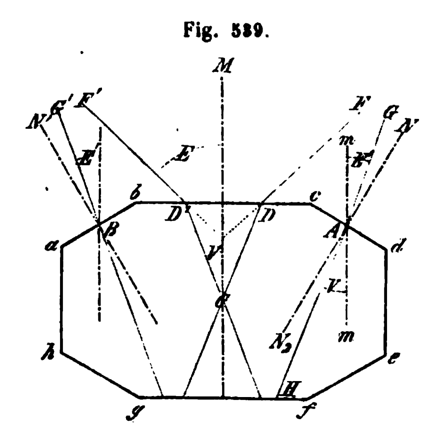
Bei der einfachen Messung des Axenwinkels in Luft hat man das in Fig. 5 *M* gezeichnete Oelgefäss wegzulassen und, wie schon bemerkt, mit den Linsen *o* und *h* so nahe an die Krystallplatte heranzugehen, als es möglich ist, ohne dass dieselbe beim Herumdrehen an einen der beiden Theile anstreift. Je grösser die Breite der Platte, desto weiter muss der Abstand der Linsen bleiben, desto kleiner ist das Gesichtsfeld; doch bleibt dieses selbst bei sehr grossen Platten immer noch gross genug, um bei einiger Uebung schnell die Lage der Axen aufzufinden, wenn man nur den Krystall in der oben angegebenen Weise nahezu richtig eingesetzt hatte, wozu man ihn vorher im verticalen Instrument zu betrachten hat. Nach der Centrirung und Justirung nimmt man nun die Messung so vor, wie es S. 400 und 401 (vergl. Fig. 85) angegeben wurde, während man zur Be-

leuchtung die im vorigen § erwähnte breite Flamme eines nahe vor die Linse *e* gesetzten Bunsen'schen Brenners benutzt, welche einmal durch Lithium-, die andern Male durch Natrium- und Thalliumsulfat gefärbt wird. Die Drehung der Pincette geschieht jetzt durch den Arm *D*, indem man dessen Klemmschraube fasst, und die Ablesung mittelst des Nonius *C*. Will man ein möglichst genaues Resultat erzielen, so stelle man bei jeder Farbe die schwarze Hyperbel nicht nur auf den mittelsten Strich des Mikrometers, sondern auch auf mehrere benachbarte ein, aber gleich viel zu beiden Seiten (z. B. — 2, — 1, 0, + 1, + 2), und nehme das arithmetische Mittel; ganz ebenso verfahre man bei der Einstellung der zweiten Axe; die Differenz der beiden Mittel ist der gesuchte scheinbare Axenwinkel $2E$. Die Einstellung einer Hyperbel auf einen Mikrometerstrich kann am genauesten ausgeführt werden, wenn die Ringe der Interferenzfigur ziemlich klein, aber doch noch deutlich sichtbar sind; weit weniger genau, wenn dieselben so eng sind, dass man sie nicht deutlich sieht, sondern nur die hyperbolischen dunklen Büschel erblickt, ebenso, wenn die Platte so dünn ist, dass ganz weite, dann auch stets sehr verwaschene, Interferenzstreifen auftreten. Hat man also in Bezug auf die der Platte zu gebende Dicke freie Wahl, so schleife man sie so, dass recht deutliche, aber nicht zu weite Lemniscaten entstehen.

Es ist S. 102 gezeigt worden, dass man den wahren Axenwinkel $2V$ aus dem gemessenen scheinbaren, $2E$, berechnen kann, wenn man den mittleren Brechungsexponenten β kennt. Ist dies nicht der Fall, so muss man zwei Platten, eine senkrecht zur ersten, die andere senkrecht zur zweiten Mittellinie, haben und deren Messung in Oel vornehmen (s. S. 104). Es giebt indessen einen Fall, in welchem man den wahren Axenwinkel $2V$ mit einer einzigen Platte durch Messung in Luft bestimmen kann, und dieser soll jetzt erörtert werden.

Sei Fig. 539 der Durchschnitt eines rhombischen Krystalls nach der optischen Axenebene desselben, und sei letzterer demnach gebildet von den beiden Pinakoiden, welche normal zu den beiden Mittellinien stehen (von denen das zur zweiten Mittellinie senkrechte übrigens auch fehlen kann), und einem Prisma. Man wird alsdann in den meisten Fällen sowohl durch das Pinakoid *bc* (*fg*) beide Axen sehen, als auch je eine durch ein Paar paralleler Prismenflächen. Centrirt man also im Axenwinkelapparat die Mitte der Fläche *bc*, so kann man den scheinbaren Winkel $2E$ messen, welchen *DF* mit *D'F'* macht (wenn *CD* und *CD'* die Richtungen der wahren optischen Axen

Fig. 539.



des Krystalls sind). Centrirt man darauf einen Punkt des Krystalls, welcher auf der Geraden CM so weit nach rückwärts gelegen ist, dass beim Drehen einmal die Prismenfläche ab, das andere Mal cd gerade in die Mitte des Gesichtsfeldes kommt, wenn die Richtung der gebrochen aus derselben austretenden optischen Axe, d. i. AG, resp. BG', der Axe des Instrumentes entspricht, — so kann man durch Einstellung der Axenbilder, welche aus den beiden Prismenflächen austreten, den Winkel messen, welchen der Strahl AG mit BG' einschliesst. Werde dieser Winkel mit $2E'$ bezeichnet, ferner der Winkel, welchen die Normalen zu den beiden Prismenflächen, AN und BN', bilden, mit $2P$, und seien $2E$, $2E'$ und $2P$ gemessen worden, so ist daraus der wahre Axenwinkel $2V$ zu finden, wie folgende Betrachtung lehrt:

Bekanntlich ist

$$\beta . \sin V = \sin E \qquad (1)$$

und da $\frac{\sin GAN}{\sin HAN_2} = \beta$ und $mm \perp bc$,

$$\beta . \sin (P - V) = \sin (P - E') \qquad (2)$$

Dividirt man Gleichung (1) durch (2), so folgt:

$$\frac{\sin V}{\sin (P - V)} = \frac{\sin E}{\sin (P - E')} .$$

Um diese Gleichung auf eine Form zu bringen, welche eine leichte Berechnung der Unbekannten V gestattet, setzen wir

$$\frac{\sin E}{\sin (P - E')} = p ;$$

dann ist:

$$\sin V = p \cdot \sin P \cdot \cos V - p \cdot \cos P \cdot \sin V ,$$

durch cos V dividirt:

$$\tang V = p \cdot \sin P - p \cdot \cos P \cdot \tang V$$

$$\tang V = \frac{p \cdot \sin P}{1 + p \cdot \cos P} ;$$

für p seinen Werth eingesetzt und gekürzt, folgt

$$\tang V = \frac{\sin E}{\cos E' - \cotang P (\sin E' - \sin E)} .$$

In allen andern Fällen, als dem soeben besprochenen, bedarf es zu der directen Bestimmung des optischen Axenwinkels zweier Platten, welche senkrecht zur ersten, resp. zur zweiten Mittellinie geschliffen sein müssen. Um den Axenwinkel derselben in Oel zu bestimmen, bedient man sich des in Fig. 5 im Querschnitt sichtbaren Oelgefässes M, dessen Vorderansicht Fig. 6 darstellt. Dasselbe besteht aus einem parallelepipedischen Glasstück mit einem Einschnitt, der zu beiden Seiten durch dünnere planparallele Glasplatten geschlossen ist und welchen man mit farblosem (gebleichtem) Oliven- oder Mohnöl füllt; die drei Glasplatten werden unten durch eine Messingfassung zusammengehalten. Dieses Oelgefäss wird einfach auf das an L befestigte Tischchen gesetzt, und zwar so, dass nach dem Centriren die Krystallplatte frei darin gedreht werden kann; L ist in einer Hülse nach

oben und unten verschiebbar. Hat das Gefäss die richtige Stellung, so schiebt man die optischen Theile des Instrumentes derart an dasselbe heran, dass Sammel- und Objectivlinse dessen Wände berühren. Da es, besonders bei kleinen Krystallen, wünschenswerth ist, ein möglichst grosses Gesichtsfeld zu haben, d. h. die Linsen denselben möglichst nähern zu können, so empfiehlt es sich, ein so schmales Oelgefäss zu nehmen, wie es in Fig. 5 gezeichnet ist. Bei einer grossen Platte dagegen kann man eher auf ein weites Gesichtsfeld verzichten, weil diese leichter zu centriren und zu justiren ist, und kann daher für solche ein zweites Oelgefäss verwenden, weit genug, um sie darin umdrehen zu können, d. h. etwa mit dem doppelten Abstand der beiden Glaswände von dem des ersten.

Zur Messung des Axenwinkels in höherer Temperatur bringt man an Stelle des Oelgefässes ein metallenes Luftbad, welches auf beiden Seiten weit vorragt und dort durch Gasflammen erhitzt wird. Dasselbe ist ein parallelepipedischer Kasten Fig. 7, Taf. III (Vorderansicht und horizontaler Durchschnitt durch die Mitte) mit zwei, bis 300° getheilten Thermometern und einer in der Oberfläche befindlichen Oeffnung zur Einführung der Pincette mit dem Krystall; jene kann alsdann mit einem die Pincette umfassenden Metallscheibchen wieder geschlossen werden. In der Mitte der beiden grossen Wände befindet sich je ein Fenster, durch eine eingesetzte planparallele Glasplatte *O* gebildet, an welche die Linsen des Instrumentes von beiden Seiten nahe herangeschoben werden. Um auch hier bei kleinen Krystallen den Vortheil eines grossen Gesichtsfeldes zu haben, andererseits aber auch grosse Krystalle frei umdrehen zu können, ist die Weite des mittleren Theils veränderlich, wie am besten aus dem Durchschnitt in Fig. 7 zu ersehen. Die beiden Metallscheiben *N*, in welche je ein rundes Planglas *O* eingesetzt ist und durch eine kleine Feder festgehalten wird (um es austauschen zu können, wenn es ja einmal durch zu schnelles Erhitzen springen sollte), können nämlich in den röhrenförmigen Ansatzstücken *P* mittelst eines Schlüssels herausgeschraubt werden, bis sie sich in einer Ebene mit den Seitenwänden des Erhitzungskastens befinden. Man bringt die beiden Fenster für jede Messung in denjenigen gegenseitigen Abstand, welcher den Dimensionen der Krystallplatte entspricht, setzt den Kasten auf das Tischchen *L* in der richtigen Höhe auf, bringt die Platte mit dem untersten Theil der Pincette hinein, und centrirt und justirt ganz ebenso wie in freier Luft; alsdann schliesst man die obere Oeffnung und erhitzt das Luftbad von unten her durch zwei kleine Flämmchen, bis der Stand der Thermometer constant geworden ist; etwa eine halbe Stunde später notirt man denselben und führt die Messung des Axenwinkels ganz so aus wie bei gewöhnlicher Temperatur. Verträgt der Krystall einen höheren Wärmegrad, so vergrössert man nun die Flammen und wiederholt den Versuch.

Um sich davon zu überzeugen, dass die zur Messung des Axenwinkels benutzte Platte genügend genau normal zur Mittellinie sei, genügt es in den meisten Fällen, dass man sie auf den Krystallträger des verticalen Polari-

sationsinstrumentes auflegt, und sieht, am besten in homogenem Licht, ob der Mittelpunkt des Lemniscatensystems mit demjenigen des Gesichtsfeldes (dem Nullpunkt des Mikrometers) zusammenfällt. Will man jedoch genau ermitteln, ob beide optischen Axen denselben Winkel mit der Normale der Platte einschliessen, was der Fall sein muss, wenn diese genau senkrecht zur Mittellinie ist, so kann man dies auf folgende Weise: In das Ocularrohr *q* Fig. 5 des Fernrohrs wird nach Wegnahme des Nicols *r* ein kleines Rohr, Fig. 8, eingeschoben, so dass ein Ausschnitt, welcher an einer Seite desselben befindlich, gerade mit einem der beiden rectangulären Schlitze des Ocularrohrs coincidirt; jenes Rohr enthält eine kleine Spiegelglasplatte, welche man von vorn mittelst eines in die Fassung einzusteckenden Stahlstäbchens drehen kann. Lässt man nun das Licht einer seitlich aufgestellten Flamme durch den Schlitz fallen und von dem unter 45° Neigung aufgestellten Spiegel parallel der Axe des Fernrohrs reflectiren, bis es an die Oberfläche der Krystallplatte gelangt, so wird es hier (besonders wenn man hinter die Platte mattes schwarzes Papier schiebt) in derselben Richtung zurückgeworfen, wenn jene polirte oder mit Glas bedeckte Oberfläche genau senkrecht zur Axe des Fernrohrs steht. Man wird also im andern Falle das von der Platte reflectirte Bild der Glasmikrometerstriche neben dem direct gesehenen Bilde erblicken und beide durch Drehen der Krystallplatte (mittelst des Armes *D* Fig. 5) zur Deckung zu bringen haben. Nachdem man bei dieser Stellung den Nonius abgelesen, hat man einzeln die Einstellungen der beiden Axen vorzunehmen; ist die Platte genau senkrecht zur Mittellinie, so ist die erstere Einstellung das Mittel zwischen den beiden letzten. Es ist klar, dass eine solche Prüfung ganz unnöthig ist, wenn die Platte von natürlichen Krystallflächen gebildet ist, welche vermöge der Symmetrie des Krystalls die erforderliche Lage haben müssen, oder wenn nur eine derartige Fläche vorhanden ist, weil man alsdann die zweite, durch Schleifen herzustellende, mit dem Goniometer auf ihren Parallelismus mit der ersten prüfen kann.

§. 117. **Goniometer des optischen Apparates.** Der Kreis *K* des Axenwinkelapparates, welcher mittelst des Nonius eine Ablesung auf 1′ gestattet, kann zu einem sehr brauchbaren kleinen Goniometer benutzt werden. Die Zusammensetzung dieses Instrumentes zeigt der Durchschnitt Fig. 9 Taf. III, dessen Ebene senkrecht zu derjenigen des Durchschnittes Fig. 5, daher hier die beiden Säulen des Stativs, *SS′*, nicht sichtbar sind. An den festen Kreis *K* wird von unten her der Arm *R* eines kleinen Fernrohrs (mit Vorsatzlupe zum Centriren) angeschraubt; in den Conus *E* wird das hohle, geschlitzte und gegen die Innenwand von *E* federnde Rohr *X* eingeschoben, welches oben eine vollständige Fuess'sche Centrir- und Justirvorrichtung *Z* (s. S. 463) trägt. Beim Centriren und Justiren ist es vortheilhaft, die Schraube *s* zu lösen und die Axe *X* durch eine auf den Conus *E* von unten angeschraubte Scheibe *U*, deren Rand gekerbt ist, zu drehen. Beginnt man die eigentliche Messung, so hat man *s* wieder anzuziehen und den Arm *D* mittelst der daran befestigten Klemmschraube zu drehen; *R* hat einen Aus-

schnitt, welcher der Klemmschraube den Durchgang gestattet, daher man *D* und somit den Krystall ungehindert um 360° drehen kann. Bei der Messung hat man natürlich eine entfernte Flamme oder dergl. als Object zu verwenden.

Will man das Goniometer zur Messung von Brechungsexponenten benutzen, so wird, wie Fig. 10 Taf. III [Durchschnitt*) in derselben Ebene, wie Fig. 9] zeigt, der Träger des Beobachtungsfernrohrs *Q* umgekehrt aufgesetzt, d. h. der Arm *R'* auf dem beweglichen Arm *D* festgeschraubt; steckt man dasselbe in entgegengesetzter Richtung in seine Hülse, so hat es nunmehr genau die gleiche Lage, wie in Fig. 9, nur dass es jetzt mit *D* und dem Nonius *C* um den Mittelpunkt des Kreises *K* drehbar ist, und daher seine Drehung abgelesen werden kann. Diesem Fernrohr gegenüber wird ein zweites *T* mit dem Kreise durch den Arm *T'* fest verbunden; dieses besitzt statt des Oculars im Focus seines Objectivs eine undurchsichtige Platte *W* (darunter in Ansicht gezeichnet) mit einem schmalen Spalt, welcher durch eine vorgesetzte Flamme erleuchtet wird (Flamme eines Bunsen'schen Brenners mit Lithium-, Natrium- oder Thalliumsulfat gefärbt). Auf das Spaltfernrohr kann noch der Nicol *V* aufgesetzt werden, um bei doppeltbrechenden Prismen die beiden Spectren einzeln zu beobachten, indem man dessen Hauptschnitt einmal vertical (dann geht das Licht hindurch, welches parallel der Kante des zu untersuchenden Prismas schwingt), einmal horizontal stellt. Das Prisma, dessen Brechungsexponent gemessen werden soll, wird, wie in der Zusammensetzung Fig. 9, auf den Tisch der Centrir- und Justirvorrichtung *Z* aufgesetzt; seine Drehung muss aber jetzt unabhängig gemacht werden von derjenigen des Armes *D* und des Fernrohrs *Q*. Dies ist dadurch erreicht, dass der Arm *T'* des Spaltfernrohrs bis über die Mitte des Kreises hinausreicht und einen mit Schraubengewinde versehenen kreisförmigen Ausschnitt besitzt, in welchen der Conus *E* eingeschraubt wird**). Dieses Schraubengewinde ist so nahe am Kreise *K* befindlich, dass der Conus *E*, selbst wenn er ganz fest eingeschraubt wird, noch nicht sein Lager, die Hülse *B*, berührt, also von deren Drehung unabhängig ist. Dabei bleibt das Prisma für sich immer noch drehbar (und zwar dadurch, dass man den Cylinder *X* von unten mit der Hand dreht), so dass man dasselbe bequem centriren, justiren und in diejenige Stellung bringen kann, in welcher es das Minimum der Ablenkung zeigt.

Das soeben beschriebene Goniometer dient, wie S. 476 erwähnt, zugleich zur Bestimmung der Correction α bei der Stauroskopmessung und ist zu diesem Zwecke das Beobachtungsfernrohr *Q* mit einem feinen Strichmikrometer versehen. Um dessen Strichwerth in Winkelmaass zu bestimmen,

---

*) Nur die Fernröhre sind in dieser, wie der vorigen Figur, in Vorderansicht gezeichnet.

**) Bei der Zusammensetzung des Instrumentes muss derselbe herausgenommen werden, ehe man das Spaltfernrohr anschraubt, und erst, wenn dies geschehen, wieder eingesetzt werden.

d. h. ausfindig zu machen, welchen Winkel zwei Bündel paralleler Strahlen mit einander einschliessen, deren Bilder im Gesichtsfeld einen Abstand von 1 Theilstrich haben, wählt man die in Fig. 9 dargestellte Zusammensetzung des Goniometers, setzt auf *Z* einen Körper mit einer vollkommen ebenen spiegelnden Fläche, z. B. eine der zum Stauroskop gehörigen schwarzen Glasplatten, auf, bringt diese Fläche durch Centriren genau über den Mittelpunkt des Kreises und justirt sie, so dass beim Drehen derselben das von ihr reflectirte Bild einer entfernten Flamme, welche genau in der durch *Q* gehenden Horizontalebene aufgestellt ist, längs der horizontalen Mittellinie des Mikrometers durch das Gesichtsfeld des Fernrohrs läuft. Alsdann dreht man den Arm *D*, wie bei einer gewöhnlichen Krystallmessung, stellt das Bild der Flamme auf zwei benachbarte Theilstriche des Mikrometers und liest beide mal den Nonius ab. Die Differenz beider Ablesungen ist, wie eine einfache Betrachtung lehrt, die Hälfte des gesuchten Winkels. Da man den Strichwerth des Mikrometers nur ein für alle mal bestimmt, und der Fehler der Messung durch die Multiplication mit 2 verdoppelt wird, so stelle man alle Striche von — 5 bis + 5 ein, so dass man die Ablesungen für 10 gleich gross sein sollende Intervalle erhält, und nehme von diesen das arithmetische Mittel.

Bei der Bestimmung der Stauroskopcorrection α hat man, wie S. 476 auseinandergesetzt wurde, das Fernrohr *Q* genau senkrecht zur Richtung des Strahls zu bringen, welcher von dem leuchtenden Object nach dem Centrum des Kreises geht. Dies geschieht auf folgende Weise: Das feststehende Fernrohr des Goniometers ist auf irgend einen Punkt gerichtet, den man markirt (z. B. durch ein mit Bleistift gezeichnetes Kreuzchen an der gegenüberliegenden Wand, dessen Mittelpunkt genau im Mittelpunkt des Mikrometers im Fernrohr sichtbar sein muss); alsdann schraubt man es ab, kehrt es in seiner Hülse um, befestigt es auf dem Arm *D*, wie in Fig. 10, richtet es auf denselben markirten Punkt und liest den Nonius ab; darauf dreht man es so weit, bis der Nonius eine genau 90° von der vorigen abstehende Ablesung zeigt und stellt nun die als leuchtendes Object dienende Flamme so auf, dass sie bei dieser Stellung genau im Mittelpunkt des Mikrometers erscheint. Bringt man nun das Fernrohr wieder in seine vorige feste Stellung durch Anschrauben von *R* an den Kreis, so bildet seine Axe genau einen rechten Winkel mit der Geraden von der Flamme zur Mitte des Kreises.

§. 118. **Das Schneiden, Schleifen und Poliren der Krystallplatten.** In vielen Fällen liefern natürliche Flächen oder Ebenen einer deutlichen Spaltbarkeit schon die erforderlichen Platten, und sind solche selbst bei nur mittelmässiger Beschaffenheit der Flächen den künstlich hergestellten vorzuziehen, da es niemals gelingt, namentlich nicht bei kleinen Krystallen, eine Ebene genau in der erforderten Lage anzuschleifen. Den günstigsten Fall für das Schleifen hat man dann vor sich, wenn eine von zwei parallelen natürlichen Flächen direct verwendbar ist, die andere da-

gegen durch Abschleifen hergestellt werden muss, sei es, dass sie zu klein ausgebildet oder dass der Krystall zu dick ist.

Will man aus einem einigermassen grossen Krystall eine Platte herstellen, die abfallenden Stücke aber noch weiter verwenden, so muss man ihn in der erforderlichen Richtung durchschneiden. Ist die Substanz so hart, dass sie nicht mehr leicht mit dem Messer geschabt werden kann, so muss man sich einer Schneidemaschine bedienen, an welcher durch Treten eine mit einem Schwungrad verbundene dünne Metallscheibe in Rotation versetzt wird; diese wird mit angefeuchtetem Schmirgelpulver bestrichen, und das durchzuschneidende Stück gegen deren Schneide gedrückt. Solche Maschinen, wie sie der Mechaniker Fuess in Berlin liefert, kann man namentlich auch benutzen, um aus Gesteinsstücken dünne Platten auszusägen, welche zu Dünnschliffen für mikroskopische Untersuchung verarbeitet werden sollen. Da der Gebrauch einer Schneidemaschine indess grössere Uebung erfordert, so ist es im Allgemeinen zu empfehlen, die bestimmt orientirten Krystallplatten, wenn sie einen höheren Härtegrad besitzen, durch einen sachverständigen Optiker (Hr. Steeg in Homburg oder Hr. Fuess in Berlin) schneiden zu lassen.

Bei geringer Härte dagegen, wie sie bei der Untersuchung künstlich dargestellter krystallisirter Körper fast allein vorkommt, kann man das Durchschneiden eines Krystalls leicht durch eine feine Laubsäge bewerkstelligen, deren Sägeblatt sehr schmal sein muss oder durch einen feinen Draht ersetzt wird. Das Sägen muss sehr langsam und vorsichtig ausgeführt werden und zwar stets unter Benetzung des Sägeblattes oder des Drahtes; wo es nicht nöthig ist, die durchgeschnittenen Flächen zu conserviren, wende man ein Lösungsmittel der Substanz zum Benetzen an. Bei der Anwendung des Drahtes ist die Verwendung von Schmirgelpulver kaum zu entbehren. Ist der Krystall gross und etwas bröckelig, so kittet man ihn mit einer Mischung von Wachs und Colophonium auf einem horizontalen Brettchen fest, auf welchem seitlich zwei verticale Wände befestigt sind: diese sind mit je einem senkrechten Schlitz versehen, welcher der Säge zwar eine Bewegung vor und zurück, nach oben und unten, aber keine Abweichung nach rechts und links gestattet.

Kommt es dagegen auf die abfallenden Stücke nicht an, so stelle man die Fläche zuerst durch vorsichtiges Feilen, oder noch besser Abschaben mit einem Messer, annähernd her, und schleife sie alsdann eben. Ist nicht sehr viel Substanz zu entfernen, so beginne man direct mit dem Schleifen.

Ist der Krystall klein, so hat man beim Schleifen eine sicherere Führung nöthig, als es das Fassen mit den Fingern gestattet. Man senkt alsdann denselben in Siegellack, oder in Gyps oder fasst ihn mittelst Kork in folgender Weise: ein guter, dichter und weicher Korkstöpsel wird von oben nach unten (parallel der Cylinderaxe) durchgeschnitten und die Schnittfläche beider Hälften eben gefeilt; dann werden beide wieder aneinandergelegt und vier horizontale Stecknadeln durch das Ganze gesteckt; zwischen

die beiden, beliebig von einander zu entfernenden Schnittflächen wird der Krystall so eingeklemmt, dass der abzuschleifende Theil über eine Endfläche des Korkes hervorragt, und die anzuschleifende Ebene dieser Endfläche parallel ist. Dieser kleine von Nörremberg angegebene Apparat gestattet selbst bei sehr kleinen Krystallen eine ziemlich sichere Führung, wenn man ihn nur durch einen geringen Druck der Finger in seiner Lage erhält. Das Schleifen selbst wird auf einer matten Glasplatte mit einer Benetzungsflüssigkeit (Oel, Wasser oder Alkohol) ausgeführt; müssen die die Umgrenzung der Platte bildenden Flächen intact bleiben, so darf man kein Lösungsmittel anwenden, andernfalls ist dies jedoch vorzuziehen, da es das Schleifen in hohem Grade beschleunigt. Bei etwas härteren Krystallen nimmt man noch feinstes Schmirgelpulver neben dem Benetzungsmittel. Eine vollkommen ebene, nicht convexe Fläche zu schleifen, erfordert eine ziemlich grosse Uebung; hat man die Neigung des Krystalls während des Schleifens etwas geändert, so bildet sich eine sehr stumpfe Kante und es sitzt nur noch ein Theil der Fläche auf der Glasplatte auf; alsdann sehe man zu, welcher der beiden Flächentheile die richtigere Lage hat, und schleife nur diese fort (indem man auf dieser Seite auf den Krystall drückt), bis sie die ganze Fläche bildet.

Zum Poliren der geschliffenen Flächen dient feines, sämisch gegerbtes Leder oder Seide, auf eine ganz ebene Fläche (Holz oder Glas) aufgespannt; als Polirmittel benutzt man am besten englisch Roth (caput mortuum, Fe^2O^3). Weiche Körper nehmen keine Politur an und hat man sich daher mit den durch den Schliff erhaltenen Flächen zu begnügen, nachdem man sie auf einem ausgespannten Leder ohne Polirmittel ein wenig abpolirt hat; namentlich für die Messung des Axenwinkels in Oel reichen solche Platten fast immer hin. Sind die Flächen zu matt, um ein scharfes Axenbild, ein deutliches Spectrum (bei Prismen) zu liefern, so werden mittelst Canadabalsam dünne planparallele Glasblättchen auf dieselben gekittet und möglichst fest angedrückt, damit nicht die Canadabalsamschicht keilförmig werde und Fehler erzeuge. Statt des Canadabalsams kann man auch Mastixlösung in Aether oder eine Mischung beider, welche schneller erhärtet, zum Kitten anwenden.

Was die Genauigkeit betrifft, mit welcher die Richtung einer künstlichen Fläche herzustellen ist, so kann dieselbe eine sehr verschiedene sein, je nach Umständen. Hat man z. B. von einem Körper festgestellt, dass er einfach brechend ist, und will seinen Brechungsexponenten bestimmen, so ist die Richtung der beiden zu schleifenden Prismenflächen ganz gleichgültig; man hat also nur darauf zu achten, dass dieselben recht eben sind und einen passenden Winkel mit einander bilden (bei mittlerer Grösse des Brechungsindex zwischen 40 und 70°). Sind ein Paar geeigneter Ebenen, z. B. zwei gegenüberliegende Octaëderflächen (Prismenwinkel 70° 32′), als natürliche Krystallflächen vorhanden, so benutzt man diese und bedeckt die übrigen mit einer Schwärze, welche man aus Russ und einem schnell

trocknenden Oel herstellt. Ist der zu untersuchende Körper nach den Messungen tetragonal oder hexagonal, und handelt es sich nur um die Feststellung der optischen Einaxigkeit und des Charakters der Doppelbrechung, hat man also die Basis, wenn diese nicht auftritt, anzuschleifen, so braucht dies nur ganz angenähert zu geschehen, denn die erforderten Bestimmungen lassen sich noch ausführen, wenn selbst die Platte 6—8° schief geschliffen ist, wenn man nur das Interferenzbild noch in seinem ganzen Umfange im Gesichtsfeld des Polarisationsapparates sieht. Will man dagegen die Brechungsquotienten eines einaxigen Krystalls bestimmen und dazu ein Prisma parallel der Axe verwenden, so muss dieses sehr genau geschliffen sein; ein besonders günstiger Umstand ist hierbei eine vorherrschend prismatische Entwickelung der Krystalle nach der Hauptaxe, indem man alsdann bei hexagonalen Krystallen direct zwei sich unter 60° schneidende Prismenflächen (unter Schwärzung der übrigen), bei tetragonalen eine solche und eine, leicht in genügender Genauigkeit herzustellende, künstliche verticale Fläche verwenden kann. Platten von zweiaxigen Krystallen, welche zur Messung des Axenwinkels dienen sollen, müssen so geschliffen sein, dass ihre Normale nicht mehr als 1° von der Mittellinie abweicht, wenn die Messung auf 2—3′ genau ausfallen soll; bei sehr kleinen Krystallen wird man sich allerdings mit einer geringeren Genauigkeit begnügen müssen. Prismen zur Bestimmung der Brechungsexponenten müssen auf 1° genau die erforderliche Richtung haben, sollen die erhaltenen Zahlen durchschnittlich auf 3 Decimalen richtig sein. Bei rhombischen Krystallen kann man oft durch ein natürliches Prisma, gebildet von zwei Flächen einer prismatischen Form, oder einer solchen und einer Pinakoidfläche (s. S. 86 und 87), zugleich zwei Hauptbrechungsexponenten bestimmen. Bei mono- und asymmetrischen Krystallen genügt es meist, wenn nämlich die Dispersion der Elasticitätsaxen nicht 1—2° übersteigt, die Schliffe für mittlere Farben richtig anzufertigen und auch für die übrigen zu verwenden.

§. 119. **Einige Beispiele krystallographischer Untersuchungen.** Hat man, wie dies meist der Fall ist, durchsichtige Krystalle, deren Form zu bestimmen ist, zur Verfügung, so hat man folgendermaassen zu verfahren: man bestimmt die Form und das Krystallsystem vorläufig nach dem Ansehen, legt einen Krystall auf den Träger des Polarisationsinstrumentes und untersucht, ob die Auslöschungsrichtungen durch alle Flächenpaare, durch welche eine Beobachtung möglich ist, mit jener vorläufigen Annahme übereinstimmen, und ob, falls in irgend einer Richtung optische Axen sichtbar sind, auch deren Lage damit nicht im Widerspruch steht; erst dann, d. h. wenn über das System in den meisten Fällen schon endgültig entschieden ist, geht man zur Messung über. Ueber alle vorgenommenen Beobachtungen wird ein genaues Protokoll geführt, jeder gemessene Krystall sorgfältig gezeichnet, und die einzelnen Flächen desselben numerirt; zu jeder Ablesung am Goniometer ist zu notiren, welche Fläche eingestellt wurde, damit stets eine nachträgliche Controle möglich ist. Werden mehrere Krystalle durchgemessen,

so werden sie numerirt und getrennt aufbewahrt, bis die ganze Arbeit beendigt ist. Ausser den zur Berechnung des Axenverhältnisses nöthigen Winkeln (1 im hexagonalen und tetragonalen, 2 im rhombischen, 3 im monosymmetrischen, 5 im asymmetrischen Systeme) sind stets, wenn möglich, noch einige andere zu bestimmen; den zur Rechnung benutzten, sogen. Fundamentalwinkeln, ist durch Vervielfältigung der Beobachtungen die grösstmögliche Genauigkeit zu geben; mit Hülfe derselben werden dann alle wichtigen Kantenwinkel der Combination berechnet und eine Tabelle aufgestellt, welche in einer Columne die berechneten, in der andern die beobachteten Werthe derselben enthält. Die Vergleichung beider Zahlen liefert einen Maassstab zur Beurtheilung der Genauigkeit, mit welcher die Krystallform bestimmt worden ist. Nach Abschluss der Messung und Berechnung wird die definitive Untersuchung der optischen, eventuell auch anderer physikalischen Eigenschaften (vor Allem der Spaltbarkeit) vorgenommen.

Im Folgenden soll nun an einigen Beispielen der Gang einer solchen Untersuchung kurz skizzirt werden:

Beispiel I: Phosphorwolframsäure $= PW^{11}O^{43}H^{15} + 18H^2O$.

Anscheinend reguläre Octaëder, farblos, durchsichtig. Im polarisirten Lichte einfach brechend, also wirklich regulär. Keine deutliche Spaltbarkeit zu erkennen. Die Untersuchung ist, und zwar ohne Winkelmessung, beendigt (eine Bestimmung der Brechungsindices war in diesem Falle unmöglich auszuführen, weil die Krystalle in der freien Luft sofort verwitterten).

Beispiel II: Kohlensaures Guanidin $= (CH^5N^3)^2H^2CO^3$.

Anscheinend reguläre Octaëder mit kleinen Flächen des Würfels, durchsichtig, farblos. Im polarisirten Lichte erweisen sie sich jedoch als doppeltbrechend; durch zwei gegenüberliegende Flächen gesehen, ist stets eine Auslöschungsrichtung der einen der drei Umrisskanten parallel; darnach wären es tetragonale Pyramiden und die erwähnte Kante jedesmal die Basiskante. Bei der Messung geben in der That diese letzteren Kanten einen etwas kleineren Winkel als die übrigen; die Differenz ist aber so gering, dass sie bei unvollkommeneren Flächen leicht hätten übersehen, und die Krystalle als reguläre bestimmt werden können. Die um etwa 10′ schwankenden Werthe geben im Mittel für den Polkantenwinkel 109° 13′, für den Basiskantenwinkel 109° 6′; aus ersterem folgt das Axenverhältniss nach S. 310 zu 1 : 0,9910, daraus der letztere zu 108° 59′ (Differenz 7′). Für die optische Untersuchung kommt der Umstand sehr zu statten, dass die Krystalle vollkommen nach der Basis spalten; im convergenten Licht zeigt eine Spaltungsplatte nun zwar das Axenbild der einaxigen Krystalle in der richtigen Lage, aber die Mitte desselben farbig, also ist die Substanz circularpolarisirend und muss daher der trapezoëdrischen Hemiedrie des tetragonalen Systems angehören (die Resultate der optischen Untersuchung sind S. 327 aufgeführt).

Beispiel III: Hydrochinon = $C^6H^6O^2$.

Kleine Krystalle, anscheinend reguläre Rhombendodekaëder. Im polarisirten Licht jedoch doppeltbrechend; Auslöschungsrichtungen auf sechs in einer Zone liegenden Flächen parallel deren Zonenaxe, also müssen diese Flächen ein hexagonales Prisma, die andern sechs ein Rhomboëder bilden. Um die Richtigkeit hiervon streng zu beweisen (es könnte auch eine monosymmetrische Combination mit sehr geringer Schiefe der Schwingungsrichtungen vorliegen), wird sofort eine Platte senkrecht zu den ersteren Flächen geschliffen; diese lässt erkennen, dass die Substanz in der That einaxig und jene Zonenaxe die optische Axe sei. Folglich ist es die rhomboëdrisch hemiëdrische Combination: $R, \infty P2$, an welcher nichts weiter zu messen ist, als der Polkantenwinkel des Rhomboëders; dieser ist 117° 3′. daraus folgt nach S. 285 das Axenverhältniss $a : c = 1 : 0,6591$.

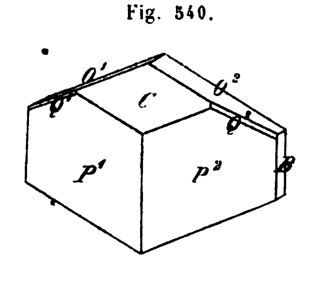
Beispiel IV: Schwefelsaures Kalium = K^2SO^4.

Anscheinend hexagonale Pyramiden mit der Basis. Durch letztere gesehen zeigen die Krystalle jedoch nicht das Interferenzbild der einaxigen, sondern das vielfach gestörte Bild zweier Axen. Es wird daher eine dünne Platte nach derselben Fläche geschliffen; diese wird im parallelen Licht als nicht einfach erkannt, sondern als in sechs Sectoren getheilt, deren je zwei gegenüberliegende gleichzeitig, je zwei benachbarte nach einer Drehung von ca. 60°, dunkel werden; in letzteren bilden die optischen Axenebenen denselben Winkel; die Mittellinie ist aber bei allen senkrecht zur Platte und das Axenbild ganz symmetrisch, sobald das Licht durch einen Theil fällt. der nur einem einzigen Krystall angehört. Folglich sind die Krystalle rhombisch und Drillingsverwachsungen nach einer prismatischen Fläche (s. über das Weitere S. 447).

Beispiel V: Benzylsulfid = $C^{14}H^{14}S$.

Anscheinend monosymmetrische Krystalle, Fig. 540, der Combination eines Prisma P^1P^2 mit einer Querfläche C (etwa als Basis zu nehmen), einer zweiten prismatischen Form O^1O^2 (hintere Hemipyramide), einer dritten Q^1Q^2 (Klinodoma) und der Symmetrieebene B. Durch C blickend, findet man die Auslöschungen parallel und normal zur vermeintlichen Symmetrieaxe, durch zwei parallele P-Flächen schief gegen die Prismenkanten, durch das andere Paar ebenso, mit ungefähr gleicher und entgegengesetzter Schiefe: dies widerspricht der obigen Annahme nicht; da keine Axen direct sichtbar, geht man zur Messung über. Die Flächen sind sehr uneben und gebrochen, die Werthe derselben Kante schwanken an verschiedenen Krystallen um 1—2 Grade; es wurde zunächst gemessen und gefunden der Winkel $P^1 : P^2 = 134° 0′$, $O^1 : O^2 = 132° 47′$; in Rücksicht auf die erwähnte Flächenbeschaffenheit entsteht die Frage, ob nicht etwa diese beiden Winkel gleich sein sollen:

Fig. 540.



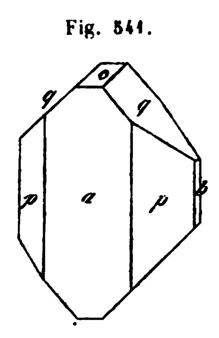
alsdann würde $P^1 P^2 O^1 O^2$ eine rhombische Pyramide, C eine Symmetrieebene derselben und $Q^1 Q^2$ eine prismatische Form sein. In diesem Falle müssten die Winkel $C : P^1 = C : O^1$ u. s. w., ferner Q^1 eine gerade Abstumpfung der Kante $O^1 : P^1$ sein u. s. f. Diese Annahmen werden durch die Messungen bestätigt; da aber die Uebereinstimmung wegen der mangelhaften Ausbildung nur eine unvollkommene ist, so kann der strenge Beweis, dass die Krystalle rhombisch seien, nur auf optischem Wege geführt werden. Da durch B und C keine Axen sichtbar sind, so wird das dritte Pinakoid rechtwinkelig zu jenen beiden angeschliffen; auch durch diese Fläche, nennen wir sie A, sind keine optischen Axen in Luft sichtbar. Nun wird die nach derselben geschliffene Platte in Oel im Axenwinkelapparat untersucht, und zwar einmal um die Kante $A : B$, das andere Mal um diejenige von $A : C$ gedreht; im zweiten Falle erscheinen die Axen ganz symmetrisch zur Normale der Platte und mit symmetrischer Dispersion; daraus geht hervor, dass die Fläche B die optische Axenebene und die Kante $B : C$ die erste Mittellinie ist. Durch Schleifen einer dünnen Platte nach C überzeugt man sich, dass auch hier, natürlich mit ihrem stumpfen Winkel, die Axen sichtbar sind. Die Krystalle sind also r h o m b i s c h und es kann nunmehr aus den Messungen $P^1 : P^2$ und $O^1 : O^2$ gemeinschaftlich das Mittel gezogen werden, ebenso aus $C : O^1$, $C : P^1$ u. s. w. Es sind somit, wenn auch $O^1 : P^1 = O^2 : P^2$ gemessen, alle Kantenwinkel der rhombischen Pyramide bekannt, und folglich nach S. 343 das Axenverhältniss aus zweien zu berechnen und daraus der dritte abzuleiten, welchen man dann mit der Beobachtung zu vergleichen hat.

Beispiel VI: S c h w e f e l s a u r e s A m a r i n $= 2(C^{21}H^{19}N^2)^2SO^4 + 7H^2O$.

Anscheinend monosymmetrische Krystalle, Fig. 541, gebildet von zwei prismatischen Formen pp und qq, zwei Querflächen a und c und der Symmetrieebene b. Durch das am meisten vorherrschende Flächenpaar a betrachtet, zeigen sich die Auslöschungen parallel den Kanten $a : p$ und $a : c$; nähert man das Objectiv des Polarisationsapparates, so erblickt man beide Axen, deren Verbindungslinie parallel der Kante $a : c$, deren Mittellinie genau in der Symmetrieebene, aber mit der Normalen zur Fläche a etwa 10^0 bildet. D a d u r c h i s t d a s m o n o s y m m e t r i s c h e S y s t e m b e w i e s e n. Die Messungen, welche wegen sehr guter Beschaffenheit der Flächen recht genau anzustellen sind, geben nun Resultate, welche, wenn keine optische Untersuchung vorgenommen worden wäre, die Krystalle unbedingt hätten als rhombisch bestimmen lassen. Es wird nämlich gefunden der Winkel $p : p$ vorn (an der Axe a) $= 99^0\, 28'$ bis $29'$ (Mittel $99^0\, 28',5$), der Winkel $q : q$ oben (an c) $= 99^0\, 27'$ bis $35'$ (Mittel $99^0\, 31'$), d. h. beide innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler gleich; die monosymmetrische Combination $ppqq$ steht folglich in geometrischer Beziehung einer rhombischen Pyramide (zu welcher a und c das entsprechende Brachydoma und

b das Makropinakoid sein würde) so nahe, dass sie durch die Messung nicht von einer solchen unterschieden werden kann.

Fig. 541.



Wählen wir *p* zum primären verticalen Prisma. *q* zum primären Klinodoma. also *a* zum Orthopinakoid, *c* zur Basis, so ist die Berechnung des Axenverhältnisses dieser monosymmetrischen Combination eine besonders einfache dann, wenn wir zu Fundamentalwinkeln ausser den bereits erwähnten

$$p : p \text{ an } a = 99^0\ 28',5$$
$$q : q \text{ an } c = 99\ \ 31$$

noch wählen den Winkel:

$$a : c \text{ vorn} = 97^0\ 12',5,$$

weil letzterer gleich dem Supplement des Axenwinkels β ist. so dass von den Elementen nur noch die Axenlängen *a* und *c* ($b = 1$ gesetzt) zu berechnen sind. Verbinden wir die Symmetrieebene mit *c* und einer *p*-Fläche zu einem sphärischen Dreieck, so sind in demselben die Winkel 90° ($b : c$), 49° 44',2 ($b : p$) und eine Seite 97° 12',5 (Winkel der Klinodiagonale: Verticale) bekannt; berechnet man daraus die dem Winkel $b : p$ gegenüberliegende Seite, so ist dies der Winkel, welchen die Klinodiagonale mit der Kante $p : c$ bildet, deren Cotangente die Axe *a* ($b = 1$ gesetzt). Verbindet man ebenso *q*, *a* und *b* zu einem sphärischen Dreieck, in welchem die Winkel $a : b = 90^0$, $q : b = \frac{1}{2}\ (q : q) = 49^0\ 45',5$ und die Seite, welche dem Winkel $q : a$ gegenüber liegt, d. i. $\beta = 82^0\ 47',5$, bekannt sind, und berechnet in demselben die dem Winkel $q : b$ gegenüberliegende Seite, so hat man dadurch den Winkel gefunden, welchen die Kante $a : b$, d. i. die Verticalaxe, einschliesst mit der Kante $q : a$; dessen Cotangente ist aber die Länge der Verticalaxe *c*, wenn $b = 1$. So findet man aus jenen Fundamentalwinkeln folgende Elemente des in Rede stehenden Körpers:

$$a : b : c = 0,8537 : 1 : 0,8531,\ \beta = 82^0\ 47',5.$$

Von Winkeln, welche zur Controle zu messen und mit den aus den Elementen berechneten zu vergleichen wären, könnten nur in Betracht kommen $p : q$ vorn und der entsprechende hinten, sowie $q : a$. Die Berechnung derselben ist sehr einfach: $q : a$ ergiebt sich aus dem zur Herleitung der Verticalaxe dienenden Dreiecke zu 95° 30'; $p : b$ vorn aus dem sphärischen Dreieck *pqb* (darin bekannt: $b : q$, $b : p$ und Winkel der Kante $b : q$ mit derjenigen $b : p$, d. i. die dem gesuchten Winkel gegenüberliegende Seite $= 97^0\ 12',5$) zu 119° 23'; endlich folgt der Winkel $q : p$ hinten $= 110^0\ 9'$ aus dem sphärischen Dreieck *q*, *b* und der hinteren rechten *p*-Fläche, in welchem bekannt sind die Winkel $b : q$, $b : p$ und eine Seite $= 82^0\ 47',5$.

Beispiel VII: Diphenyltrichloräthylen $= C^2HCl^3(C^6H^5)^2$.

Sehr flächenreiche Krystalle von anscheinend rhombischer Symmetrie, gebildet von einem Prisma $a\underline{a}$ und dessen Brachypinakoid $c\underline{c}$, am Ende,

welches in Fig. 542 auf die vermeintliche Basis projicirt erscheint, eine Anzahl rhombischer Pyramiden, welche aber zum Theil einspringende Winkel besitzen, so dass die Krystalle sofort als regelmässige Verwachsungen zu erkennen sind. Durch die vorherrschende Fläche $c\underline{c}$ im polarisirten Licht betrachtet, sind die Schwingungsrichtungen genau parallel den Kanten $c : a$; darnach sind die Krystalle also entweder rhombisch oder monosymmetrisch. In ersterem Falle müssten zwei benachbarte Partien, z. B. die der linken Hälfte, so verwachsen sein, dass die Zwillingsebene c eine Prismenfläche, also x die zweite zugehörige und a das Brachypinakoid wäre; in letzterem Falle würde a unsymmetrisch gegen c und x liegen, alle drei wären Querflächen und die Krystalle prismatisch verlängert nach der Symmetrieaxe. Um gleich von vorn herein zwischen diesen beiden Möglichkeiten zu entscheiden, wird eine Platte senkrecht zu der Zone acx geschliffen; diese erscheint im parallelen polarisirten Lichte in vier Viertel getheilt, von denen je zwei kreuzweise liegende gleichzeitig beim Drehen dunkel werden; je zwei solcher Viertel gehören also einem Krystall an, das Ganze ist ein Durchwachsungszwilling. Wäre dieser rhombisch, so müssten die Auslöschungen parallel und normal zu den Flächen a sein; dies ist aber nicht der Fall, vielmehr stehen sie nahe senkrecht und parallel zur Kante der Schlifffläche mit c; dass aber dies auch nur annähernd der Fall ist, beweist das nicht gleichzeitige Dunkelwerden beider Hälften. Im convergenten Licht zeigt dieselbe Platte, wenn man nur durch einen Krystall sieht, beide optischen Axen in der fast normal zu c stehenden Ebene gleich weit vom Mittelpunkt des Gesichtsfeldes mit gekreuzter Dispersion; dadurch ist nun zugleich entschieden, dass das System auch nicht asymmetrisch (bei geometrischer Aehnlichkeit mit einer monosymmetrischen Form) sein kann. Es ist also nunmehr unzweifelhaft nachgewiesen, dass der Krystall monosymmetrisch und die Zonenaxe von a, c, x die Symmetrieaxe (zugleich erste optische Mittellinie) sei. Wählen wir nunmehr die Querfläche a zum Orthopinakoid, c (die Zwillingsebene) zur Basis, so können wir uns den einfachen Krystall construiren, indem wir uns zwei zusammengehörige Viertel des Zwillings zusammengeschoben denken; seine Projection auf die Symmetrieebene würde das Ansehen von Fig. 543 haben, aus welcher erhellt, dass die Endflächen drei positiven (hinteren) Hemipyramiden o, s und n angehören. Wählen wir von diesen die erste zur primären ($o = +P$), so sind durch diese und die Flächen $a = \infty P \infty$ und $c = oP$ die Elemente des Krystalls vollständig bestimmbar. Seien z. B. gemessen die

Fig. 542.

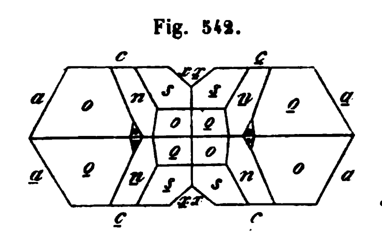
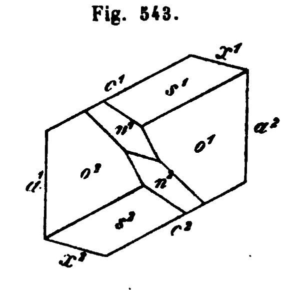


Fig. 543.

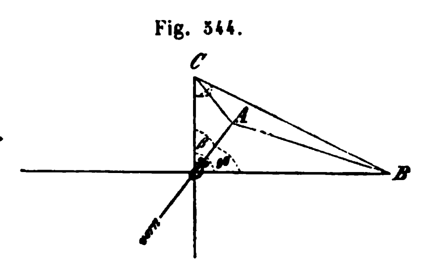


Winkel $a^1 : c^1 = 119^0\,46'$ (Supplement des Axenwinkels β), $o^1 : c^1 = 100^0 47'$ und $o^1 : a^2 = 115^0\,0'$. In Fig. 544 ist OA (nach hinten gerichtet) die Klinodiagonale a, OB die Symmetrieaxe b, OC die Verticale c, ABC der Durchschnitt der rechten hinteren oberen Fläche von o; das Axenverhältniss $a : b : c$ wird nun aus den obigen Fundamentalwinkeln in folgender Weise berechnet: Bekannt sind die drei Winkel des sphärischen Dreiecks, gebildet von o, a und c, mit dem Centrum B, nämlich $BAC : BAO = 79^0\,43'$, $BAC : BCO = 65^0\,0'$, $BAO : BOC = 60^0\,14'$, daraus folgen die den beiden ersteren Winkeln gegenüberliegenden Seiten, und deren Tangenten sind die Axenlängen c resp. a; man findet so:

$$a : b : c = 1{,}3367 : 1 : 1{,}7588, \quad \beta = 60^0\,14'.$$

Nunmehr handelt es sich um die Bestimmung des Zeichens der beiden andern Hemipyramiden. Von diesen liegt s in der Zone $o : c$, also hat sie das gleiche Verhältniss $a : b$, wie $o = P$, dagegen eine kleinere Verticalaxe. Um deren Länge zu berechnen, genügt demnach eine einzige Messung, etwa der Winkel $s^1 : c^1$, welcher deshalb der bequemste ist, weil er in derselben Justirung mit $o^1 : c^1$ gemessen werden kann. Dieser werde gefunden $= 113^0\,40'$, so ist damit in dem um A Fig. 544 beschriebenen

Fig. 544.



sphärischen Dreieck von s^1 (welches jetzt durch ABC dargestellt sein soll), $c = ABO$ und der Symmetrieebene ACO, bekannt der Winkel zwischen den beiden letzten Flächen $= 90^0$, derjenige zwischen s^1 und $c^1 = 66^0\,20'$ und die zwischenliegende Seite, d. i. der Winkel der Kanten OA und AB, da seine Cotangente gleich der Axenlänge a. Berechnet man hieraus den Winkel CAO (Seite des sphärischen Dreiecks) und weiter die neue Länge OC, bezogen auf die alte Länge OA, so findet man eine Grösse, welche fast genau $\frac{3}{4}$ von der für die Grundform berechneten ist; das Zeichen von s ist folglich $= +\frac{3}{4}P$. Man nehme nun genau $\frac{3}{4}c$, berechne daraus rückwärts den Winkel CAO und aus diesem und der zweiten Seite BAO des rechtwinkeligen sphärischen Dreiecks an B denjenigen von $s^1 : c^1$, und vergleiche ihn mit dem direct beobachteten (die Messung war nur approximativ ausführbar, so dass sie wohl auf $20'$ unsicher sein kann; bei Ausführung der Rechnung wird man sich überzeugen, dass die Differenz zwischen Rechnung und Beobachtung wirklich innerhalb dieser Fehlergrenze liegt). Die dritte Hemipyramide n liegt in keiner bekannten Zone, es müssen also zwei Messungen ausgeführt werden, um ihr Parameterverhältniss berechnen zu können. Es sei bestimmt worden der Winkel $n^1 : n^2 = 147^0\,40'$ und $n^1 : c^1 = 104^0\,59'$. Aus dem ersteren folgt, dass sich die beiden oberen Flächen von n in einer Kante von $32^0\,20'$ schneiden, und da diese von der Symmetrieebene halbirt wird, dass der Winkel von n zur Symmetrieebene $= 16^0\,10'$ ist. Sei in Fig. 544 $ABC = n^1$, so sind also in dem um A beschriebenen sphärischen

Dreiecke, gebildet von n^1, der Symmetrieebene und der Basis, alle drei Winkel bekannt (16° 10′, 78° 1′ und 90°); aus diesen ergeben sich die Seiten, d. h. die Winkel *CAO* und *BAO* und aus diesen ein Axenverhältniss der Hemipyramide *n*, dessen *a*, wenn wir wieder $b = 1$ setzen, sehr nahe 4mal so gross ist, wie das *a* der primären Hemipyramide, und dessen *c* nahe das Doppelte ist; das gesuchte Zeichen der Form ist demnach $= + 2P4$.

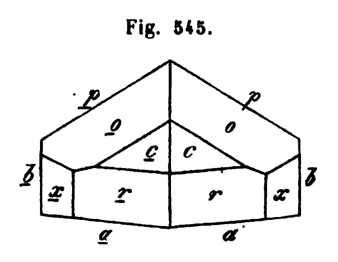
Endlich bleibt noch eine Krystallform zu bestimmen übrig, das hintere Hemidoma *x*. Da es in der Zone *ca* liegt, bedarf es nur einer Messung, etwa des Winkels $x^1 : c^1$, und dieser wird zu 139° 36′ gefunden. Bildet man jetzt ein ebenes Dreieck aus der Verticalaxe, der Klinodiagonale und der Durchschnittsrichtung von *x* mit der Symmetrieebene (d. i. die mit *x′* bezeichnete Grade in der Projection Fig. 543), so sind in demselben die Winkel bekannt, nämlich $\beta = 60° 14'$, $x^1 : c^1 = 40° 14'$, folglich der dritte, x^1 zur Verticale $= 79° 32'$; daraus folgt das Verhältniss der beiden Seiten, welche von den Axen *c* und *a* gebildet werden, fast genau halb so gross, wie bei der Grundform, das Zeichen von *x* ist $= + \frac{1}{2}P\infty$.

Beispiel VIII: Phenylxanthogenamid $= C^9H^{11}SON$.

Prismatisch verlängerte, nur an einem Ende ausgebildete Krystalle; dieses eine Ende hat das Ansehen von Fig. 545 (vertical von oben gesehen). Die Zone, nach welcher dieselben vorherrschend ausgebildet sind, besteht aus einem Flächenpaar *b*, nach welchem die ganze Form symmetrisch zu sein scheint (was weiterhin durch die Messungen bestätigt wird), einem vorderen halben Prisma *a*$\underline{a}$ mit sehr stumpfem Winkel und einem hinteren *p*$\underline{p}$ mit weit spitzerem. Dass die Combination einem einfachen monosymmetrischen ($b = \infty P\infty$) Krystall angehöre, an welchem zufällig die vorderen beiden *p*-Flächen, wie die hinteren, zu *a*$\underline{a}$ zugehörigen, nicht ausgebildet seien, ist sehr unwahrscheinlich, da dieses Auftreten sich an allen Krystallen wiederholt. Dies deutet vielmehr auf eine Zwillingsbildung nach der Fläche *b* hin, wobei die unterstrichen bezeichneten Flächen dem einen, die übrigen dem zweiten Krystall angehören. Was das Krystallsystem der einfachen Krystalle betrifft, so sind zwei Fälle möglich: entweder ist es das monosymmetrische, dann wären *a*, *b* und *p* Querflächen, die Längsaxe der Prismen die Symmetrieaxe; *o*, *x*, *c* und *r* Flächen von Hemipyramiden, deren zugehörige wegen der Zwillingsverwachsung nicht ausgebildet sein können; — oder es ist das asymmetrische, d. h. zu *o*, *x*, *c* und *r* gehören keine symmetrisch liegenden Flächen am einfachen Krystall. Es wird versucht, durch etwaige Spaltungsrichtungen eine Entscheidung zwischen diesen beiden Annahmen zu treffen; es ergiebt sich eine sehr deutliche Spaltbarkeit nach *b*, keine nach einer andern Fläche, was sich mit jeder der beiden Annahmen verträgt. Ueber das Krystallsystem dieses Körpers kann nur durch optische Untersuchung entschieden werden. Ist derselbe monosymmetrisch, so muss eine Spaltungslamelle nach *b*, da dies eine Querfläche ist, Auslöschungen zeigen, welche normal und parallel der Kante $b : a$ sind; ein Blick durch das Polarisationsinstrument zeigt, dass dies nicht der

Fall; die Krystalle sind asymmetrisch. Betrachten wir von jetzt ab nur den einfachen Krystall, und zwar den in Fig. 545 rechts befindlichen, so haben wir zunächst drei Axenebenen zu wählen. Da a mit b fast rechte Winkel bildet, ebenso b mit c (indem $c\underline{c}$ wie eine sehr stumpfe Hemipyramide erscheint), endlich auch der Winkel $a : c$ nicht sehr spitz ist, so dürfte es für die Rechnung bequem sein, die drei Flächen a, b, c zu nehmen; alsdann wird p als Abstumpfung der Kante $a : b$ (wenn man sich den Krystall durch die Parallelflächen ergänzt denkt) zu einem Hemiprisma, und da schon nach dem Augenmaass p stumpfer gegen a als gegen b geneigt ist, wird, bei Belassung der Verticalstellung der Zone abp, $a = \infty \bar{P} \infty$, $b = \infty \breve{P} \infty$, $c = oP$. Da cop eine Zone bilden, so wird, wenn wir o zur primären hinteren rechten oberen Tetartopyramide wählen, $p = \infty ' P$, ferner r, da es in der Zone ca, zu einem vorderen makrodiagonalen Hemidoma, x zu einer abgeleiteten Tetartopyramide. Zur Bestimmung der Elemente haben wir zuerst die drei Winkel $a : b$, $a : c$ und $b : c$ zu messen, und finden für dieselben die Werthe 93° 54′, 102° 35′ und 94° 55′; denken wir uns diese drei Axenebenen durch einen Punkt gelegt, so sind dies die drei Winkel, unter denen sie sich schneiden, im rechten oberen vorderen Octanten des Raumes; berechnet man die drei Seiten des von ihnen gebildeten sphärischen Dreiecks, so findet man die drei Axenwinkel in demselben Octanten:

Fig. 545.



$$\alpha = 94^\circ\, 10'$$
$$\beta = 102\ \ 18$$
$$\gamma = 92\ \ 54.$$

Damit wären drei von den fünf Elementen des Krystalls bestimmt, und es erübrigt nun die Berechnung des Parameterverhältnisses der Grundform o. Wir messen deren Neigung zu b und c, welche wir finden zu 124° 10′, resp. 116° 33′, und berechnen daraus ihr Axenverhältniss genau nach S. 162, indem wir ein sphärisches Dreieck aus o, b und c bilden, dessen Winkel $o : b = 55^\circ\, 50'$, $o : c = 63^\circ\, 27'$ und $b : c = 94^\circ\, 55'$ sind, daraus folgen die den beiden ersteren gegenüberliegenden Seiten (= 61° 4′ und 54° 3′) und, da die Axenwinkel bekannt sind, das Axenverhältniss:

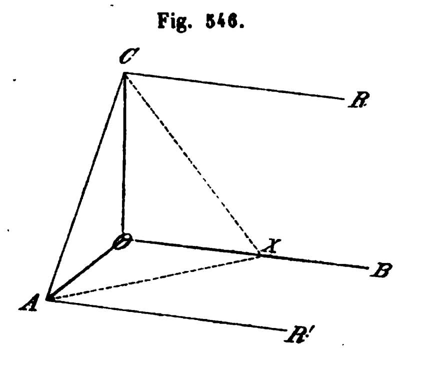
$$a : b : c = 0{,}6027 : 1 : 0{,}6539.$$

Um das Zeichen des Hemidomas r zu bestimmen, genügt ein gemessener Winkel, z. B. $r : c$, welcher 139° 10′ gefunden wird. Seien in Fig. 546 die drei Axen OA, OB und OC, die Ebene $ACRR'$ das Hemidoma r, d. h. AC, CR und AR' seine Durchschnitte mit den drei Axenebenen, von denen zwei der Makrodiagonale parallel sein müssen, so handelt es sich um die Bestimmung der Winkel des ebenen Dreiecks AOC. In dem um A beschriebenen sphärischen Dreieck, gebildet von b, c und r, sind aber ge-

geben zwei Winkel $b : c = 94^0\ 55'$ und $r : c = 40^0\ 50'$, sowie die Seite $OAR' =$ suppl. $\gamma = 87^0\ 6'$; daraus berechnet man die Seite CAO und, da $COA = \beta$ bekannt, das Verhältniss $AO : OC$, und findet dies fast genau gleich demjenigen der Grundform; r hat das Zeichen $'\bar{P}'\ \infty$.

Endlich bleibt noch die Tetartopyramide x übrig; diese liegt in der Zone $b : r$, also muss sie die Axen a und c in demselben Verhältniss schneiden, wie das primäre vordere Hemidoma $r = 'P'\ \infty$, und es genügt demnach eine einzige Messung zur Feststellung ihres Zeichens. Es werde der Winkel $b : x = 131^0\ 28'$ beobachtet, so resultirt dasselbe hieraus folgendermaassen: In Fig. 546 bezeichne ACX die Lage der Fläche x, wobei OX die durch die Rechnung zu bestimmende Unbekannte, so sind in dem um A beschriebenen sphärischen Dreieck, gebildet von $AOC = b$, $AOX = c$ und $ACX = x$, die beiden Winkel $b : x = 48^0\ 32'$, $b : c = 94^0\ 55'$ und die zwischenliegende Seite $CAO = 40^0\ 44'$ (durch das Axenverhältniss gegeben) bekannt, somit die Seite OAX zu berechnen; ist OAX gefunden, so sind im Dreieck AOX alle Winkel (weil $AOX = \gamma$) bekannt, folglich auch das Verhältniss $AO : OX$; setzt man in diesem die Länge $OX = 1$, so ist AO fast genau das Doppelte der primären Axenlänge a, also das Axenverhältniss von $x = a : \frac{1}{2}b : c$, sein Zeichen $2\breve{P}'2$.

Fig. 546.

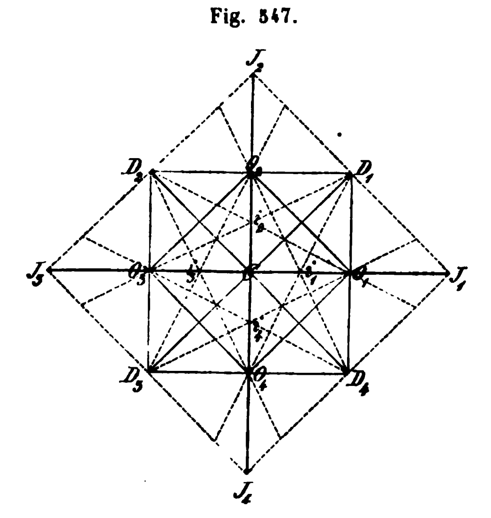


§. 120. **Methoden zur Projection der Krystallflächen.** A. Linearprojection. Eine Projection sämmtlicher Flächen eines Krystalls soll dazu dienen, eine Uebersicht über die Formen zu erhalten und namentlich die Zonenverhältnisse desselben anschaulich zu machen. Diejenige der gebräuchlichen Arten der Projection, welche am einfachsten und am leichtesten verständlich ist, nennt man die Linearprojection oder Quenstedt'sche Projection. Dieselbe besteht darin, jede Fläche darzustellen durch eine Gerade, und zwar diejenige, in welcher sie die Ebene der Zeichnung durchschneidet, wenn man sich sämmtliche Flächen durch einen einzigen Punkt gelegt denkt. Zu diesem Zwecke verschiebt man in der Vorstellung alle Flächen so weit, bis sie sich in einem Punkte schneiden, der von dem Mittelpunkt der Zeichnung in verticaler Richtung um die Länge der Verticalaxe der Grundform absteht, und nimmt zur Zeichnungsebene stets die zur Verticalaxe senkrechte, also horizontale Ebene. Da sich alle in einer Zone liegenden Flächen, wenn sie durch einen Punkt gelegt werden, in einer Geraden, der Zonenaxe, schneiden, so muss diese Gerade die Zeichnungsebene in einem Punkt, dem Zonenpunkt, treffen, durch welchen die Projectionen aller Flächen der Zone gehen. Ist dieser Punkt unendlich fern von der Mitte der Zeichnung, so sind die Projectionslinien aller Flächen der

Zone einander parallel. Zur näheren Erläuterung mögen zwei Beispiele dienen:

1) Projection der regulären Combination $\infty O \infty$, O, ∞O, $2O2$, Fig. 547: Zur Projectionsebene dient eine Hexaëderfläche, zum Schnittpunkt aller Flächen ein Punkt, vertical über der Mitte im Abstand $CO_1 = 1$. Denken wir uns durch diesen die beiden andern Flächen von $\infty O \infty$ gelegt, so schneiden sie, da sie vertical sind, die Zeichnungsebene offenbar in den Geraden $J_1 J_3$ und $J_2 J_4$, dies sind also die Projectionen derselben, zugleich die Richtungen der beiden horizontalen Hauptaxen. Da diese von den Octaëderflächen im Abstande 1 geschnitten werden, so sind deren vier Projectionen (die von zwei parallelen Flächen fallen zusammen, wenn diese durch einen Punkt gelegt werden) die Geraden $O_1 O_2$, $O_2 O_3$, $O_3 O_4$, $O_4 O_1$. Die Flächen von ∞O liefern sechs Projectionen, von vier Flächen, welche die verticale Hauptaxe im Abstand 1 schneiden und einer horizontalen Hauptaxe parallel gehen, das sind die Geraden $D_1 D_2$, $D_2 D_3$, $D_3 D_4$ und $D_4 D_1$, ferner von zwei verticalen Flächenpaaren, welche mit den beiden Hauptaxen $J_1 J_3$ und $J_2 J_4$ 45° einschliessen, das sind $D_1 D_3$ und $D_2 D_4$. Von dem Ikositetraëder $2O2$ schneiden die vier oberen Flächen die verticale Hauptaxe im Abstande 1, ihre Projectionen sind also $J_1 J_2$, $J_2 J_3$, $J_3 J_4$, $J_4 J_1$, wobei $CJ_1 = 2 \cdot CO_1$ u. s. f.; die acht steileren Flächen (s. Fig. 144) dagegen schneiden die verticale Hauptaxe im Abstand 2, sie müssen also verschoben gedacht werden auf den Abstand 1, ihr Axenverhältniss wird aus $2 : 2 : 1$ nunmehr $: 1 : 1 : \frac{1}{2}$; ihre Projectionen schneiden demnach die beiden horizontalen Hauptaxen in den Abständen 1 und $\frac{1}{2}$, es sind die Geraden $i_1\ O_2$, $i_2\ O_1$, $i_2\ O_3$, $i_3\ O_2$, $i_3\ O_4$, $i_4\ O_3$, $i_4\ O_1$, $i_1\ O_4$. Diese Projectionsfigur lässt nun zahlreiche Zonen der Combination erkennen, so z. B. die Zone zweier Dodekaëderflächen mit der $2O2$-Fläche, welche deren Kante abstumpft (Zonenpunkt D_1 u. s. f.), in welcher ferner noch eine Ikositetraëderfläche der beiden benachbarten Octanten liegt; ferner die Zone zweier Flächen O mit deren Kantenabstumpfung ∞O (Zonenpunkt O_1 u. s. f.), in welche ebenfalls zwei Flächen von $2O2$ fallen, u. s. f.

Fig. 547.



2) Projection der rhombischen Combination des Topas Fig. 431 mit den Formen: ∞P, $\infty \breve{P} 2$, P, $\frac{1}{2} P$, $\frac{1}{3} P$, $o P$, $\breve{P} \infty$. Da die Projectionsebene die Basis $o P$ ist, und der Kreuzungspunkt aller Flächen im Abstand c der Grundform vertical über der Mitte C liegt, so ist $A_1 A_2$ die Projection des Brachy-

pinakoids, d. h. die Richtung der Brachydiagonale, $B_1 B_2$ diejenige der Makrodiagonale. Macht man nun $CO_1 : CO_2 = b : a$ der Grundform $= 1 : 0,5285$, so stellen offenbar die Geraden $O_1 O_2$, $O_2 O_3$, $O_3 O_4$, $O_4 O_1$ die Projection der primären Pyramide P dar. Die Flächen von $\frac{1}{2} P$ müssen auf den doppelten Abstand von der Mitte des Krystalls verschoben gedacht werden, um die Verticalaxe im Abstand c zu schneiden, diejenigen von $\frac{1}{3} P$ auf den dreifachen; alsdann wird die Brachydiagonale von ihnen im Abstand $CZ_2 = 2 \cdot CO_2$, die Makrodiagonale im Abstand $CZ_1 = 2 \cdot CO_1$ geschnitten, die Projection von $\frac{1}{2}P$ ist $Z_1 Z_2 Z_3 Z_4$, die von $\frac{1}{3}P$: $B_1 A_2 B_2 A_1$. Die Projection

Fig. 548.

des primären Domas $\breve{P}\infty$ ist offenbar $F_1 F_4$ und $F_2 F_3$, die des primären Prismas ∞P $M_1 M_3$ und $M_2 M_4$ ($\parallel O_2 O_3$ und $O_1 O_2$), endlich die des Prismas $\infty\breve{P}2$ $N_1 N_3$ und $N_2 N_4$ ($\parallel Z_2 O_3$ und $O_1 Z_2$). Die in der Combination Fig. 431 noch auftretende abgeleitete Pyramide x liegt sowohl in der Zone $\breve{P}\infty : \frac{1}{2}P$ (Zonenpunkt x), als auch in derjenigen von $\frac{1}{2}P : \frac{1}{3}P$ (stumpfere Polkante; Zonenpunkte A_1 und A_2); ihre Projection muss demnach durch beide Zonenpunkte, x und A, gehen, es muss demnach $XA_2 XA_1$ dieselbe darstellen; daraus folgt, da sich $O_1 X$ durch Messung $= XZ_1$ ergiebt, dass die Pyramide x die Krystallaxen a, b, c in dem Verhältniss $3a : \frac{3}{2}b : c$ schneidet; dies ist aber $= 2a : b : \frac{2}{3}c$, demnach $x = \frac{2}{3}\breve{P}2$.

Man sieht somit aus diesen Beispielen, dass die Linearprojection nicht nur ein Bild der Zonenverhältnisse eines Krystalls liefert, sondern auch gestattet, das Zeichen einer durch zwei Zonen gegebenen Fläche zu bestimmen, falls nur die Construction derselben genau genug ausgeführt wird.

Zu einer praktischen Verwendung für diesen letzteren Zweck ist sie jedoch deshalb nicht geeignet, weil wir in der S. 171 gegebenen Rechnungsmethode ein Mittel besitzen, die Indices einer Fläche aus zwei Zonen auf viel einfachere und stets absolut sichere Weise zu finden, während bei

complicirteren Werthen der Indices selbst bei mühsamster und sorgfältigster Ausführung der Projection dieselben unsicher bleiben können.

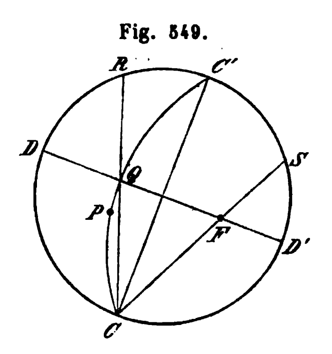
B. Sphärische (Neumann'sche oder Miller'sche) Projection. Etwas weniger einfach für das Verständniss, dagegen in jeder Beziehung ein besseres Bild der krystallographischen Verhältnisse darbietend, besonders deshalb, weil auch die physikalischen dabei mit zur Darstellung gebracht werden können, ist die sphärische Projection. Dieselbe besteht darin, dass man sich um einen Punkt des Krystalls als Centrum eine Kugelfläche von beliebigem Radius und dann von diesem Mittelpunkte aus Normalen auf alle Krystallflächen construirt denkt, welche man verlängert, bis sie die Kugelfläche treffen; man erhält so für jede Krystallfläche einen Punkt auf der Kugelfläche, welcher die erstere ihrer Richtung nach vollkommen bestimmt. Diesen Punkt nennen wir den Pol der Fläche. Da die Normalen aller Flächen einer Zone in einer Ebene liegen, eine durch den Mittelpunkt gehende Ebene aber die Kugelfläche in einem grössten Kreise schneidet, so müssen die Pole aller tautozonalen Flächen auf einem grössten Kreise liegen. Von der Kugeloberfläche mit den darauf befindlichen Flächenpolen haben wir nun durch die Projection ein Bild in der Ebene zu entwerfen. Dies geschieht auf folgende Weise: man wählt zur Projectionsebene eine durch den Mittelpunkt gehende Ebene, und zwar am vortheilhaftesten diejenige, welche senkrecht zu den Flächen der verticalen prismatischen Zone des Krystalls ist. Der grösste Kreis, in welchem diese Ebene die Kugel schneidet, und in dem alsdann die Pole aller vertical gestellten Flächen liegen, wird der Grundkreis genannt. Die eine der beiden durch den Grundkreis getrennten Hälften der Kugel wird so auf dessen Ebene projicirt, dass man sich das Auge in dem am weitesten entfernten Punkte der andern Hälfte, welcher von allen Punkten des Grundkreises 90° absteht, versetzt denkt. Wenn man also nach der entgegengesetzten Seite von der abzubildenden Hälfte der Kugel, von ihrem Mittelpunkte aus, eine Normale zur Ebene des Grundkreises fällt und den Punkt, in welchem diese die Kugeloberfläche trifft, mit allen Flächenpolen jener Hälfte durch Gerade verbindet, so sind die Schnittpunkte dieser Geraden mit der Ebene des Grundkreises die Projectionen der Flächenpole.

Diese Projection der halben Kugelfläche auf die Ebene des Grundkreises besitzt nun folgende Eigenschaften: Jeder Kreis auf der Kugel erscheint als Kreis oder als Durchmesser des Grundkreises, jeder grösste Kreis auf der Kugel erscheint als Durchmesser oder als Kreisbogen, welcher den Grundkreis in den Enden eines Durchmessers desselben schneidet. Um auf der Projection innerhalb eines Zonenkreises, d. h. eines Kreisbogens, in welchem die Pole der Flächen einer Zone liegen, diese selbst ihrer Lage nach zu bestimmen, wenn man ihre Winkel kennt, dient folgender für diese Projection gültige Satz: Verbindet man die Pole zweier Flächen einer Zone mit dem Pole des Zonenkreises durch Gerade und verlängert diese rückwärts, so müssen sie auf dem Grundkreise einen Bogen abschneiden, welcher gleich

dem Winkel zwischen den Normalen beider Flächen ist (der hier gebrauchte Ausdruck »Pol des Zonenkreises« bedeutet: die Projection desjenigen Punktes auf der Kugelfläche, welcher von allen Punkten des Zonenkreises 90° Abstand besitzt, d. h. den Pol einer zu den Flächen der Zone senkrechten Ebene).

Der Pol eines Zonenkreises wird auf die folgende Art durch Construction gefunden: In Fig. 549 ist der Kreis durch *C*, *C'*, *D*, *D'* der Grundkreis, *C* und *P* die Pole zweier Krystallflächen; dann ist auch die zu *C* parallele Gegenfläche zur Zone *CP* gehörig, und deren Pol ist offenbar *C'* (*CC'* Durchmesser); es sind also drei Pole des Zonenkreises *C*, *P*, *C'*, gegeben, und der Kreisbogen *CPC'* kann also auf bekannte Art construirt werden. Der gesuchte Pol dieses Zonenkreises muss auf der Graden *DD'* liegen (*DD'* durch die Mitte und ⊥ *CC'*), denn diese ist die Projection des auf dem Grundkreise normal stehenden Zonenkreises, der sämmtliche, 90° von *C* abstehende Punkte enthält. Ferner muss aber jener Pol nicht nur von *C*, sondern auch von jedem andern Punkte des Zonenkreises *CP*, z. B. von *Q* einen Abstand von 90° haben, dann muss also die Gerade zwischen ihm und *C*, mit der von *Q* nach *C*, da dieses letztere Pol der Zone *DQD'* ist, auf dem Grundkreis einen Bogen von 90° abschneiden. Man ziehe folglich *CQ* bis *R*, schneide von dem Grundkreis einen Bogen *RS* = 90° ab und verbinde *S* mit *C*, so ist *F* der gesuchte Pol des Zonenkreises *CPC'*.

Fig. 549.



Bei dieser Construction ist noch von einer ferneren Eigenschaft dieser Projection Gebrauch gemacht worden, welche keiner weiteren Erklärung bedarf, der nämlich, dass alle Zonen, welche senkrecht zu der des Grundkreises stehen, deren Pole also in letzteren fallen, als Durchmesser erscheinen. Ausserdem sieht man ebenfalls unmittelbar ein, dass die Pole der einzelnen Flächen der Verticalzone direct durch die Winkel ihrer Normalen gegeben sind, da diese letzteren ja in der Ebene des Grundkreises selbst liegen.

Diesen letzteren Umstand benutzt man nun stets bei der Anfertigung einer solchen Projection, indem man zuerst den Grundkreis construirt und in diesen die Pole aller verticalen Flächen des Krystalls einträgt, dann denjenigen einer Endfläche durch Construction bestimmt und von den dadurch erhaltenen Zonenkreisen aus weiter fortschreitet. Das Verfahren soll nunmehr an einigen Beispielen erläutert werden, und zwar zunächst an der in Fig. 548 durch Linearprojection dargestellten rhombischen Combination des Topas, Fig. 431.

1) Sphärische Projection, Fig. 550: zuerst wird der Grundkreis gezogen; auf diesem liegen, 90° von einander abstehend, die Pole des Makropina-

koids, a, a, und die des Brachypinakoids, b, b. Die strich-punktirten Geraden bezeichnen den Querschnitt der beiden Prismen $p = \infty P$, und $p' = \infty \breve{P} 2$; zu diesen sind die Normalen aus dem Mittelpunkte gezogen, es müssen also die Punkte p die Pole der Flächen von ∞P, p' diejenigen der vier Flächen von $\infty \breve{P} 2$ sein. Von den Endflächen ist eine unmittelbar gegeben, die Basis; denn da sie zu den verticalen Flächen normal steht, muss ihr Pol in der Projection der Mittelpunkt c des Grundkreises sein. Verbinden wir nun die gegenüberliegenden Punkte pp, sowie $p'p'$, so sind die construirten Durchmesser die Projectionen von Zonenkreisen, welche senkrecht zum Grundkreis stehen, nämlich der Zonen $p : c$ und $p' : c$. In der ersteren dieser Zonen liegen die Flächen der drei Pyramiden $o = P$, $o' = \frac{1}{2} P$, $o'' = \frac{1}{3} P$; von diesen bildet die erste mit der Basis einen Winkel (der Normalen) von 64°, die zweite von $45\frac{1}{2}$°, die dritte von 34°; und der Pol der Zone cp im rechten oberen Viertel ist der Punkt π ($\pi\pi' \perp pp$). Trägt man also von π' ab die Bogen 34°, $45\frac{1}{2}$°, 64° nach rechts ab und verbindet deren Endpunkte (ω''), (ω') und (ω) mit π, so erhält man als Durchschnitte dieser Verbindungslinien mit cp die Polpunkte o'', o' und o. Dieselben Abstände haben diese drei Pole wegen der Symmetrie natürlich auch in den drei übrigen Octanten. Die Pole von q werden dadurch bestimmt, dass dieselben in den Zonen $aooa$ und $b : c$ liegen; wir construiren also den Kreisbogen durch jene vier Pole; wo dieser den Durchmesser bc schneidet, liegt q. Endlich ist noch die Pyramide x zu projiciren, welche in den Zonen $o' : q$ und $bo''o''b$ liegt; der letztere Kreisbogen kann unmittelbar construirt werden, da vier Punkte desselben gegeben sind; um den ersteren zu finden, von dem man nur zwei Punkte, o' und q, kennt, verfährt man folgendermaassen: in dieselbe Zone gehört auch die parallele Gegenfläche derselben, z. B. die von o', welche natürlich ausserhalb des Grundkreises liegt; um diesen Pol zu finden, erinnern wir uns, dass derselbe auch in einer Zone mit o' und dem Mittelpunkt des Grundkreises (in diesem Fall der Pol einer wirklich vorhandenen Fläche), also auf der Geraden $o'c$ (verlängert) liegen muss; der Pol dieses Zonenkreises ist (π), da c (π) $\perp$ $o'c$, der gesuchte Gegenpol Ω muss also auf der Geraden $o'c$ so liegen, dass die Linien (π) o', d. i. (π) (ω') und (π) Ω auf dem Grundkreise 180° abschneiden; man ziehe also, da (π) (ω') schon vorhanden ist, (ω') c bis O, endlich (π) O, bis es die verlängerte Gerade $o'c$ trifft, so ist Ω der

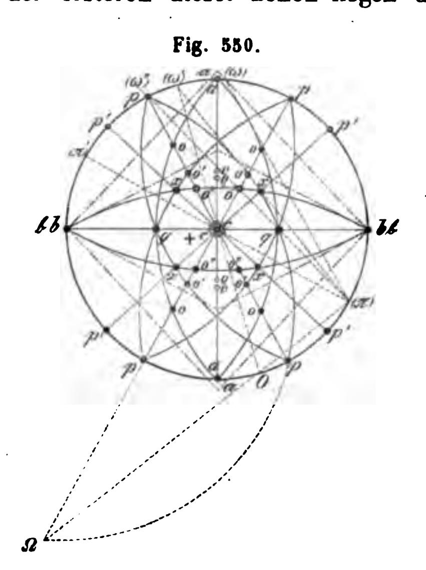
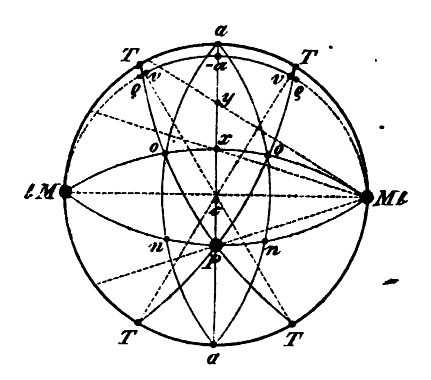


Fig. 550.

gesuchte Gegenpol von o'. Damit haben wir für die Zone $o'q$ drei Punkte, nämlich o', q und Ω, können also den Kreisbogen construiren*); der Schnittpunkt desselben mit der Zone $c\,o''o''b$ giebt die Lage von x, aus welcher hervorgeht, dass x auch in der Zone $p'c$ liegt, wie es sein Zeichen erfordert. Da die drei andern Punkte x symmetrisch liegen, so ist damit die ganze Projection gegeben. — In dieselbe können nun noch die Punkte eingetragen werden, in welchen die drei optischen Elasticitätsaxen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, sowie die optischen Axen für Roth, $\varrho\varrho$, und Violett, vv**), die Kugelfläche treffen, wie in Fig. 550 geschehen ist; ferner ist dort die erste Mittellinie des optisch positiven Krystalls durch ein $+$, und die Spaltungsfläche c, d. i. derselbe Pol, durch einen doppelten Kreis charakterisirt (vergl. S. 366).

2) Sphärische Projection der monosymmetrischen Combination des Kalifeldspath, Fig. 473: Auf dem Grundkreis, Fig. 551, sind MM die Pole des Klinopinakoids, aa die von $\infty \bar{P} \infty$ (in der Combination nicht vorhanden), TT die des Prismas ∞P. Der Durchmesser aa stellt den Zonenkreis aller Querflächen dar, dessen Pole MM sind; also müssen die Pole P, x und y in demselben liegen, und ihr Abstand von a ist gegeben, wenn wir die Winkel der Normalen derselben zu derjenigen zu $\infty \bar{P} \infty$ zu Hülfe nehmen. P bildet mit der Verticalaxe 64°, d. i. zugleich der Normalenwinkel zwischen ihm und $\infty \bar{P} \infty$; tragen wir diesen von a (unten) aus nach links auf dem Kreise auf und verbinden mit dem Pol M (rechts), so erhalten wir den Ort P der Fläche $P = oP$. Die Normalenwinkel von x und y gegen $\infty \bar{P} \infty$ hinten sind 66°, resp. 46°; werden diese von a (oben) aus nach links aufgetragen und die Endpunkte der Bogen mit M (rechts) verbunden, so erhalten wir die Pole x und y der beiden Hemidomen $+ \bar{P} \infty$ und $+ 2 \bar{P} \infty$. Die Hemipyramide $o = + P$ liegt erstens in der Zone xM, also auf dem Kreisbogen MxM, ferner in der Zone $T:P$, in welcher auch die Gegenfläche T liegen muss, folglich auf dem Kreisbogen TPT; die Pole oo dieser Hemipyramide sind die Schnittpunkte der Zonenkreise TPT (rechts und links) mit MxM. Das primäre Klinodoma $n = \mathring{P} \infty$ liegt zwischen P und M mit parallelen Kanten, also auf dem Zonenkreis MPM, ferner in einer Zone mit dem Orthopinakoid und

Fig. 551.



*) Die Construction hätte noch einfacher durch Benutzung zweier Pole p geschehen können, es sollte jedoch dieselbe hier als Beispiel dienen, wie man aus zwei Polpunkten den zugehörigen Polkreis findet.

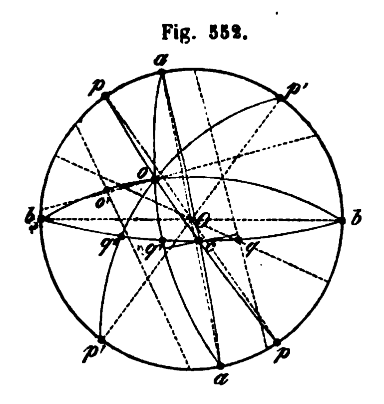
**) Bei einer Ausführung in grossem Maassstabe, etwa zu Demonstrationen in Vorlesungen, ist es passend, die Pole $\varrho\varrho$ und vv mit rother und blauer Farbe zu bezeichnen.

der primären Hemipyramide o, d. h. auf dem Kreisbogen aoa; wo beide sich schneiden, liegen die Pole n des Klinodomas.

In Fig. 551 sind ferner auch die in optischer Beziehung wichtigsten Richtungen eingetragen, nämlich die drei Elasticitätsaxen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ für mittlere Farben, und die optischen Axen für Roth $\varrho\varrho$ und Violett vv (für Feldspath vom St. Gotthard, S. 406); endlich sind die beiden Spaltungsflächen P und M durch doppelte Kreise bezeichnet.

3) Sphärische Projection der asymmetrischen Combination des Kupfervitriol, Fig. 484: Der Grundkreis in Fig. 552 enthält die verticalen Flächen $a = \infty \bar{P} \infty$, $b = \infty \breve{P} \infty$, $p = \infty P'_{,}$, $p' = \infty {,}'P$, direct mit Hülfe ihrer Normalenwinkel eingetragen. Während in allen übrigen Systemen der Pol der Basis entweder unmittelbar gegeben ist, oder (im monosymmetrischen Krystallsystem) in der Zone eines verticalen Flächenpaares und der Mitte des Grundkreises liegt, muss derselbe hier durch eine besondere Construction gefunden werden, welche man in andern Systemen auch auszuführen hat, wenn eine Fläche nicht durch Zonen, sondern nur durch Winkel gegeben ist. Dieselbe ist folgende: sind die Normalenwinkel der Basis c mit a (vorn) $= B$ und b (rechts) $= A$ gegeben, so verlängere man die beiden Durchmesser aa und bb nach vorn und nach rechts und trage von der Mitte O des Grundkreises aus auf Oa die Länge

Fig. 552.



$$OK = \frac{r}{\cos B},$$

auf Ob die Länge

$$OL = \frac{r}{\cos A}$$

auf, wo r den Radius des Grundkreises bedeutet [in dem Fig. 552 gewählten Beispiel sind die Normalenwinkel $c : a = 74^0\,22'$, $c : b = 85^0\,38'$, $r = 20$ Millimeter, daher $OK = 74{,}2$, $OL = 262{,}7$ Millimeter*)]. Von dem Punkte K aus wird nun ein Kreis mit dem Radius

$$Kc = r \cdot \text{tang}\, B,$$

von L aus ein solcher mit dem Radius

$$Lc = r \cdot \text{tang}\, A$$

construirt, diese beiden Kreise schneiden sich, ausser in einem nicht innerhalb des Grundkreises gelegenen Punkte, in c, welches den gesuchten Pol der Fläche c darstellt. Alle übrigen Flächen der Combination können nun in bekannter Weise, entweder durch zwei Zonen, oder durch einen Zonenkreis und einen Normalenwinkel, eingetragen werden. Es wird der Bogen pcp construirt, von p hinten aus nach links der Normalenwinkel von $o : p$

*) Will man nicht mit so grossen Distanzen construiren, so muss man statt des Poles c denjenigen einer Fläche suchen, deren Normalenwinkel zu $\grave{a}$ und b spitzer sind; die übrige Construction ist dadurch nur in der Reihenfolge geändert.

($P : \infty P = 50\frac{1}{2}^0$) auf dem Grundkreise abgetragen und mit dem Pol der Zone *pcp* verbunden; so erhält man den Pol *o* der primären Tetartopyramide; ebenso erhält man aus der Zone *bob* und dem Winkel $o' : b = 40\frac{1}{2}^0$ den Pol der Tetartopyramide $o' = 3\breve{P},3$, aus den Zonen *bcb* und *aoa* den Pol *q'* von $'\breve{P}, \infty$, aus der Zone *bcb* und dem Winkel $q : b = 58\frac{1}{2}^0$ den Pol *q* von $,\breve{P}' \infty$, endlich aus den Zonen *bcb* und *p'op'* den Pol *q''* von $2'\breve{P}, \infty$.

Da das letzte Beispiel den allgemeinsten Fall der Auffindung des Pols einer Fläche enthält, so bedarf es für die ersten Krystallsysteme keiner Beispiele, da ihre Ausführung sich ganz von selbst ergiebt. Im hexagonalen System liegen im Grundkreis die Pole des Prismas mit 60° Abstand, bei tetragonalen Krystallen mit 90° Distanz, der Pol der Basis bei beiden in der Mitte des Grundkreises, also sind die Zonen der Pyramiden gegeben. Im regulären System liegen die Pole zweier Hexaëderflächen im Grundkreis, derjenige der dritten bildet das Centrum; zwischen jenen beiden auf dem Grundkreis liegen vier Dodekaëderpole, in der Zone $\infty O \infty : \infty O$ erhält man durch den Octaëderwinkel die Pole von O u. s. f. Sollte nun irgend eine Fläche in keiner bekannten Zone liegen, so ist sie nach der bei dem letzten Beispiel erörterten Methode aus den Winkeln zu construiren.

Da bei diesen Projectionen stets die Normalenwinkel, d. h. die Supplemente der körperlichen Winkel der Flächen, gebraucht werden, da diese auch meist bei den Berechnungen zu Grunde liegen, da man endlich auch diese bei der Messung direct findet, so ist von Miller vorgeschlagen worden, statt der wahren Winkel stets die Supplemente anzuführen, und man findet die Winkelangaben nach diesem Vorschlage bei allen Krystallographen, welche sich ausschliesslich der Miller'schen Bezeichnung bedienen.

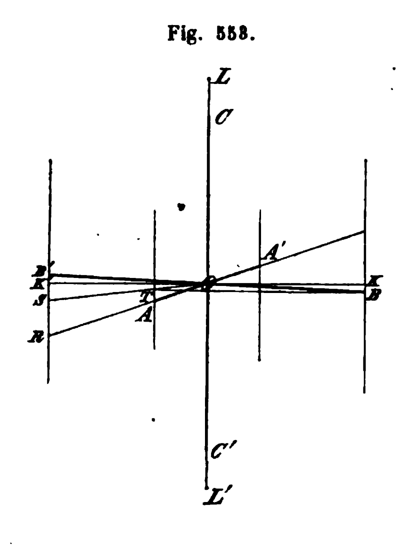
§. 121. **Zeichnung der Krystallformen.** Die perspectivischen Bilder, durch welche in der II. Abtheilung die Formen der Krystalle dargestellt wurden, sind Projectionen, bei denen das Auge gedacht wird in unendlicher Entfernung, weshalb alle am Krystall parallelen Kanten es auch in der Zeichnung bleiben, und ausserdem um eine bestimmte Grösse seitwärts von der nach vorn laufenden Axe und endlich wieder um einen gewissen Winkel erhoben über die horizontale Ebene, so dass die oberen Flächen, und zwar verkürzt, sichtbar werden.

Um eine solche Zeichnung anzufertigen, bedarf es zuerst der richtigen Projection der drei zu Axen gewählten Richtungen, und zwar wollen wir von derjenigen dreier, zu einander rechtwinkeliger, gleich langer Axen (Axensystem der regulären Krystalle) ausgehen. Die in der II. Abtheilung angewendete Projection erhält man auf folgende Art:

Man ziehe zwei, sich unter 90° schneidende Gerade KK' und LL', Fig. 553, theile die erstere in sechs gleiche Theile und ziehe durch K und K', sowie durch den zweiten und vierten Theilpunkt Parallelen zu LL'; dann trage man die Länge eines solchen Theiles von K' aus nach unten auf, den so erhaltenen Punkt R verbinde man mit O und verlängere RO jenseits, so ist der zwischen den beiden mittleren Verticalen enthaltene Theil dieser

Geraden, AA', die Projection der nach vorn laufenden horizontalen Axe. Durch A ziehe man $AS \parallel OK$ und verbinde S mit O, so erhält man in der zweiten Verticalen einen Schnittpunkt T; man ziehe ferner $TB \parallel OK$, verbinde B mit O und verlängere nach der andern Seite, so ist BB' die Projection der querlaufenden horizontalen Axe. Um endlich die richtige Länge der vertical bleibenden dritten Axe zu finden, mache man OC und $OC' = OR$, so sind C und C' die gesuchten Endpunkte der verticalen Axe.

Fig. 553.



Verbindet man A mit B, A mit C, B mit C u. s. f., so erhält man das Bild des Octaëders, vergl. Fig. 134. Wie man dasjenige des Würfels und des Dodekaëders aus dem Axenkreuz construirt, geht unmittelbar aus Figg. 131, 132 und 133 hervor. Verdoppelt oder verdreifacht man die Längen OA, OB, OC, so kann man die Durchschnitte der Flächen von Ikositetraëdern u. s. w. mit den Axenebenen einzeichnen, und wie man daraus die ganzen Formen erhält, lässt sich aus den Figg. 121 bis 130 leicht erkennen.

Will man eine tetragonale Form zeichnen, so multiplicire man die Länge OC mit der Zahl c, welche das Verhältniss der Hauptaxe zu den Nebenaxen angiebt, und trage die neue Länge von O aus nach oben und unten auf der verticalen Axe auf; verbindet man die neuen Endpunkte dieser mit denen der Nebenaxen, A, A', B, B', so erhält man die Kanten der primären tetragonalen Pyramide (vergl. Fig. 345).

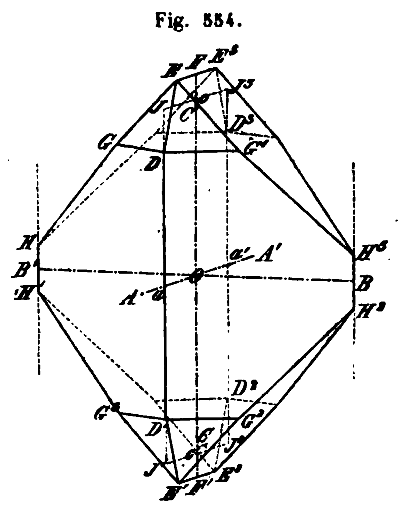
Hat man die Zeichnung einer rhombischen Combination auszuführen, so lässt man BB' unverändert, da wir diese, die Makrodiagonale, stets $= 1$ gesetzt haben, multiplicirt die Länge OA mit dem Werthe der Brachydiagonale a und OC mit dem der Verticale c, und erhält so das Axenkreuz dreier rechtwinkeliger Axen $a : 1 : c$, deren Endpunkte, mit einander verbunden (vergl. Fig. 404), die Kanten der entsprechenden primären rhombischen Pyramide liefern.

Wie nun die Zeichnung einer Combination mehrerer Formen weiterhin vorgenommen wird, soll an einem bestimmten Beispiel erläutert werden, und zwar wollen wir dazu einen rhombischen Krystall nehmen, da sich alsdann das Verfahren bei der Zeichnung eines tetragonalen oder regulären Krystalls von selbst ergiebt.

Es soll die Combination: $p = \infty P$, $o = P$, $q = \breve{P}\infty$ des Quecksilberchlorids, Fig. 415 S. 359, abgebildet werden. Zuerst wird auf die oben angegebene Art das reguläre Axenkreuz construirt; dieses sei in Fig. 554 dargestellt durch die Geraden AA', BB', CC'; das Axenverhältniss des

Quecksilberchlorids ist nach S. 359: $a : b : c = 0{,}7254 : 1 : 1{,}0688$, wir müssen also die Länge OA mit 0,7254, die Länge OC mit 1,0688 multipliciren, um das Axenkreuz dieses Körpers zu erhalten; es ergeben sich die Projectionen der drei Axen aa', BB' (wie vorher), cc'. Ziehen wir nun durch die Punkte aa', BB' Verticalen, so sind dies offenbar die Kanten des Prismas für den hier anzunehmenden Fall, dass seine vier Flächen gleich gross ausgebildet seien. Trägt man nun von a aus auf der Prismenkante eine willkürlich gewählte Länge aD, ebenso nach unten aD^1, endlich auch von a' aus, $a'D^2$ und $a'D^3$ auf, und sollen von diesen Punkten D aus die stumpferen Polkanten der Pyramide o beginnen, so hat man nur $DE \parallel ac$, $D^1E^1 \parallel ac'$, $D^2E^2 \parallel a'c'$, $D^3E^3 \parallel a'c$ zu ziehen; nimmt man nun von O aus auf der Verticalaxe nach oben und unten eine gleich grosse willkürliche Länge $OF = OF'$ und legt durch diese Gerade, parallel der Axe aa', bis dieselben jene Polkanten der Pyramide schneiden, so stellen erstere die obere und untere Kante des Brachydomas $q = \breve{P}\infty$ dar. Von den Schnittpunkten E, E^1, E^2, E^3 aus hat man nun die Combinationskanten zwischen o und q zu construiren; diese sind aber parallel den schärferen Polkanten von o, da q diese abstumpft; also ziehe man $EG \parallel cB^1$, $EG' \parallel cB$,

Fig. 554.



$E^1G^2 \parallel c'B$, $E^1G^3 \parallel c'B^1$ und ebenso dazu Parallele von E^2 und E^3 aus. Von D, D^1, D^2 und D^3aus sind ferner zu ziehen die Combinationskanten zwischen o und dem Prisma; da aber letzteres dasselbe $a : b$ hat, wie die Pyramide, so muss $DG^1 \parallel D^1G^2 \parallel aB$ und ebenso links, und die entsprechenden Kanten auf der punktirt ausgeführten Hinterseite des Krystalls; so werden als Durchschnittspunkte der Kanten $o : q$ und $o : p$ die Punkte G, G^1, G^2, G^3 und die entsprechenden vier der Rückseite erhalten. Von diesen ausgehend, hat man endlich die Kanten $q : p$, d. h. GH, G^1H^3 u. s. f. zu construiren. Die Richtung von GH findet man auf folgende Art: die linke obere Fläche von $q = \breve{P}\infty$ schneidet, wenn sie in den richtigen Abstand von der Mitte des Axenkreuzes gerückt wird, die Axenebene aOc in der Geraden JJ^3, die linke Prismenfläche unter derselben Bedingung (durch die Zeichnung schon erfüllt) in JJ^1; der Punkt J, in welchem sich die Durchschnitte beider Flächen mit der erwähnten Axenebene schneiden, muss demnach ein Punkt ihrer Combinationskante sein. Die Axenebene $B'Oc$ wird von p in einer Verticalen durch B', von q in einer Geraden $B'c$ geschnitten; diese beiden Durchschnitte haben den Punkt B' gemein, also ist dieser ein zweiter Punkt der Combinationskante, die somit bekannt ist. Man hat also, ihrer Richtung $B'J$ parallel, GH zu ziehen, bis es die Kante des Prismas schneidet, ebenso

$G^1H^3 \parallel JB$, $G^2H^2 \parallel J'B$ u. s. f. Die hinteren und vorderen Kanten $q : p$ müssen sich in Punkten schneiden, welche genau in den durch B und B' gehenden Verticalen liegen, durch welche Uebereinstimmung die Genauigkeit der Zeichnung controlirt wird.

Die soeben auseinandergesetzte Methode zur Bestimmung der Richtung einer Combinationskante wird nun allgemein für diesen Zweck angewandt; man denkt sich die Flächen stets in der richtigen Lage zum Axenkreuz, also z. B. eine Pyramide $2P = (a : b : 2c)$ durch die Punkte gelegt, welche von der Mitte um a, b und $2c$ abstehen, — sucht dann die Durchschnitte der beiden zu combinirenden Flächen mit einer Axenebene und bestimmt den Schnittpunkt derselben, nimmt das Gleiche in einer zweiten Axenebene vor und verbindet beide Schnittpunkte durch eine Gerade, deren Richtung die gesuchte der Combinationskante ist.

Um einen hexagonalen Krystall mit dem Axenverhältniss $1 : 1 : c$ zu zeichnen, entwirft man zuerst das Axenkreuz eines rhombischen, dessen Makrodiagonale $= 1$, dessen Brachydiagonale $= 1{,}732$ und dessen Verticale $= c$ des hexagonalen ist; nachdem man die Endpunkte der Axen a und b verbunden und so einen Rhombus von genau 120^0 Winkel (an der Seite) erhalten hat, halbirt man die beiden Seiten der Axe a und zieht durch die Mittelpunkte Geraden parallel der Axe b, bis dieselben die Seiten des Rhombus schneiden; da sie diese ebenfalls unter 120^0 schneiden, so ist hierdurch ein Hexagon construirt, dessen Ecken, mit der Mitte verbunden, die drei Nebenaxen, in richtigem Längenverhältniss zur Hauptaxe c stehend, liefern. Die weitere Construction, nachdem einmal das Axenkreuz gegeben ist, bedarf keiner speciellen Erläuterung mehr; man hat einfach alle Kanten, welche nicht direct durch die Endpunkte und Richtungen der Axen bestimmt sind, auf die angeführte Art mittelst ihrer Durchschnitte mit zwei Axenebenen zu construiren.

Aus diesem Grunde ist auch für das mono- und asymmetrische System nur nöthig, die Construction ihres Axenkreuzes anzugeben, da alsdann alles Uebrige sich von selbst versteht.

Sei in Fig. 555 AA', BB', CC' das reguläre Axenkreuz und sei dasjenige eines monosymmetrischen Krystalls zu construiren, dessen Klinodiagonale nach vorn geneigt ist, und mit c den Winkel β einschliesst. Man trägt von der Mitte aus nach oben die Länge

$$OC'' = OC \cdot \cos\beta$$

und nach hinten diejenige

$$OA'' = OA' \cdot \sin\beta$$

auf, vollendet das Parallelogramm $OA''a'C''$ und macht $Oa = Oa'$, so ist aa' die Klinodiagonale des betreffenden Krystalls für den Fall, dass seine drei Axen gleiche Länge haben; man hat also nur nöthig, Oa mit dem wahren Werthe der Klinodiagonale, OC mit dem der Verticale zu multipliciren, um das Axenkreuz zu erhalten.

Um nun endlich das Axenkreuz eines asymmetrischen Krystalls zu

finden, dessen drei Axenwinkel α (Axe b : Axe c), β und γ sind, gehe man wieder von dem regulären Axenkreuz AA', BB', CC'. Fig. 556, aus, trage auf OA die Länge

$$OA^2 = OA \cdot \cos C$$

und auf OB die Länge

$$OB^2 = OB \cdot \sin C$$

auf, wobei C den Winkel $\infty \bar{P} \infty : \infty \breve{P} \infty$ bedeutet, so ist, wenn man das Parallelogramm OA^2DB^2 gezogen hat, die Ebene COD das projicirte Makro-

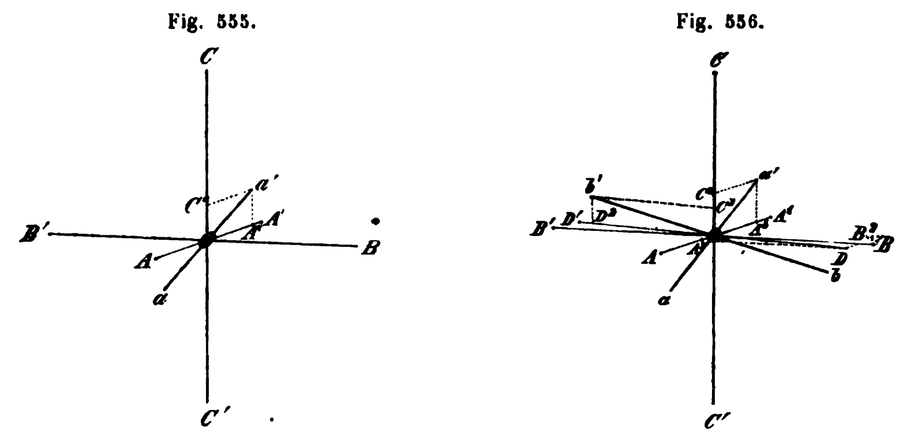


Fig. 555. Fig. 556.

pinakoid, wenn das Brachypinakoid unverändert geblieben ist, und OD eine in derselben befindliche Horizontale von der Länge 1. Man nehme nun in OC die Längen

$$OC^3 = OC \cdot \cos \beta$$
$$OC^2 = OC \cdot \cos \alpha,$$

ferner in OA^1

$$OA^3 = OA^1 \cdot \sin \beta$$

und in OD^1 (wenn der spitze Axenwinkel α links, andernfalls in OD)

$$OD^2 = OD^1 \cdot \sin \alpha,$$

vollende die Parallelogramme $OA^3a'C^3$ und $OD^2b'C^2$, ziehe deren Diagonalen und verlängere sie jenseits O um denselben Werth, so ist

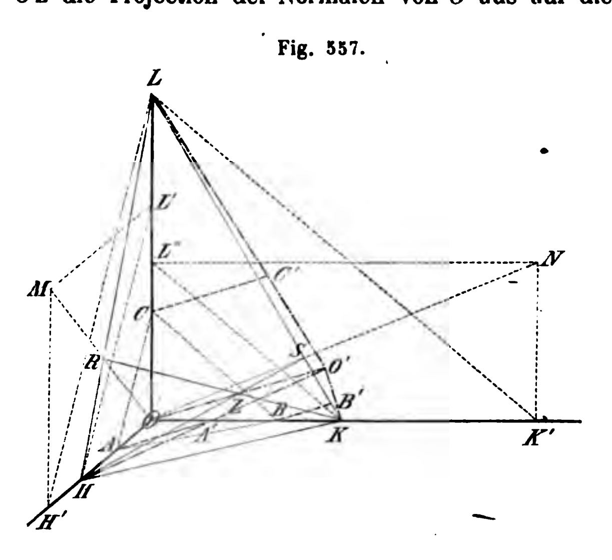
aa' die Brachydiagonale
bb' die Makrodiagonale
CC' die Verticalaxe

der asymmetrischen Krystallform, wenn $a : b : c = 1$; man hat also bb' unverändert zu lassen und aa' mit a, CC' mit c zu multipliciren, um das Axenkreuz des Krystalls mit dem Parameterverhältniss $a : b : c$ zu erhalten.

Zeichnung der Zwillingskrystalle: Um diese in derselben Weise zu projiciren, hat man erstens das Axenkreuz des einen Krystalls in der richtigen Stellung zu construiren, zweitens dasjenige des zweiten in einer Stellung, in welcher es gegen eine bestimmte Krystallfläche des ersten (die Zwillingsebene) symmetrisch liegt.

Sei in Fig. 557 *OA*, *OB*, *OC* das Axenkreuz des ersten Krystalls, seien *OH*, *OK*, *OL* die Parameter der Krystallfläche, welche die Zwillingsebene bildet, so suche man den Punkt *Z*, in welchem eine aus *O* auf die Ebene *HKL* gefällte Normale diese trifft. Den Punkt *Z* findet man folgendermaassen: ziehe *HL'* und *LH'* ∥ *AC*, *KL''* und *LK'* ∥ *BC*, construire die Parallelogramme *OH'ML'* und *OK'NL''* und deren Diagonalen *OM* und *ON*; den Punkt *R*, wo *OM* und *HL* sich schneiden, verbinde man mit *K*, so ist *KR* eine Höhenlinie des Dreiecks *HKL*; den Punkt *S*, in welchem *ON* und *KL* sich schneiden, verbinde man mit *H*, so ist *SH* eine zweite Höhenlinie jenes Dreiecks; *Z* ist der Schnittpunkt dieser beiden Höhenlinien, also ist *OZ* die Projection der Normalen von *O* aus auf die Ebene *HKL*. Verlängert man *OZ* jenseits *Z* um seine eigene Länge, so erhält man einen Punkt *O'*, welchen man durch Gerade mit *H*, *K* und *L* verbindet; alsdann sind *O'H*, *O'K* und *O'L* die Richtungen der drei Axen *a*, *b*, *c* des in Zwillingsstellung befindlichen zweiten Krystalls und ihre Längen gleich den Parametern der Zwillingsfläche *HKL*, welche dann für beide Krystalle identisch ist, nur dass diese umgekehrt gegen sie liegen. Will man nun das primäre Axenkreuz, d. h. die Parameterlängen der Grundform haben, so braucht man nur durch *A*, *B* und *C* Parallelen zu *OZ* zu legen, bis sie die Axen des zweiten Krystalls schneiden, so ist *O'A'*, *O'B'*, *O'C'* die Projection des Axenkreuzes für den zweiten, in Bezug auf *HKL* gegen den ersten symmetrisch liegenden Krystall. Mit Hülfe dieses Axenkreuzes zeichnet man nun diesen nach derselben Methode wie den ersten, und verschiebt ihn, parallel sich selbst, so weit, wie es der natürlichen Ausbildung der Zwillingskrystalle entspricht.

Fig. 557.



Anhang.

Vergleichungstabelle der krystallographischen Bezeichnungen

von

Naumann, Miller und **Levy.**

Die beiden ersteren Bezeichnungsweisen der Krystallformen sind, bis auf eine beim hexagonalen System zu besprechende Abweichung, in der II. Abth. dieses Buches erläutert worden. Die Kenntniss der dritten ist deshalb für Jeden, der sich eingehender mit physikalischer Krystallographie beschäftigen will, nothwendig, weil sie in den wichtigen Arbeiten Des Cloizeaux's angewendet werden. Ohne auf das Princip der Levy'schen Bezeichnung einzugehen, sollen in der folgenden Tabelle nur die Mittel gegeben werden, die Symbole und Benennungen jener auf die in diesem Buche gebrauchten zurückzuführen.

I. Reguläres Krystallsystem.

(Tesserales System, Système cubique.)

Naumann:	Miller:	Levy:
O	$(1\,1\,1)$	a^1
$\infty O \infty$	$(1\,0\,0)$	p
∞O	$(1\,1\,0)$	b^1
$\infty O n$	$(h\,k\,0)$	$b^{\frac{h}{k}} = b^n$
$m O$	$(h\,h\,l)_{(h > l)}$	$a^{\frac{l}{h}} = a^{\frac{1}{m}}$
$m O m$	$(h\,l\,l)_{(h > l)}$	$a^{\frac{h}{l}} = a^m$
$m O n$	$(h\,k\,l)$	$\left(b^{\frac{1}{h}}\, b^{\frac{1}{k}}\, b^{\frac{1}{l}}\right) = \left(b^{\frac{1}{n}}\, b^{\frac{1}{m}}\, b^{\frac{1}{mn}}\right)$

II. Hexagonales Krystallsystem.

(Sechsgliedriges System, rhomboëdrisches System, Syst. hex.)

Naumann:	Miller:	Levy:
oP	$(0\,0\,0\,1)$	p
mP	$(0\,h\,h\,l)$	$b^{\frac{1}{m}} = b^{\frac{l}{h}}$
mPn	$(\xi\,h\,k\,l)$	$\left(b^{1}\, b^{\frac{n-1}{m}}\, h^{\frac{m(n-1)}{n}}\right) = \left(b^{\frac{1}{h}}\, b^{\frac{1}{k}}\, h^{\frac{1}{l}}\right)$
∞P	$(0\,1\,1\,0)$	h^{1}
$\infty P2$	$(1\,2\,1\,0)$	$h^{\frac{1}{n-1}} = h^{\frac{k}{h}}$
∞Pn	$(\xi\,h\,k\,0)$	

Die rhomboëdrisch-hemiëdrischen Formen dieses Systems bezeichnet Miller in der Weise, dass er die drei Polkanten des primären Rhomboëders zu Axen und die Basis zur Grundform nimmt. Alsdann resultiren folgende Zeichen, verglichen mit denen von Naumann und Levy:

Naumann:	Miller:	Levy:
oR	$(1\,1\,1)$	a^{1}
$mR_{(m<1)}$	$(h\,l\,l)_{(h>l)}$	$a^{\frac{h}{l}} = a^{\frac{2m+1}{1-m}}$
$mR_{(m>1)}$	$(h\,\bar{l}\,\bar{l})_{(h>l)}$	$e^{\frac{h}{l}} = e^{\frac{2m+1}{1-m}}$
$-mR_{(m<\frac{1}{2})}$	$(h\,l\,l)_{(h<l)}$	$a^{\frac{h}{l}} = a^{\frac{1-2m}{1+m}}$
$-mR_{(m>\frac{1}{2})}$	$(\bar{h}\,l\,l)$	$e^{\frac{h}{l}} = e^{\frac{1-2m}{1+m}}$
mRn	$(h\,k\,l)$ $h = 2 + 3mn + m$ $k = 2(1-m)$ $l = 2 - 3mn + m$	$\left(b^{\frac{1}{h}}\, b^{\frac{1}{k}}\, b^{\frac{1}{l}}\right)$ wenn h, k, l positiv; $\left(d^{\frac{1}{h}}\, d^{\frac{1}{k}}\, b^{\frac{1}{l}}\right)$ wird $b^{\frac{h}{k}}$, wenn $l = 0$, wenn l negativ,
$-mRn$	$(h\,k\,l)$ $h = 2 + 3mn - m$ $k = 2(1+m)$ $l = 2 - 3mn - m$	$\left(b^{\frac{1}{h}}\, d^{\frac{1}{k}}\, d^{\frac{1}{l}}\right)$ wird $d^{\frac{h}{k}}$, wenn $l = 0$, wenn k und l negativ,
∞R	$(2\,\bar{1}\,\bar{1})$	e^{2}
$\infty P2$	$(1\,0\,\bar{1})$	d^{1}
∞Pn	$(h\,\bar{k}\,\bar{l})_{(h=k+l)}$ $h = n + 1$ $k = n - 2$ $l = 1 - 2n$	$\left(b^{\frac{1}{h}}\, d^{\frac{1}{k}}\, d^{\frac{1}{l}}\right)$ $= \left(b^{\frac{1}{n+1}}\, d^{\frac{1}{n-2}}\, d^{\frac{1}{1-2n}}\right)$

III. Tetragonales Krystallsystem.

(Quadratisches System, viergliedriges System, pyramidales System, Système du prisme droit à base carrée.)

Naumann:	Miller:	Levy:
oP	(0 0 1)	p
P	(1 1 1)	$b^{\frac{1}{2}}$
mP	$(h\ h\ l)$	$b^{\frac{l}{2h}} = b^{\frac{1}{2m}}$
mPn	$(h\ k\ l)$	$\left(b^{\frac{1}{h-k}}\ b^{\frac{1}{h+k}}\ h^{\frac{1}{l}}\right) = \left(b^{\frac{1}{m(n-1)}}\ b^{\frac{1}{m(n+1)}}\ b^{\frac{1}{n}}\right)$
$P\infty$	(1 0 1)	a^1
$mP\infty$	$(h\ 0\ l)$	$a^{\frac{l}{h}} = a^{\frac{1}{m}}$
∞P	(1 1 0)	m
$\infty P\infty$	(1 0 0)	h^1
∞Pn	$(h\ k\ 0)$	$h^{\frac{h+k}{h-k}} = h^{\frac{n+1}{n-1}}$

Das von **Des Cloizeaux** angegebene Verhältniss $D:D:h$ ist unser $a:a:c$.

IV. Rhombisches Krystallsystem.

(Zweigliedriges System, prismatisches System, Système du prisme rhomboidal droit.)

Naumann:	Miller*).	Levy:
oP	(0 0 1)	p
P	(1 1 1)	$b^{\frac{1}{2}}$
mP	$(h\ h\ l)$	$b^{\frac{l}{2h}} = b^{\frac{1}{2m}}$
$m\breve{P}n$	$(h\ k\ l)_{(h>k)}$	$\left(b^{\frac{1}{h-k}}\ b^{\frac{1}{h+k}}\ g^{\frac{1}{l}}\right) = \left(b^{\frac{1}{m(n-1)}}\ b^{\frac{1}{m(n+1)}}\ g^{\frac{1}{n}}\right)$
$m\bar{P}n$	$(h\ k\ l)_{(h<k)}$	$\left(b^{\frac{1}{h-k}}\ b^{\frac{1}{h+k}}\ h^{\frac{1}{l}}\right) = \left(b^{\frac{1}{m(1-n)}}\ b^{\frac{1}{m(1+n)}}\ h^{\frac{1}{n}}\right)$
∞P	(1 1 0)	m
$\infty\breve{P}n$	$(h\ k\ 0)_{(h>k)}$	$g^{\frac{h+k}{h-k}} = g^{\frac{n+1}{n-1}}$
$\infty\bar{P}n$	$(h\ k\ 0)_{(h<k)}$	$h^{\frac{h+k}{k-h}} = h^{\frac{n+1}{n-1}}$
$m\breve{P}\infty$	$(h\ 0\ l)\left(\frac{h}{l}=m\right)$	$e^{\frac{l}{h}} = e^{\frac{1}{m}}$
$m\bar{P}\infty$	$(0\ k\ l)\left(\frac{k}{l}=m\right)$	$a^{\frac{l}{k}} = a^{\frac{1}{m}}$
$\infty\breve{P}\infty$	(1 0 0)	g^1
$\infty\bar{P}\infty$	(0 1 0)	h^1

*) Bei Miller ist die Makrodiagonale a, die Brachydiagonale b genannt, daher stets die Reihenfolge der beiden nicht verticalen Axen die umgekehrte, als in diesem Buche. Dasselbe gilt auch für die anderen Krystallsysteme, ausser für das monosymmetrische und asymmetrische. Unser Axenverhältniss: $a:b:c$ ist gleich Des Cloizeaux': $d:D:h$.

V. Monosymmetrisches Krystallsystem.

(Monoklines System, zwei- und eingliedriges System, schief prismatisches System, klinorhombisches System, Système du prisme rhomboidal oblique.)

Naumann:	Miller:	Levy:
oP	$(0\,0\,1)$	p
$+P$	$(\bar{1}\,1\,1)$	$b^{\frac{1}{2}}$
$-P$	$(1\,1\,1)$	$d^{\frac{1}{2}}$
$+mP$	$(\bar{h}\,h\,l)$	$b^{\frac{l}{2h}} = b^{\frac{1}{2m}}$
$-mP$	$(h\,h\,l)$	$d^{\frac{l}{2h}} = d^{\frac{1}{2m}}$
$+m\not{P}n$	$(\bar{h}\,k\,l)_{(h<k)}$	$\left(b^{\frac{1}{k-h}}\,d^{\frac{1}{k+h}}\,g^{\frac{1}{l}}\right) = \left(b^{\frac{1}{m(n-1)}}\,d^{\frac{1}{m(n+1)}}\,g^{\frac{1}{n}}\right)$
$-m\not{P}n$	$(h\,k\,l))_{(h<k)}$	$\left(d^{\frac{1}{k+h}}\,b^{\frac{1}{k-h}}\,g^{\frac{1}{l}}\right) = \left(d^{\frac{1}{m(n+1)}}\,d^{\frac{1}{m(n-1)}}\,g^{\frac{1}{}}\right)$
$+m$Ꝑn	$(\bar{h}\,k\,l)_{(h>k)}$	$\left(b^{\frac{1}{h-k}}\,b^{\frac{1}{h+k}}\,h^{\frac{1}{l}}\right) = \left(b^{\frac{1}{m(n-1)}}\,b^{\frac{1}{m(n+1)}}\,h^{\frac{1}{n}}\right)$
$-m$Ꝑn	$(h\,k\,l)_{(h>k)}$	$\left(d^{\frac{1}{k+h}}\,d^{\frac{1}{k-h}}\,h^{\frac{1}{l}}\right) = \left(d^{\frac{1}{m(1+n)}}\,d^{\frac{1}{m(1-n)}}\,h^{\frac{1}{n}}\right)$
∞P	$(1\,1\,0)$	m
$\infty\not{P}n$	$(h\,k\,0)_{(h<k)}$	$g^{\frac{h+k}{k-h}} = g^{\frac{n+1}{n-1}}$
∞Ꝑn	$(h\,k\,0)_{(h>k)}$.	$h^{\frac{h+k}{h-k}} = h^{\frac{n+1}{n-1}}$
$m\not{P}\infty$	$(0\,k\,l)$	$e^{\frac{l}{k}} = e^{\frac{1}{m}}$
$+m$Ꝑ∞	$(\bar{h}\,0\,l)$	$a^{\frac{l}{h}} = a^{\frac{1}{m}}$
$-m$Ꝑ∞	$(h\,0\,l)$	$o^{\frac{l}{h}} = o^{\frac{1}{m}}$
∞Ꝑ∞	$(1\,0\,0)$	h^1
$\infty\not{P}\infty$	$(0\,1\,0)$	g^1

VI. Asymmetrisches Krystallsystem.

(Triklinisches System, klinorhomboidisches System, eingliedriges System, Système du prisme doublement oblique ou anorthique.)

Naumann:	Miller:	Levy:
oP	(001)	p
$P', 'P, P_{,}, {}_{,}P$	$(111),(1\bar{1}1),(\bar{1}\bar{1}1),(\bar{1}11)$	$f^{\frac{1}{2}},\ d^{\frac{1}{2}},\ b^{\frac{1}{2}},\ c^{\frac{1}{2}}$
$mP', m'P, mP_{,}, m{}_{,}P$	$(h\,h\,l),(h\,\bar{h}\,l),(\bar{h}\,\bar{h}\,l),(\bar{h}\,h\,l)$	$f^{\frac{l}{2h}} = f^{\frac{1}{2m}},\ d^{\frac{l}{2h}} = d^{\frac{1}{2m}},\ b^{\frac{l}{2h}} = b^{\frac{1}{2m}},\ c^{\frac{l}{2h}} = c^{\frac{1}{2m}}$
$\infty P'$	(110)	t
$\infty{}'P$	$(1\bar{1}0)$	m

Naumann:	Miller:	Levy:
$m\,\bar{P}'\,n$	$(h\,k\,l)$	$\left(f^{\frac{1}{h+k}}\,d^{\frac{1}{h-k}}\,h^{\frac{1}{l}}\right)=\left(f^{\frac{1}{m(n+1)}}\,d^{\frac{1}{m(n-1)}}\,h^{\frac{1}{n}}\right)$
$m'\bar{P}\,n$	$(h\,\bar{k}\,l)$	$\left(d^{\frac{1}{h-k}}\,f^{\frac{1}{h+k}}\,h^{\frac{1}{l}}\right)=\left(d^{\frac{1}{m(n-1)}}\,f^{\frac{1}{m(n+1)}}\,h^{\frac{1}{n}}\right)$
$m\,\bar{P}{,}n$	$(\bar{h}\,\bar{k}\,l)$	$\left(b^{\frac{1}{k+h}}\,c^{\frac{1}{k-h}}\,h^{\frac{1}{l}}\right)=\left(b^{\frac{1}{m(1+n)}}\,c^{\frac{1}{m(1-n)}}\,h^{\frac{1}{n}}\right)$
$m{,}\bar{P}\,n$	$(\bar{h}\,k\,l)$	$\left(c^{\frac{1}{k-h}}\,b^{\frac{1}{k+h}}\,h^{\frac{1}{l}}\right)=\left(c^{\frac{1}{m(1-n)}}\,b^{\frac{1}{m(1+n)}}\,h^{\frac{1}{n}}\right)$
$m'\bar{P}'\infty$	$(h\,0\,l)$	$o^{\frac{l}{h}}=o^{\frac{1}{m}}$
$m{,}\bar{P}{,}\infty$	$(\bar{h}\,0\,l)$	$a^{\frac{l}{h}}=a^{\frac{1}{m}}$
$m\,\breve{P}'\,n$	$(h\,k\,l)$	$\left(f^{\frac{1}{h+k}}\,c^{\frac{1}{h-k}}\,g^{\frac{1}{l}}\right)=\left(f^{\frac{1}{m(1+n)}}\,c^{\frac{1}{m(1-n)}}\,g^{\frac{1}{n}}\right)$
$m'\breve{P}n$	$(h\,\bar{k}\,l)$	$\left(d^{\frac{1}{h-k}}\,b^{\frac{1}{h+k}}\,g^{\frac{1}{l}}\right)=\left(d^{\frac{1}{m(1-n)}}\,b^{\frac{1}{m(1+n)}}\,g^{\frac{1}{n}}\right)$
$m\,\breve{P}{,}n$	$(\bar{h}\,\bar{k}\,l)$	$\left(b^{\frac{1}{k+h}}\,d^{\frac{1}{k-h}}\,g^{\frac{1}{l}}\right)=\left(b^{\frac{1}{m(n+1)}}\,d^{\frac{1}{m(n-1)}}\,g^{\frac{1}{n}}\right)$
$m{,}\breve{P}\,n$	$(\bar{h}\,k\,l)$	$\left(c^{\frac{1}{k-h}}\,f^{\frac{1}{k+h}}\,g^{\frac{1}{l}}\right)=\left(c^{\frac{1}{m(n-1)}}\,f^{\frac{1}{m(n+1)}}\,g^{\frac{1}{n}}\right)$
$m{,}\breve{P}'\infty$, $m'\breve{P}{,}\infty$	$(0\,k\,l)$, $(0\,\bar{k}\,l)$	$i^{\frac{l}{k}}=i^{\frac{1}{m}}$, $e^{\frac{l}{k}}=e^{\frac{1}{m}}$
$\infty\bar{P}'{,}n$, $\infty'{,}\bar{P}n$	$(h\,k\,0)$, $(h\,\bar{k}\,0)$	$h^{\frac{k-h}{h+k}}=h^{\frac{1-n}{1+n}}$, ${}^{\frac{h+k}{h-k}}h={}^{\frac{n+1}{n-1}}h$
$\infty\breve{P}'{,}n$, $\infty'{,}\breve{P}n$	$(h\,k\,0)$, $(h\,\bar{k}\,0)$	$g^{\frac{k-h}{k+h}}=g^{\frac{n-1}{n+1}}$, ${}^{\frac{k+h}{k-h}}g={}^{\frac{n+1}{n-1}}g$
$\infty\breve{P}\infty$	$(0\,1\,0)$	g^1
$\infty\bar{P}\infty$	$(1\,0\,0)$	h^1

Alphabetisches Register.

A.

B.

C.

T.

U.

V.

W.

Z.

Preisverzeichniss

der krystallographischen und petrographischen

Apparate und Utensilien

von

R. Fuess.

Alle in diesem Verzeichniss aufgeführten Apparate für Krystallographie und Krystallphysik sind in dem Werke:

»**P. Groth, physikalische Krystallographie,**
Leipzig, Wilh. Engelmann 1876«

ausführlich beschrieben (und beziehen sich die unten folgenden Citate auf dieses Werk)

1) Grosses **Goniometer** auf einem Dreifuss mit 3 Stellschrauben, horizontalem Kreis mit doppeltem Limbus, jeder in $^{1}/_{6}$ Grade getheilt. Alhidade mit 4 Nonien, 10 Sec. Ablesung. 2 Fernröhre, jedes für sich beweglich mit Nonien. Der Krystallträger, die Alhidade und jedes Fernrohr ist mit Klemmschraube und Mikrometerschraube versehen. An den Ocularen der Fernröhre Polarisatoren mit Kreis und Nonius. Erhitzungsapparat (S. 464, Taf. II, Fig. 5, 6, 7) . . . . 1350 Mark

2) **Goniometer** auf einem Dreifuss mit 3 Stellschrauben, horizontalem Kreis mit silbernem Limbus in $^{1}/_{4}$ Grade getheilt. Alhidade mit 2 Nonien, 30 Secunden Ablesung. Der Kreis und die Alhidade mit dem Fernrohr sind für sich beweglich und feststellbar, ersterer hat eine Mikrometer- und Klemmschraube. Spaltrohr mit parallelem und Websky'schen Spalt. Der Krystallträger ist durch Schraube auf- und nieder stellbar. Das Instrument dient auch für Bestimmung der Brechungsexponenten (S. 460, Taf. II, Fig. 3) . . . . 405 -

3) **Goniometer** auf Marmorplatte mit Stellschrauben. Der horizontale feste Kreis mit silbernem Limbus ist in $^{1}/_{2}$ Grade getheilt. Alhidade mit 2 Nonien, 1 Minute Ablesung. Beobachtungsfernrohr, Spaltrohr mit Websky'schem Spalt, Hülfsvorrichtung zum leichteren Centriren der Krystalle . . . . 300 -
Ohne Vorrichtung . . . . 270 -

4) **Goniometer** nach Wollaston auf Marmorplatte, senkrechtem Kreis mit Nonius 1 Minute angebend, Centrir- und Justirvorrichtung . . . . 108 -

5) **Goniometer** nach Wollaston in Messingetuis. Kreis in ganze Grade getheilt, Nonius 4 Minuten angebend . . . . 48 -

6) **Anlegegoniometer** mit Stahlschenkeln, im Etuis . . . . 8 -

7) **Universalapparat** für krystallographisch-optische Untersuchungen nach Prof. P. Groth (s. S. 472), bestehend aus senkrechtem Polarisationsinstrument mit Stauroskop, Axenwinkelapparat, Erhitzungsapparat, Apparat für Bestimmung der Brechungsexponenten, Goniometer. Verstellbarer Untersatz für den Axenwinkelapparat. Sämmtliche Apparate in 2 Mahagonikästen . . . . 570 -
Quarzkeil und $^{1}/_{4}$ **Undulations-Glimmerplatte** für ob. Inst. (s. S. 107, 109) 20 -
Vorrichtung zur Messung der **Circularpolarisation** am Axenwinkelapparat 15 -

8) **Polarisationsapparat** nach Nörremberg mit drehbarem Tisch und grossem Sehfelde . . . . 105 -

9) Derselbe mit Auszugrohr zur stärkeren Vergrösserung und Goniometer zum Messen der Axenwinkel . . . . 132 -

10) **Mikroscop**, speziell für Untersuchung von Dünnschliffen construirt, mit drehbaren in Grade eingetheiltem Tisch, Tubus des M. zur Axe des Tisch's centrirbar. Die »Hartnack'schen« Polarisatoren mit Kreiseintheilung. Oculare 2 u. 3 mit Kreuzfäden, No. 4 mit Mikrometer. Goniometer. Erhitzungsapparat. Quarzplatte zum Einschieben in den Tubus. **Kalkspathplatte** zum Auflegen auf die Oculare, also

zwischen Ocular und dem analysirenden Prisma (Stauro-Mikroscop).
Die Hartnack'schen Linsensysteme No. 4 oder 5 und Nr. 7 und 9 . 405 Mark
(Auf Wunsch der Besteller werden auch andere Combinationen von Objektivsystemen gegeben, sowohl Hartnack'sche wie von anderen renommirten Firmen.)

Handloupen doppelt und einfach . . . . 4—12 -

11) **2 Kalkspathrhomboeder** in Fassung drehbar mit dunklem Schirm zur Demonstation der Doppelbrechung (s. S. 40 f.) . . . . 54 -

12) Doppelbrechendes Prisma von Kalkspath . . . . 18—30 -

13) Apparat für Doppelbrechung durch Biegung (S. 115) . . . . . . 12 -

14) - - - - Pressung (S. 116) . . . . . . 15 -

15) - - - - Erhitzung . . . . 12 -

Dicke Gläser für die Apparate 14 u. 15 pro Dutzend . . . . . 9 -

16) **Apparat** zur Interferenz des Lichts (S. 34) . . . . 9 -

17) - für **Pyroelectricität** in Etuis (S. 422) . . . . 18 -
(Der Preis der 2 zu diesem Apparat gehörigen Turmaline richtet sich je nach Vollkommenheit der Krystalle.)

18) **Sénarmont'scher** Apparat zur Erkl. der ungleichen Wärmeleitung der Krystalle nach verschiedenen Richtungen (S. 131) . . . . 18 -

19) **6 Axenkreuze** (gross) zum Einziehen von Fäden . . . . 24 -

20) **Hohlprisma** mit genau planparallelen Deckplatten . . . . 24 -
- mit Thermometer . . . . 36 -

21) Grosses verstellbares Holzstativ von Mahagony zum Aufstellen der Goniometer und anderer Apparate . . . . 66 -

Schneide- und Schleifapparate

zur Herstellung von Dünnschliffen und Krystallpräparaten etc.

22) **Grosse Maschine von Eisen** mit Schwungrad und Fusstrittbewegung, zum Formatisiren resp. Zerschneiden grösserer Stufen, Petrefakten etc. Mit Vorrichtungen zum Befestigen und Orientiren der betr. Substanzen. Schneidscheibe ca. 30 Centimeter Durchmesser . . . . 300 -

23) **Kleineres Modell** ganz von Eisen mit Schwungrad und Fusstrittbewegung. Combination einer Schneide- und Schleifmaschine mit Vorrichtungen zum Befestigen und Orientiren des Materials. Grösse der Schneide- und Schleifscheiben ca. 17—20 Centimeter. Kleinere Attribute zum gleichzeitigen Schleifen mehrerer Dünnschliffe etc. . . . 240 -

24) **Schneidemaschine** mit Handbetrieb. Nebst den nöthigen Vorrichtungen zur Befestigung u. Orientirung . . . . 72 -

25) **Schleifmaschine** mit Handbetrieb, besonders verwendbar zur Herstellung von Krystallpräparaten und auch Dünnschliffen, nebst diversen kleinen Vorrichtungen . . . . 60 -

26) **Vorrichtung zum Planparallelschleifen** von Krystallplatten (in Verbindung mit No. 25 vortheilhaft zu verwenden) . . . . 21 -

27) **Platte von Gusseisen,** genau plan gehobelt ca. 30 Centimeter im Quadrat (zum Schleifen) . . . . 12 -

28) **Platte** von Spiegelglas mit Holzunterlage . . . . 12 -

29) **Holzkasten,** enthaltend diverse Sorten geschlammten Schmirgel, Kanadabalsam, Zinnasche, Knochenöl zum Schmieren der Maschinen in Glasflaschen, Kolophoniumkitt . . . . 20 -

30) Präparirofen zum Kitten von Präparaten, Dünnschliffen, mit Spirituslampe, Thermometer u. Pincette . . . . 18 -

Dünnschliffe.

Sammlung von 30 Dünnschliffen typischer Gesteine,
Zusammenstellung von Prof. **J. Roth,** No. 1 45
- - - Prof. **F. Zirkel,** No. 2 45
- - 30 Dünnschliffen typischer Basalte von Prof. **H. Möhl,** No. 3 36
- - 30 - petrographisch wichtiger Mineralien von Prof. **H. Rosenbusch,** No. 4 45
(in kleinem Format 24 Mark.)

Diese Serien werden fortgesetzt und zu jeder ein erläuternder Commentar geliefert.

Sammlungen von 30 Stück Dünnschliffen **eigener Auswahl** . . . . . . 30 -

Deckgläser 22 : 23 mm.	100	Stück	5	Mark
	12	-	0,75	-
- 16 : 16 -	100	-	3	-
	12	-	0,5	-
Objektträger, eigenes Format von Spiegelglas mit polirten Kanten	100	-	7	-
	12	-	1	-
- - - - feinem Glase - - -	100	-	5	-
	12	-	0,75	-
Präparatengläser f. Krystallpräparate 20 : 20 mm. - - -	100	-	4,50	-
- - - 20 : 10 - - - -	100	-	4,50	-

Optische Präparate und Apparate

(nach Angaben von Professor **Groth** zusammengestellt)

von

Wilhelm Steeg in Homburg v. d. Höhe.

Polarisationsapparat nach Nörremberg, mit grossem Gesichtsfeld			105 Mark	
Turmalinzange	von 12	bis	30 -	
Einaxige Krystallplatten, senkrecht zur Axe:				
Kalkspath, 2 Millim. dick	- 2,5	-	5 -	
- 1/2 - -	- 2,5	-	4 -	
Apatit 1/2 - -	- 2,5	-	4 -	
Quarz, 1 rechts, 1 links	- 4	-	6 -	pr. Paar
Quarzplatte, parallel der Axe, dünn	- 4	-	6 -	
Quarzkeil	- 12	-	20 -	
Doppelbrechendes Prisma von Kalkspath (Kante parallel d. Axe)	- 15	-	30 -	u. theurer.
Zweiaxige Platten, senkrecht zur 1. Mittellinie				
2 Aragonit (dick und dünn)	- 2,5	-	5 -	pr. Stück
Topas mit grossem Axenwinkel	- 3	-	12 -	
Brookit	- 5	-	30 -	
Weinsteinsaures Kali-Ammoniak-Natron	- 2,5	-	3 -	
Gyps (2 Platten, eine ungefasst zum Erwärmen)	- 5	-	10 -	pr. Paar
Feldspath v. d. Eifel (Adular)	- 3	-	6 -	
Borax	- 2	-	3 -	
Zweifach chromsaures Kali	- 2,5	-	3 -	
Pleochroïtische Platten, zum Drehen gefasst:				
Pennin	- 4	-	5 -	
Turmalin	- 10	-	20 -	
Amethyst	- 10	-	20 -	
Cordierit	- 10	-	15 -	
Dichroscopische Lupe			12 -	
Idiocyclophanische Krystalle:				
Aragonit	- 8	-	15 -	
Epidot vom Sulzbachthal	- 3	-	10 -	
Platten von möglichst einfarbigem rothen und blauen Glas			2 -	
1/4 Undulations-Glimmerblatt	- 1,5	-	4 -	
Reusch'sche Glimmercombinationen (einaxig, rechts, und links drehend)	- 21	-	25 -	pr. Paar.
Sortiment von 6 gekühlten Gläsern:			20 -	

Die ganze Collection zusammen ohne Polarisationsapparat . . . . . Mark 230 Mittelpreis.

Ausführlichere Preiscourante optischer Instrumente, Apparate und Präparate sende auf Verlangen gratis und franco. **W. Steeg.**

Erläuterung der Tafeln.

Tafel I.

Interferenzerscheinungen der Krystalle im polarisirten Licht bei gekreuzten Nicols:

Fig. 1. Kalkspath (einaxig);
Fig. 2. Quarz (do., circul. pol.);
Fig. 3, 4. Aragonit (rhombisch);
Fig. 5. Brookit (do., Axenebenen f. Blau u. Roth gekreuzt);
Fig. 6, 7. Gyps (geneigte Dispersion);
Fig. 8, 9. Feldspath (horizontale Dispersion);
Fig. 10, 11. Borax (gekreuzte Dispersion);
Fig. 12, 13. Zweifach chromsaures Kalium (asymmetrisch).

Tafel II.

Fig. 1. Wollaston'sches Reflexionsgoniometer;
Fig. 2. Oertling'sche Centrir- und Justirvorrichtung;
Fig. 3. Fuess'sches Reflexionsgoniometer mittl. Gr.;
Fig. 4. Fuess'sche Centrir- und Justirvorrichtung;
Fig. 5. Grösstes Fuess'sches Reflexionsgoniometer;
Fig. 6, 7. Erhitzungsapparat zum vorigen.

Tafel III.

Fig. 1. Verticales Polarisationsinstrument;
Fig. 2, 3, 4. Stauroskop;
Fig. 5. Axenwinkelapparat;
Fig. 6. Oelgefäss;
Fig. 7. Erhitzungsapparat;
Fig. 8. Spiegelapparat f. Fig. 5;
Fig. 9. Goniometer zum Krystallmessen;
Fig. 10. - zum Messen von Brechungsexponenten.

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.

Verbesserungen und Zusätze.

S. 10 Fig. 4 ist Curve I verzeichnet; sie muss so flach sein, dass $xx' + xx'' = xx'''$.
S. 16 Z. 14 v. u. lies: „Radius $a_1 e_1$“ statt „Radius $a_1 e_0$“.
S. 20 Z. 10 v. u. l. „Strahles P_1“ st. „Strahles P_2“.
— Z. 9 v. u. l. „DA“ st. „DB“.
S. 49 letzte Z. nach „Axe steht“ ergänze: „und beide Flächen gleiche Neigung gegen letztere haben“.
S. 61 Fig. 53 fehlen die Buchstaben A und B (oben und unten) an der strichpunktirten Geraden.
S. 88 Z. 4 l. „XOY“ st. „XOZ“.
S. 195 Z. 19 l. „mit der, dazu normalen, sie halbirenden verticalen Symmetrieebene, und der den Winkel b^2 halbirenden Symmetrieebene, welche mit der vorigen 60° bildet, zu einem sphärischen Dreieck u. s. w.“ st. „mit der durch a_1 gehenden Haupt-Symmetrieebene und der dazu normalen Symmetrieebene $b^1 b^2$ zu einem sphärischen Dreieck u. s. w.“.
S. 221 Fig. 179 steht verkehrt (unterst zu oberst).
S. 269 Z. 18 v. u. l. „$(a : 2a : -2a : \infty c)$“ st. „$(a : 2a : -a : \infty c)$“.
S. 274 Z. 9 l. „bleiben“ st. „bleibt“.
S. 279 Z. 10 l. „des Rhomboëders“ st. „der Rhomboëder“.
S. 288 Z. 1 nach „erhält“ ergänze: „durch künstliche Darstellung“.
S. 289 Z. 5 l. „H^8“ st. „H^2“.
S. 292 Z. 23, 24 lies:

oben:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
unten:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

S. 293 Z. 10 l. „2“ st. „9“.
— Z. 11 l. „7“ st. „7“.
— Z. 29 (oben) l. „6“ st. „6“.
S. 294 letzte Z. l. „drei Ebenen“ st. „sechs Ebenen“.
S. 302 Z. 11 v. u. l. „$-\frac{\frac{5}{6} P \frac{5}{4}}{4} r$“ st. „$-\frac{\frac{8}{15} P \frac{8}{7}}{4} r$“.
— Z. 8 v. u. l. „$-\frac{\frac{5}{6} P \frac{5}{4}}{4} l$“ st. „$-\frac{\frac{8}{15} P \frac{8}{7}}{4} l$“.

Die Differenz beruht auf einem Versehen in der cit. Originalarbeit (Berl. Akad. Ber. 1869).

S. 306 Z. 17 l. „die dihexagonalen Prismen“ st. „die hexagonalen Prismen“.
S. 309 Fig. 345 steht verkehrt.
— Z. 3 v. u. l. „$\frac{1}{\sqrt{2}}$, also“ st. „$\frac{1}{\sqrt{2}}$ also“.
S. 318 Z. 11 v. u. l. „n“ st. „m“.
S. 321 Z. 2 l. „$\frac{1}{m} P$, derjenigen“ st. „$\frac{1}{m} P$ derjenigen“.

S. 323 Z. 18 v. u. l. „Ann. d. mines [5] XI, 306" st. „a. a. O. 306".

— letzte Z. l. „[3 *o*, 3 *o*]" st. „[o^3, o^3]".

S. 328 Z. 11 v. u. l. „bei den Fig. 384 dargestellten (+ und —)" st. „bei dem Fig. 384 dargestellten".

S. 346 Z. 10 l. „$\bar{P}\frac{1}{2}$" st. „$P\frac{1}{2}$".

S. 361 Z. 17 l. „2 *E*" st. „2 ε".

S. 363 Z. 27 l. „15° 55'" st. „17° 55'".

S. 365 Z. 20 l. „0.4660 : 1 : 0,5866" st. „0,4368 : 1 : 0,5722".

S. 366 Z. 26 l. „56° 58'" st. „58° 58'".

S. 371 Z. 26 l. „0,4372" st. „0,4296".

S. 381 Z. 7 l. „Wahl der Axen" st. „Wahl der Axe".

S. 401 Z. 8 l. „$\infty\breve{P}2$" st. „$\infty\bar{P}2$".

S. 405 Z. 13 l. „54°" st. „54'".

S. 412 Z. 8 v. u. l. „Hemidomen" st. „Hemipyramiden".

S. 426 ergänze: Bromisatin, s. Grailich, krystall. opt. Unters. 136.

Fi



Fig. 9.



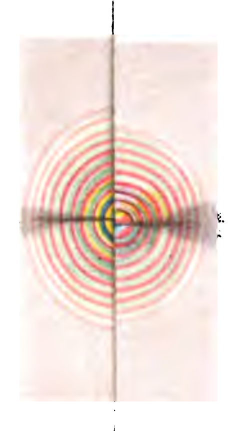
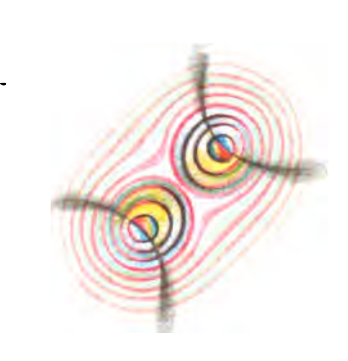


Fig. 11.



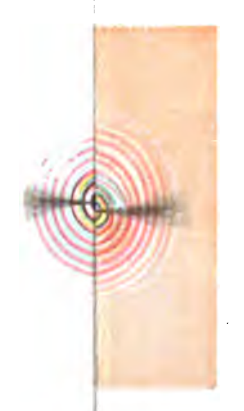
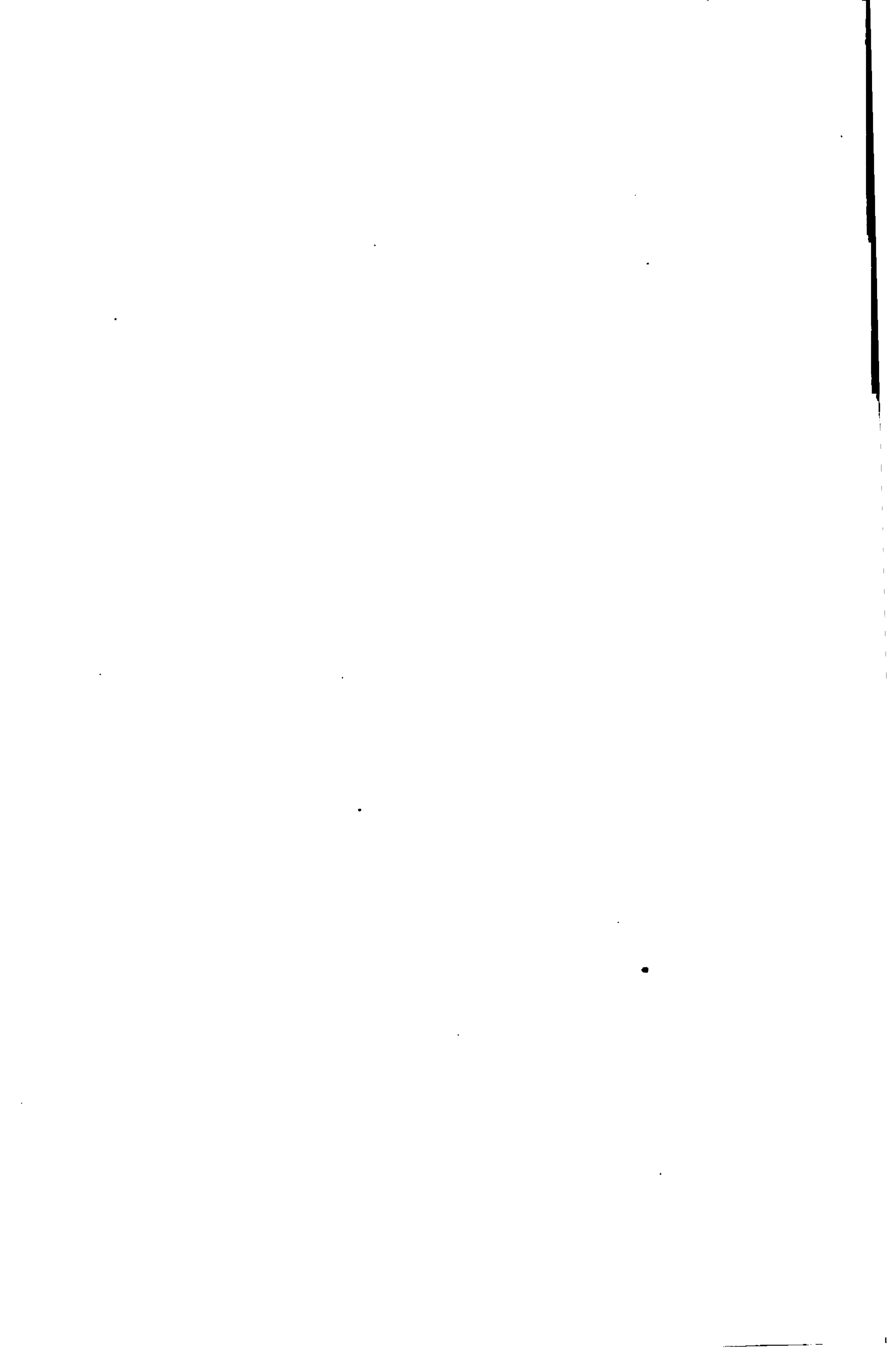


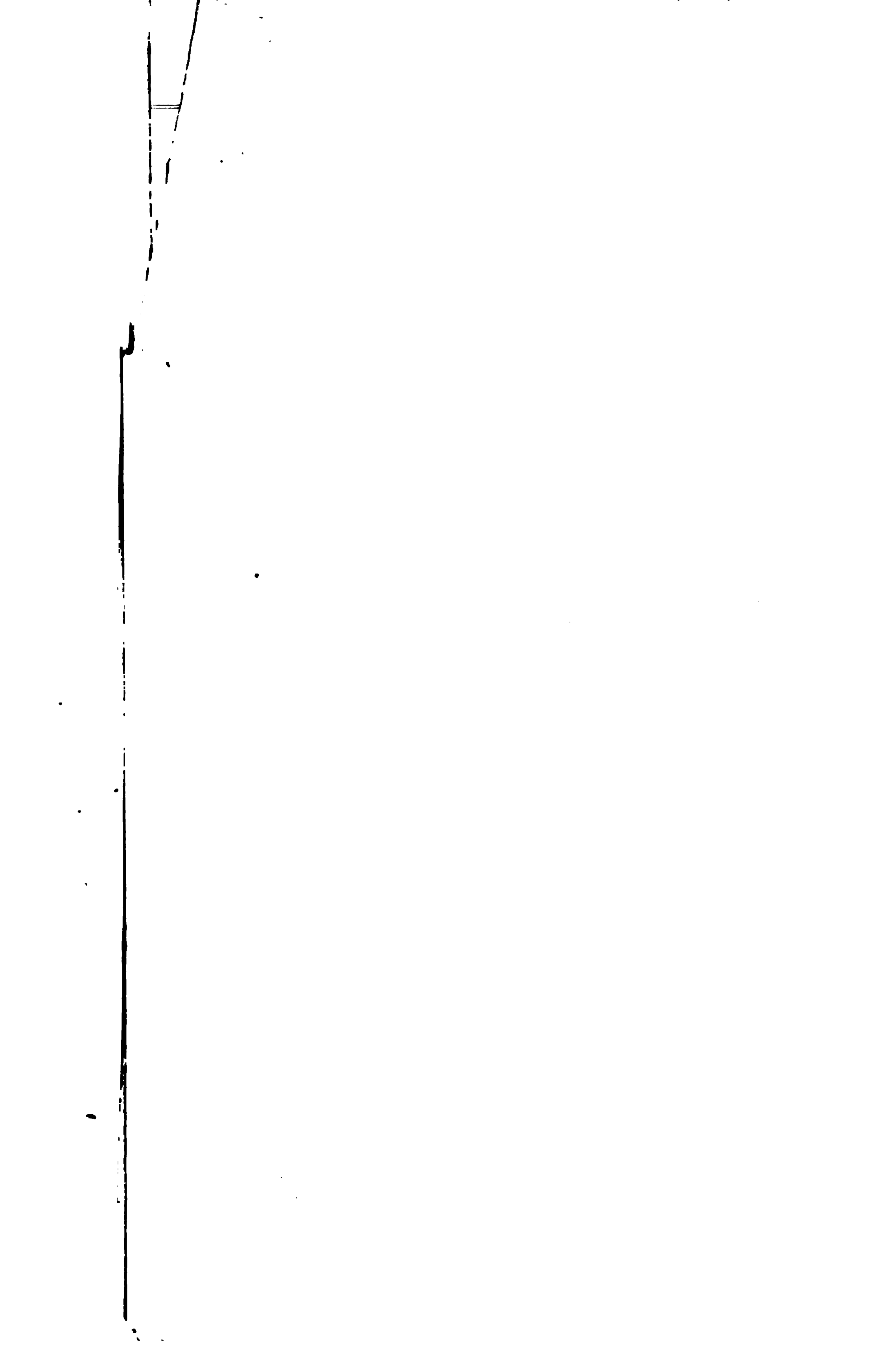
Fig. 13.

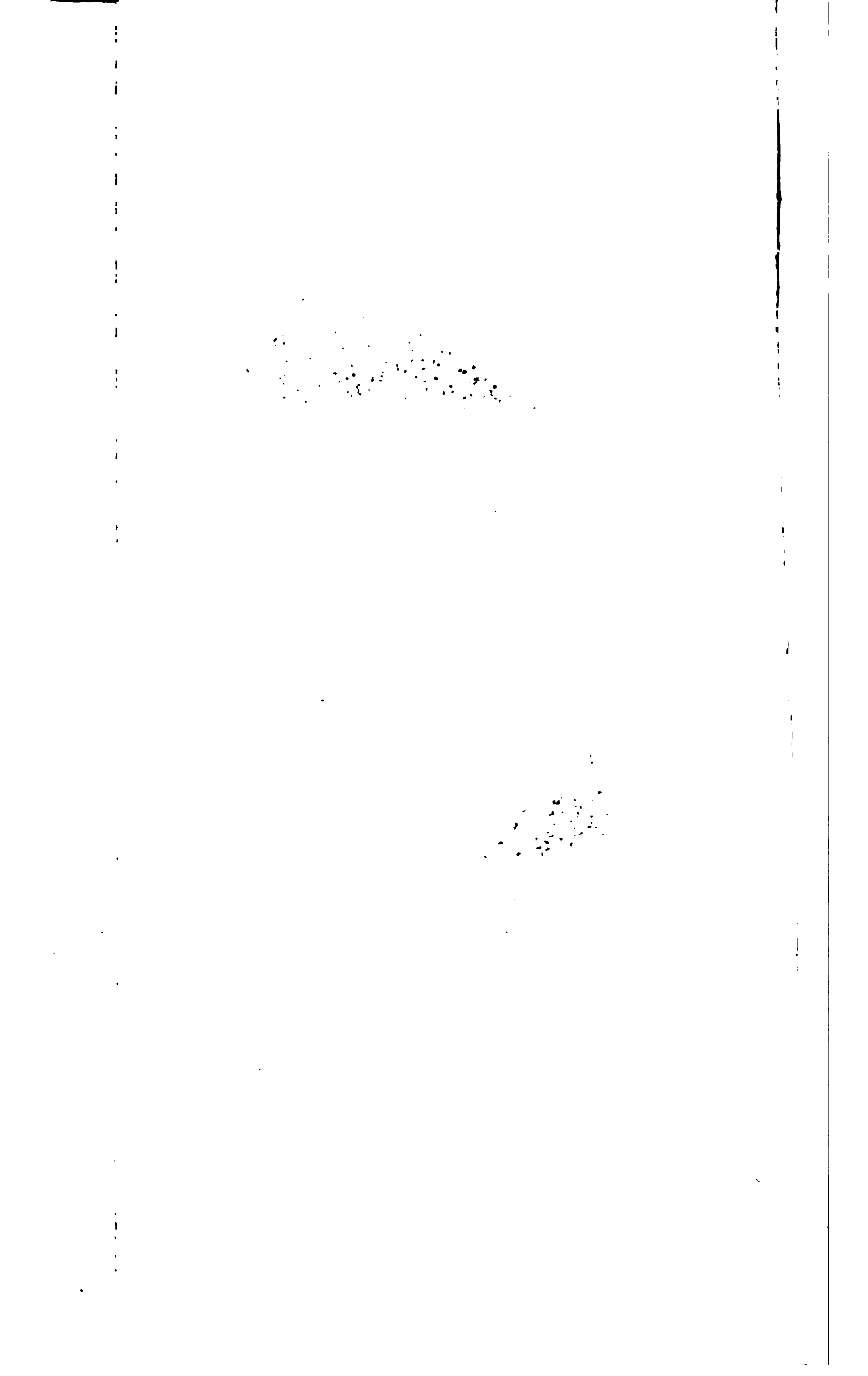


P. GROTH del.

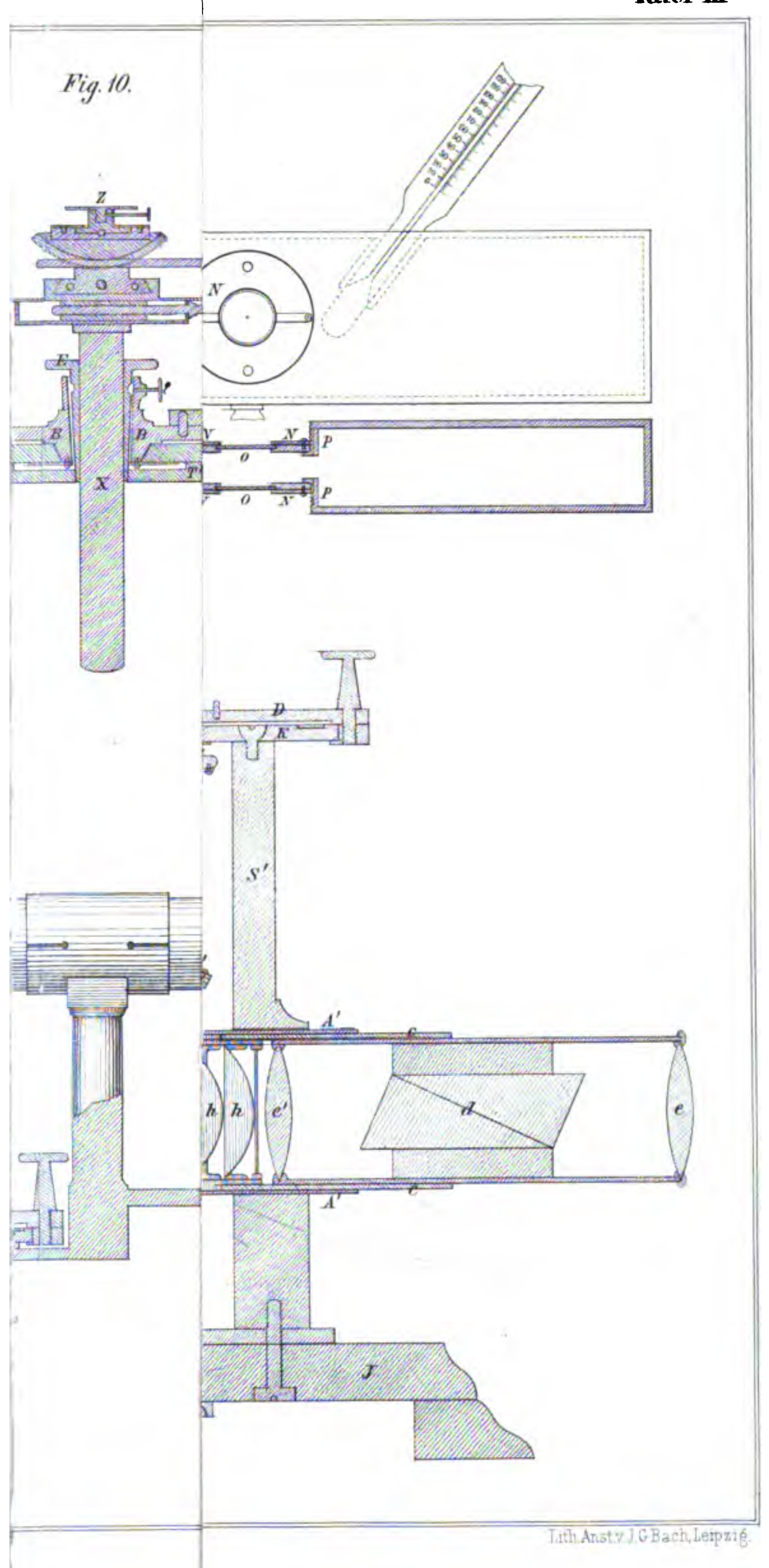
Buchdruckerei von G. Fischbach, in Strassburg



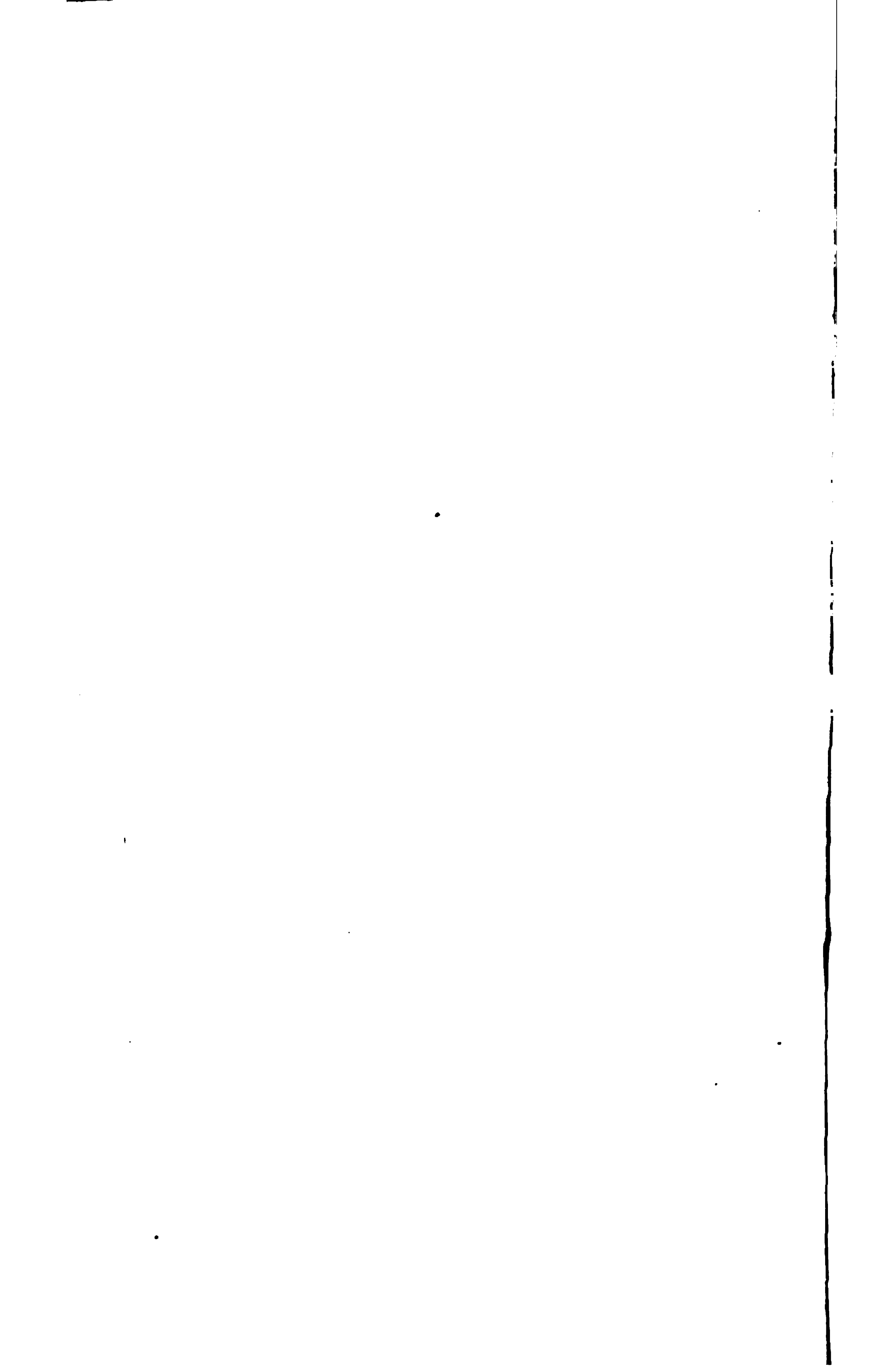


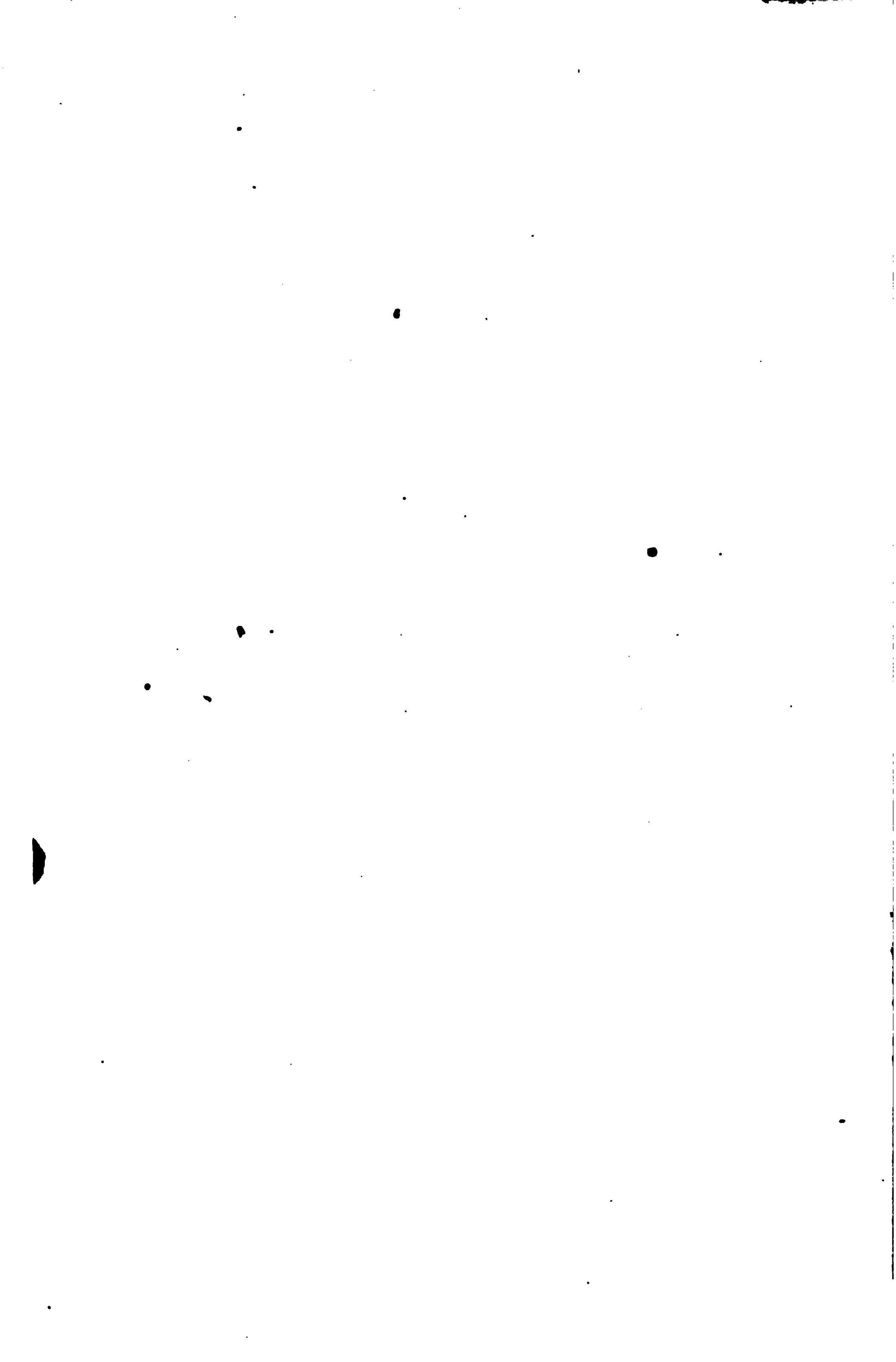


Tafel III



Lith. Anst. v. J. G. Bach, Leipzig.

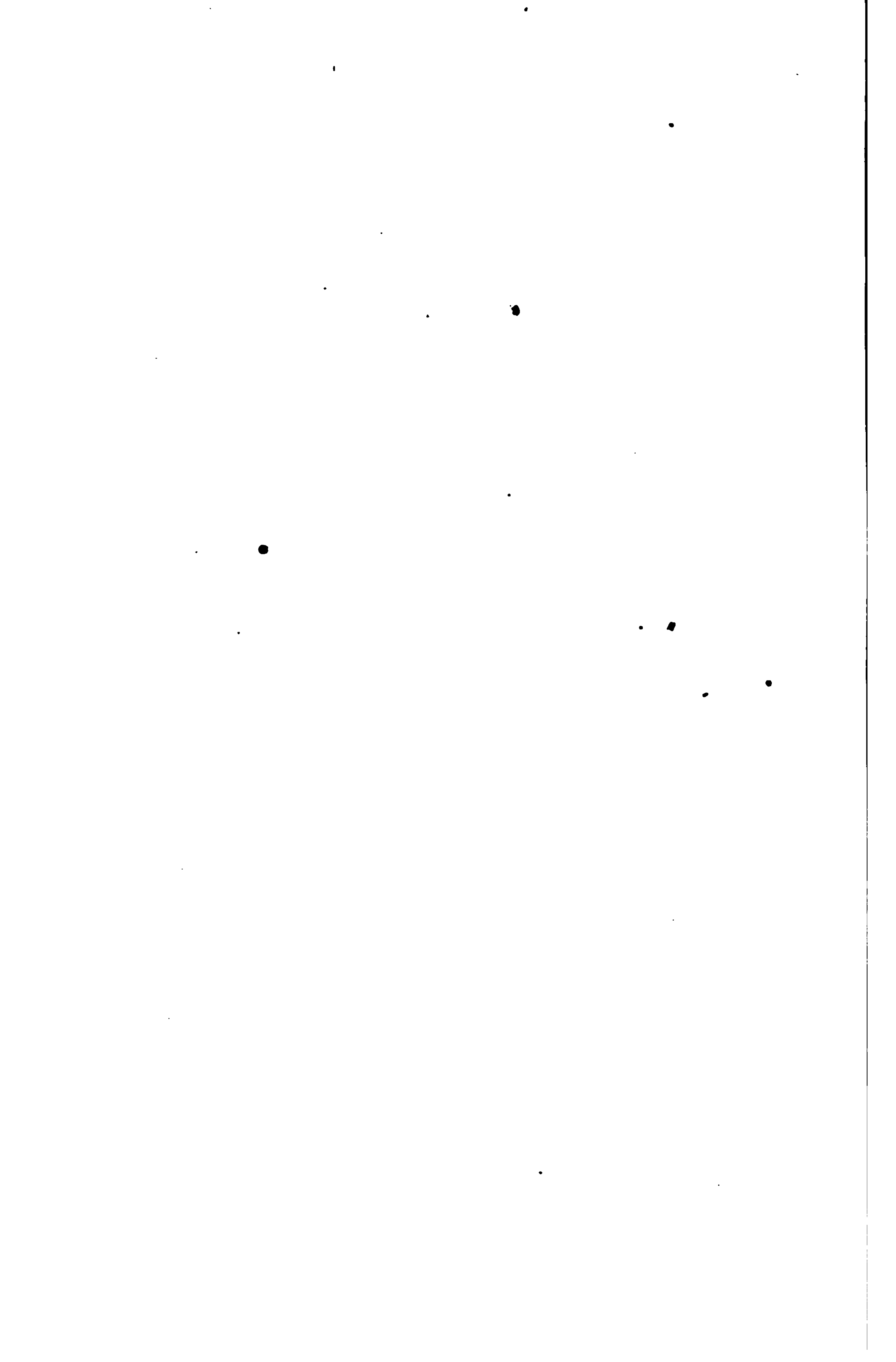




S. 323 Z. 18 v. u. l. „Ann. d. mines [5] XI, 306" st. „a. a. O. 306".
— letzte Z. l. „[3 o, 3 o]" st. „[o^3, o^3]".
S. 328 Z. 11 v. u. l. „bei den Fig. 384 dargestellten (+ und —)" st. „bei dem Fig. 384 dargestellten".
S. 346 Z. 10 l. „$\bar{P}\frac{1}{2}$" st. „$P\frac{1}{2}$".
S. 361 Z. 17 l. „2 E" st. „2 ε".
S. 363 Z. 27 l. „15° 55'" st. „17° 55'".
S. 365 Z. 20 l. „0.4660 : 1 : 0,5866" st. „0,4268 : 1 : 0,5722".
S. 366 Z. 26 l. „56° 58'" st. „58° 58'".
S. 371 Z. 26 l. „0,4372" st. „0,4296".
S. 381 Z. 7 l. „Wahl der Axen" st. „Wahl der Axe".
S. 401 Z. 8 l. „$\infty \bar{P} 2$" st. „$\infty \breve{P} 2$".
S. 405 Z. 13 l. „54°" st. „54'".
S. 412 Z. 8 v. u. l. „Hemidomen" st. „Hemipyramiden".
S. 426 ergänze: Bromisatin, s. Grailich, krystall. opt. Unters. 180.

Tafel I.

,bei ƚ



F

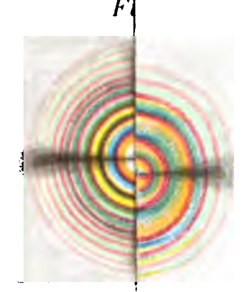


Fig. 9.



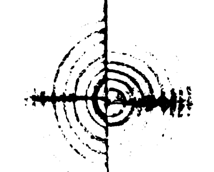


Fig. 11.

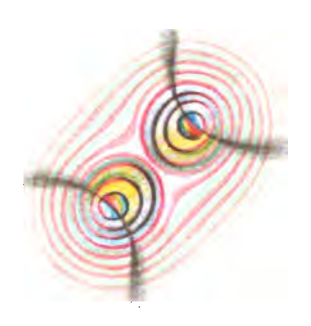
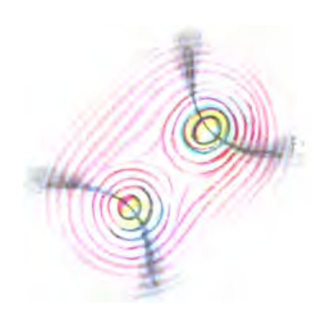


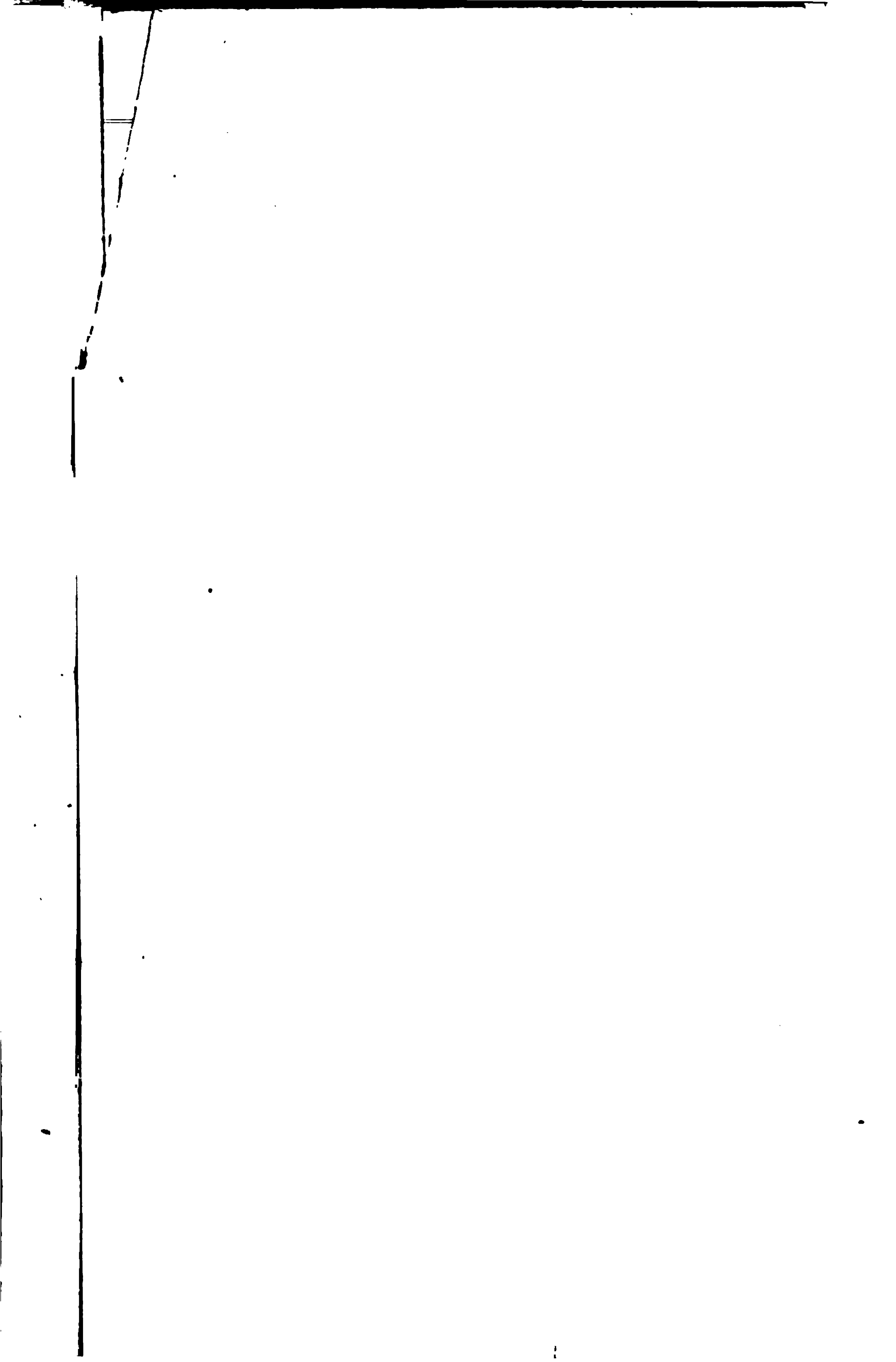


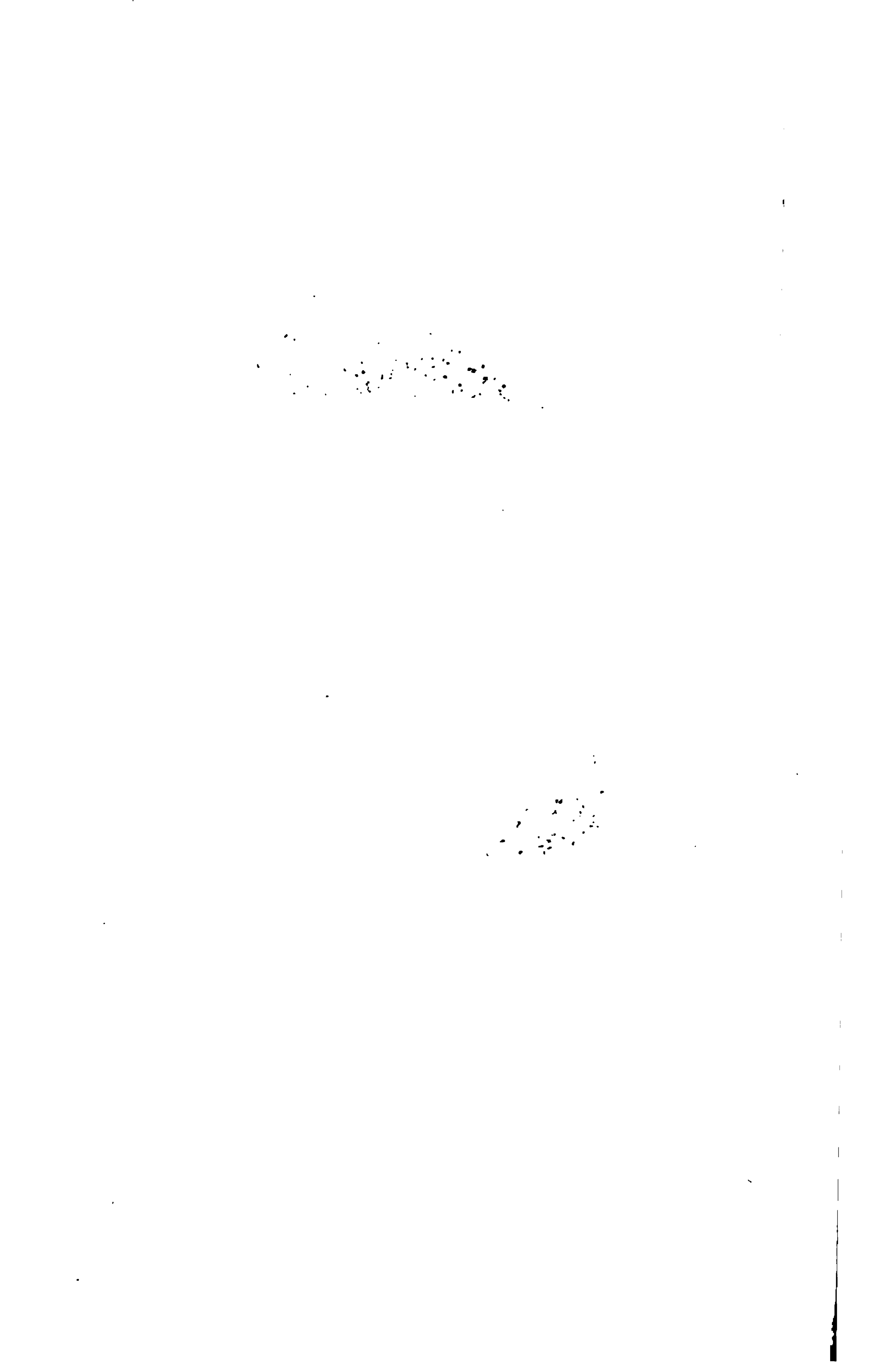
Fig. 13.



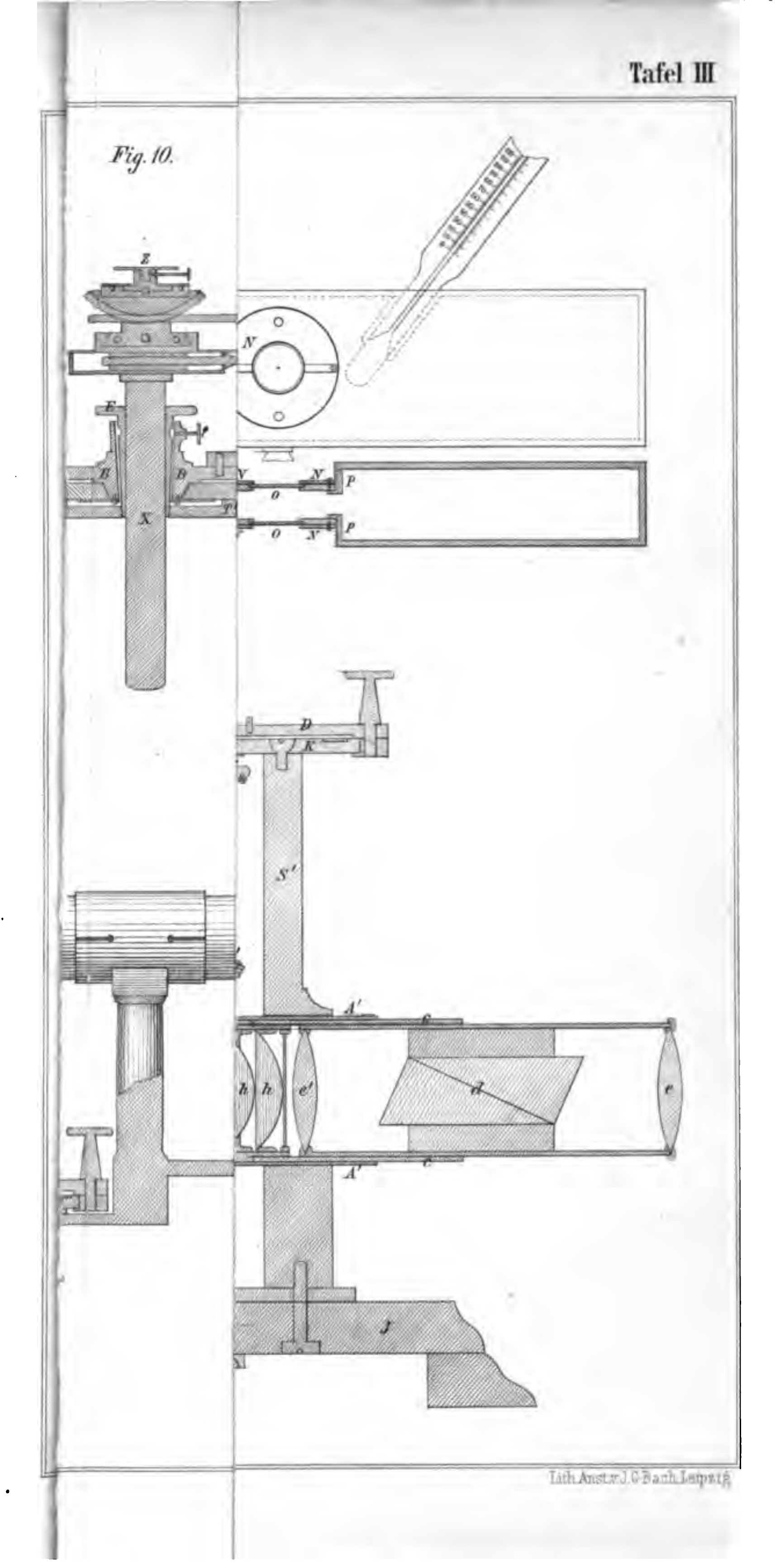
P. GROTH del.

Buchdruckerei von G. Fischbach, in Strassburg.





Tafel III



Lith.Anst.v.J.G.Bach.Leipzig.

